МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ

Кафедра математики и биоинформатики

Математика и математическая статистика

Учебное пособие

Зерноград – 2026

Об издании –1, 2
Содержание

УДК 517.(075)

Печатается по решению методического совета
Азово-Черноморского инженерного института-филиала
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный аграрный университет»
в г. Зерограде

Рецензены:
кандидат химических наук, доцент ***С.В. Посохова***

Математика и математическая статистика [Электронный ресурс]: Учебное пособие / М.Н. Середина, В.В. Серёгина, Н.М. Удинцова, Д.В. Степовой, Т.В. Жидченко. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2026. – 276 с. Режим доступа: Локальная сеть библиотеки Азово-Черноморского инженерного института ФГБОУ ВО Донской ГАУ.

В учебное пособие включены следующие разделы курса «Математика и математическая статистика»: элементы линейной алгебры, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функции одной переменных, теория вероятностей и математическая статистика. Каждый раздел предваряется необходимым теоретическим материалом и большим количеством разобранных примеров и задач, а также содержит блок задач с ответами для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направления подготовки 35.03.04 Агрономия.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры математики и биоинформатики.
Протокол № 9 от 21.05.2026 г.

Рассмотрено и одобрено методическим советом
Азово-Черноморского инженерного института
Протокол № 9 от 22.04.2026 г.

© М.Н. Середина, В.В. Серёгина, Н.М. Удинцова,
Д.В. Степовой, Т.В. Жидченко, 2026
© Азово-Черноморский инженерный институт
ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2026

Содержание

Введение 5
1 Элементы линейной и векторной алгебры 6
1.1 Матрицы 6
1.2 Определители 11
1.3 Системы линейных алгебраических уравнений 13
1.4 Векторы. Линейные операции над векторами 16
1.5 Координаты вектора 19
1.6 Скалярное произведение векторов 21
1.7 Векторное произведение векторов 24
1.8 Смешанное произведение векторов 26
Вопросы для самопроверки 29
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 29
2 Аналитическая геометрия 35
2.1 Прямая на плоскости 35
2.2 Эллипс 41
2.3 Гипербола 42
2.4 Парабола 43
Вопросы для самопроверки 48
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 48
3 Ведение в математический анализ 49
3.1 Множества и операции над ними 49
3.2 Понятие функции одной переменной 51
3.3 Предел функции 55
3.4 Непрерывные функции 63
3.5 Асимптоты графика функции 66
Вопросы для самопроверки 69
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 69
4 Дифференциальное исчисление функции одной переменной 74
4.1 Понятие производной 74
4.2 Правило Лопита́ля раскрытия неопределенностей 82
4.3 Основные теоремы дифференциального исчисления 83
4.4 Монотонность функции. Экстремумы 86
4.5 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба 94
4.6 Построение графика функции 101
Вопросы для самопроверки 104
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 105
5 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных 111
5.1 Понятие функции двух переменных 111
5.2 Дифференцирование функции нескольких переменных 115
5.3 Экстремум. Исследование функций двух переменных с помощью частных производных 123
5.4 Метод наименьших квадратов 125
Вопросы для самопроверки 129
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 129
6 Интегральное исчисление функции одной переменной 131
6.1 Понятие первообразной и неопределённого интеграла 131
6.2 Таблица основных неопределённых интегралов 133

6.3 Методы интегрирования 134
6.4 Понятие определённого интеграла и его свойства 145
6.5 Формула Ньютона-Лейбница 150
6.6 Методы вычисления определённых интегралов 152
6.7 Численность популяции 154
6.8 Геометрические приложения определенного интеграла 155
6.9 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования 169
Вопросы для самопроверки 170
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 171
7 Теория вероятностей 175
7.1 Случайные события. Понятие вероятности 175
7.2 Теоремы сложения и умножения 182
7.3 Формула полной вероятности. Формула Байеса 185
7.4 Схема повторных испытаний. Наивероятнейшее число наступлений события 187
7.5 Случайные величины и их классификация 192
7.6 Дискретные случайные величины 193
7.7 Непрерывные случайные величины 198
7.8 Некоторые стандартные распределения 202
7.9 Нормальный закон распределения 206
Вопросы для самопроверки 209
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 210
8 Математическая статистика 222
8.1 Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения 222
8.2 Полигон и гистограмма 226
8.3 Точечные оценки параметров распределения 229
8.4 Интервальные оценки параметров распределения 232
8.5 Оценка существенности различий выборочных средних 235
8.6 Проверка статистических гипотез 237
Вопросы для самопроверки 241
Задания для аудиторной и самостоятельной работы 241
Ответы 253
Приложение 1 269
Приложение 2 270
Приложение 3 271
Приложение 4 272
Приложение 5 272
Приложение 6 273
Литература 275

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии излагаются все разделы дисциплины «Математика и математическая статистика», изучаемой студентами очной и заочной форм обучения направления подготовки 35.03.04 Агрономия.

Учебное пособие поможет разобраться с такими разделами математики как: элементы линейной алгебры, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функции одной переменных, теория вероятностей и математическая статистика. Каждый раздел предваряется необходимым теоретическим материалом. При изложении материала применяются традиционные обозначения и терминология.

В пособии сделан основной упор на приобретение навыков использования математического аппарата. Все разделы снабжены большим количеством разобранных примеров и задач, помогающих усвоить и закрепить изучаемый материал. Затем дается блок задач с ответами для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Также каждый раздел содержит вопросы для самопроверки.

Настоящее учебное пособие будет полезно преподавателю при проведении занятий со студентами. Кроме того, оно может быть использовано студентами для самостоятельного изучения соответствующего материала и для подготовки к экзамену.

Учебное пособие направлено на формирование следующей компетенции, предусмотренных федеральным государственным стандартом высшего образования по направлению подготовки 35.03.04 Агрономия:

- способности решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин с применением информационно-коммуникационных технологий.

Изучение математики позволит студенту не только приобрести необходимые базовые навыки, используемые при его дальнейшем обучении, но и сформировать компоненты своего мышления: уровень, кругозор и культуру. Всё это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности.

1 Элементы линейной и векторной алгебры

1.1 Матрицы

Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из элементов a_{ij} некоторого множества (элементов матрицы), $i = 1, 2, .., m$, $j = 1, 2, ..., n$, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При этом a_{ij} – элемент матрицы, который находится на пересечении i-той строки и j-того столбца матрицы A.

Мы будем в основном рассматривать матрицы, элементами которых являются действительные числа.

Две матрицы называются ***равными***, если они имеют одинаковые размеры и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой матрицы.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $(m = n)$, называется ***квадратной***. ***Порядком квадратной матрицы*** называется число её строк (столбцов).

Например: (2) – квадратная матрица 1-го порядка.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Любую нулевую матрицу обозначают буквой O.

Квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, а все остальные – нулю, называется ***единичной***. Любую единичную матрицу обозначают буквой E, при этом можно указывать размер матрицы как подстрочный коэффициент.

Например: $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 2-го порядка.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица 3-го порядка.

Операции над матрицами

Для того чтобы ***сложить две матрицы*** одинакового размера, надо сложить соответствующие элементы матриц-слагаемых. При этом получится матрица того же размера:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Для того чтобы ***умножить матрицу на число***, надо умножить на это число все элементы матрицы:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Матрицу $(-1)\cdot A$ будем называть ***матрицей, противоположной матрице A*** и обозначать $-A$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называют линейными операциями над матрицами. Рассмотрим свойства линейных операций над матрицами, размеры которых позволяют выполнять указанные операции.

Свойства линейных операций над матрицами

1. $A+B=B+A$.
2. $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$.
3. $A+O=A$.
4. $A+\left(-A\right)=O$.
5. $\lambda\left(A+B\right)=\lambda A+\lambda B,\ \lambda\in\mathbb{R}$.
6. $\left(\lambda+\mu\right)A=\lambda A+\mu A,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}$.
7. $1\cdot A=A$.
8. $\alpha\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)A=\beta\left(\alpha A\right)$, для всяких $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Замена каждой строки матрицы A её столбцом называется ***транспонированием***. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^{τ}.

Если задана матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то её транспонированная матрица имеет следующий вид:

$$A^{\tau}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Свойства операции транспонирования

1. $\left(A^{T}\right)^{T}=A$.
2. $\left(A+B\right)^{T}=A^{T}+B^{T}$ для всех $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$.
3. $\left(\lambda A\right)^{T}=\lambda A^{T}$.

Произведением $A \cdot B$ матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется новая матрица $C_{m\times k}$, каждый элемент которой c_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-того столбца, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-того столбца матрицы B, то есть

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}\ ,\ \ i = 1, 2,..,m\ ,\ \ j = 1, 2,...,k\ . \qquad (1.4)$$

Отсюда следует, что:
1) перемножать матрицы можно только в том случае, если число столбцов первого сомножителя равен числу строк второго сомножителя;
2) в общем случае умножение матриц не перестановочно.

Рассмотрим свойства операции умножения матриц, размеры которых позволяют выполнять указанные операции.

Свойства операции умножения матриц

1. Операция умножения матриц в общем случае не перестановочна.

2. Пусть $A_{m\times n}$, тогда E_m является для неё левой единицей, то есть $E_m A = A$, а E_n является для неё правой единицей, то есть $AE_n = A$.

3. $(A + B)C = AC + BC$ и $A(B + C) = AB + AC$.

4. $A(BC) = (AB)C$.

5. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. $(AB)^{\tau} = B^{\tau} A^{\tau}$.

Пример 1.1. Найти сумму матриц $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 8 & -3 \\ -7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. По формуле (1.1) найдём сумму матриц.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 8 & -3 \\ -7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Пример 1.2. Найти $A-2B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -4 & 8\\ 3 & -9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}$.

Решение.

$$A-2B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -4 & 8\\ 3 & -9\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -4 & 8\\ 3 & -9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -4\\ -6 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -4 & 12\\ 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Найти произведение матриц $A\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -4\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5 & 4\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 11 & -1 & 3 & 8\end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет размер 2×3, матрица B имеет размер 3×4. Тогда по определению произведения матриц существует матрица $C=A\cdot B$, размера 2×4, все элементы которой можно найти по формуле (1.4):

c_{11} – это сумма произведений соответствующих элементов первой строки матрицы A и первого же столбца матрицы B, то есть

$$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}=3\cdot(-1)+1\cdot 0+2\cdot 11=19;$$

c_{12} – это сумма произведений соответствующих элементов первой строки матрицы A и второго столбца матрицы B, то есть

$$c_{12}=a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}=3\cdot 7+1\cdot 2+2\cdot(-1)=21;$$

c_{13} – это сумма произведений соответствующих элементов первой строки матрицы A и третьего столбца матрицы B, то есть

$$c_{13}=a_{11}\cdot b_{31}+a_{12}\cdot b_{23}+a_{13}\cdot b_{33}=3\cdot 5+1\cdot(-2)+2\cdot 3=19;$$

c_{14} – это сумма произведений соответствующих элементов первой строки матрицы A и четвёртого столбца матрицы B, то есть

$$c_{14}=a_{11}\cdot b_{14}+a_{12}\cdot b_{24}+a_{13}\cdot b_{34}=3\cdot 4+1\cdot 1+2\cdot 8=29;$$

c_{21} – это сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы A и первого столбца матрицы B, то есть

$$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}=0\cdot(-1)+5\cdot 0+(-4)\cdot 11=-44;$$

c_{22} – это сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы A и второго столбца матрицы B, то есть

$$c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}=0\cdot 7+5\cdot 2+(-4)\cdot(-1)=14;$$

c_{23} – это сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы A и третьего столбца матрицы B, то есть

$$c_{23} = a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} = 0\cdot 5 + 5\cdot(-2) + (-4)\cdot 3 = -22;$$

c_{24} – это сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы A и четвёртого столбца матрицы B, то есть

$$c_{24} = a_{21}\cdot b_{14} + a_{22}\cdot b_{24} + a_{23}\cdot b_{34} = 0\cdot 4 + 5\cdot 1 + (-4)\cdot 8 = -27.$$

Тогда искомое произведение будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 21 & 19 & 29 \\ -44 & 14 & -22 & -27 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Найти A^2, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -28 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$.

Более подробно рассмотрено произведение матриц в примере 1.3.

Пример 1.5. Найти произведение матриц $A^{\tau}\cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^{\tau}\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$.

Более подробно рассмотрено произведение матриц в примере 1.3.

1.2 Определители

Определителем второго порядка (квадратной матрицы второго порядка) называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{matrix} + & - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{matrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}. \qquad (1.5)$$

Определителем третьего порядка (квадратной матрицы третьего порядка) называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{matrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

Замечание 1. Данная операция называется разложением определителя по первой строке. Аналогично, можно вычислить определитель 3-го порядка разложением по 2-й, 3-й строке (столбцу).

Замечание 2. Определители 4-го и более высоких порядков определяются аналогично определителю 3-го порядка.

Свойства определителей

1. Определитель всякой матрицы равен определителю транспонированной к ней матрицы.

2. Если две строки (столбца) определителя поменять местами, то определитель меняет знак.

3. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пример 1.6. Вычислить определители второго и третьего порядков

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. 1. Для вычисления первого определителя воспользуемся формулой (1.5):

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -10 \end{vmatrix}} \overset{-}{} = 2\cdot(-10)-(-3)\cdot 8 = -20+24 = 4.$$

Замечание. Можно сразу перемножать элементы по главной диагонали (по стрелочке), а затем элементы по другой диагонали, с учетом минуса (над числом «8»):

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -11 \end{vmatrix}} \overset{-}{} = -20+24 = 4.$$

2. Для вычисления второго определителя воспользуемся формулой (1.6):

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix}} \overset{-}{} \overset{+}{} = -1\cdot \overset{+}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} \overset{-}{} -1\cdot \overset{+}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} \overset{-}{} + 4\cdot \overset{+}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} \overset{-}{} =,$$

а затем формулой (1.4):

$$= -1(-4-12)-1(6+18)+4(-12+12) = -1(-16)-1(24)+4\cdot 0 = 16-24 = -8.$$

1.3 Системы линейных алгебраических уравнений

Система n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.7)$$

При этом a_{ij} $(i,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ – коэффициенты системы;

b_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – правые части, свободные члены;

x_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – неизвестные.

Упорядоченный набор чисел $\left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$ называется ***решением системы*** (1.17), если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Если существует хотя бы одно решение системы (1.17), то она называется ***совместной***, в противном случае – несовместной.

Система, имеющая более одного решения, называется ***неопределённой***.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все её решения. Существует несколько методов решения систем линейных уравнений.

Формулы Крамера

Определителем системы (1.17) называется определитель, составленный из коэффициентов системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.8)$$

При $\Delta \neq 0$ система (1.17) называется ***невырожденной*** и имеет единственное решение, которое можно найти по ***формулам Крамера***:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1, 2, .., n. \qquad (1.9)$$

В формулах (1.9) определители Δ_j называются вспомогательными и получаются из определителя Δ заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1.7. Решить систему линейных алгебраических уравнений, используя формулы Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для начала перепишем систему в виде (1.7) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$

Далее найдём определитель системы – определитель, составленный из коэффициентов системы:

$$\overset{+}{\Delta} = \begin{vmatrix} 2 & \overset{-}{3} \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow$$ система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Вычислим вспомогательные определители.

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ заменой 1-го столбца на столбец свободных членов:

$$\overset{+}{\Delta_1} = \begin{vmatrix} -1 & \overset{-}{3} \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ заменой 2-го столбца на столбец свободных членов:

$$\overset{+}{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 2 & \overset{-}{-1} \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1.$$

Тогда $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$.

Пример 1.8. Решить систему линейных алгебраических уравнений, используя формулы Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Для начала найдём определитель системы – определитель, составленный из коэффициентов системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 3(-4+15) - 4(2+10) - (3+4) = 33 - 48 - 7 = -22 \neq 0 \quad \Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычислим далее вспомогательные определители.

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ заменой 1-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= -(-4+15) - 4(2-15) - (3-6) = -11 + 52 + 3 = 44.$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ заменой 2-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= 3(2-15) + (2+10) - (-3-2) = -39 + 12 + 5 = -22.$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ заменой 3-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(6-3) - 4(-3-2) - (3+4) = 9 + 20 - 7 = 22.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{44}{-22} = -2,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-22}{-22} = 1,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{22}{-22} = -1.$

1.4 Векторы. Линейные операции над векторами

Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок прямой, характеризующийся длиной и направлением.

Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB (обозначаем $|\bar{a}| = |\overline{AB}|$).

Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нуль-вектором*** (обозначаем $\overline{O}$).

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** (обозначаем $\bar{a}_0$).

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых (рисунок 1.1), называются ***коллинеарными*** (обозначаем $\bar{a} \,||\, \bar{b}$).

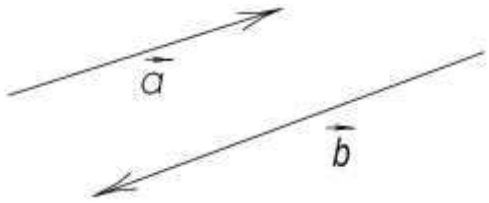


Рисунок 1.1 – Коллинеарные векторы

Векторы, лежащие на одной или параллельных плоскостях, называются ***компланарными.***

Два вектора называются ***равными***, если они имеют равные длины и являются сонаправленными.

Два вектора называются ***противоположными***, если они имеют равные длины и являются противоположно направленными.

Например. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB} = \overline{DC}$ и $\overline{AB} = -\overline{CD}$.

Замечание 1. Векторы несравнимы в смысле «больше», «меньше», что является обычным для отрезков.

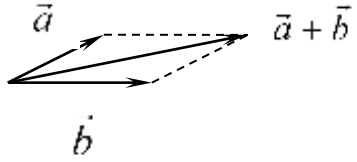
Замечание 2. Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любую точку пространства.

Линейные операции над векторами

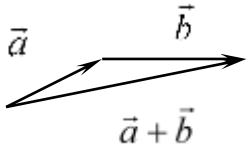
Линейными операциями с направленными отрезками (векторами) являются следующие операции:

1) сложение

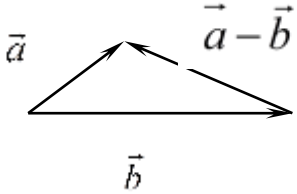
по правилу параллелограмма



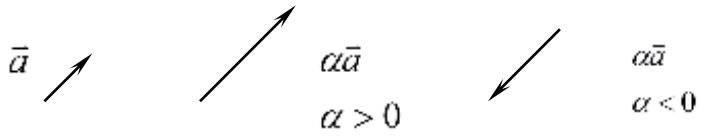
по правилу треугольника



2) вычитание



3) умножение на число



Можно сформулировать следующие теоремы и следствие:

Теорема 1. Ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число $\alpha \neq 0$ такое, что $\bar{a} = \alpha \cdot \bar{b}$.

Теорема 2. Каждый вектор равен произведению его длины на единичный вектор того же направления. $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}_0$.

Следствие. $\bar{a}_0 = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$.

Свойства линейных операций над векторами

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

3. $\bar{a} + \bar{O} = \bar{a}$ для любого вектора $\bar{a}$.

4. $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{O}$.

5. $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$ для любых $\lambda\in\mathbb{R}$ и любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

6. $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$ для любых чисел $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ и вектора $\bar{a}$.

7. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$.

8. Для любых чисел $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ и вектора $\bar{a}$ выполняется $(\lambda\mu)\bar{a}=\lambda(\mu\bar{a})$.

Пример 1.9. В параллелограмме *MNPL* (рисунок 1.2): *A* – точка пересечения диагоналей, *B* – середина *MN*, $\bar{a}=\overline{MB}$ и $\bar{b}=\overline{LA}$. Выразить вектор $\overline{ML}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

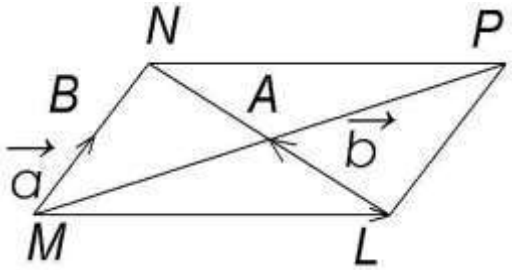


Рисунок 1.2 – Параллелограмм к примеру 1.9

Решение. Выразить вектор $\overline{ML}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это значит представить вектор $\overline{ML}$ в следующем виде: $\overline{ML}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$. Причём числа λ и μ не обязательно одновременно не равны нулю.

Поскольку при построении суммы и разности векторов мы используем треугольники, то на рисунке найдём треугольник, одной из сторон которого является вектор $\overline{ML}$, а две другие стороны мы либо знаем, либо можем легко выразить через известные векторы.

Таким треугольником является ΔMNL. В нём, по правилу сложения векторов, $\overline{ML}=\overline{MN}+\overline{NL}$, где векторы $\overline{MN}$ и $\overline{NL}$ мы легко можем найти.

Так как *B* – середина *MN* и векторы $\overline{MN}$ и $\overline{MB}$ сонаправлены, то $\overline{MN}=2\overline{MB}=2\bar{a}$.

Так как *A* – точка пересечения диагоналей, следовательно, *A* – середина *LN*. При этом векторы $\overline{NL}$ и $\overline{LA}$ противоположно направлены, тогда $\overline{NL}=-2\overline{LA}=-2\bar{b}$.

Окончательно получим:

$\overline{ML}=\overline{MN}+\overline{NL}=2\bar{a}+(-2\bar{b})$ или $\overline{ML}=2\bar{a}-2\bar{b}$.

1.5 Координаты вектора

Любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости. Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Если векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис в пространстве, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что выполняется $\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3$.

При этом тройка чисел $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ называется координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

Введём в пространстве прямоугольную систему координат *OXYZ* – три взаимно перпендикулярно направленные прямые, проходящие через некоторую точку *O*. Точку *O* назовём началом координат. Оси координат: *OX* – ось абсцисс; *OY* – ось ординат; *OZ* – ось аппликат. Единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, сонаправленные осям координат, образуют прямоугольный базис.

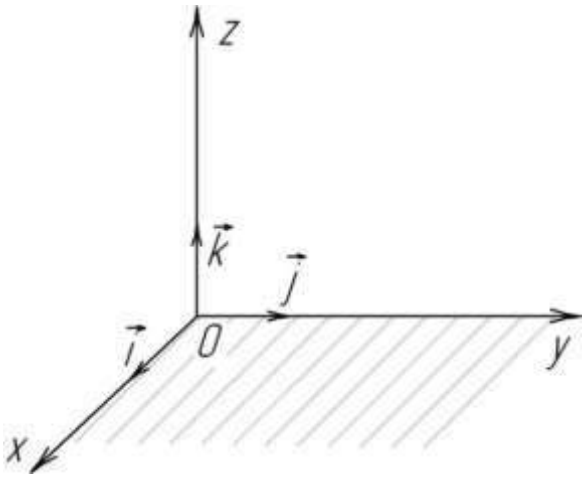


Рисунок 1.3 – Прямоугольная система координат

Любой вектор $\bar{a}$ можно представить в виде

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \qquad (1.10)$$

где числа $a_x = np_{OX}\bar{a}$, $a_y = np_{OY}\bar{a}$, $a_z = np_{OZ}\bar{a}$ – проекции вектора на оси координат – являются координатами вектора.

При этом пишут $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в координатах, то есть $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то линейные операции с векторами выполняются следующим образом:

1) сложение

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z); \tag{1.11}$$

2) вычитание

$$\bar{a}-\bar{b}=(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z); \tag{1.12}$$

3) умножение на число

$$\alpha\bar{a}=(\alpha a_x;\alpha a_y;\alpha a_z). \tag{1.13}$$

Если задан произвольный вектор $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, то его длина вычисляется по формуле

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.14}$$

Пусть известны координаты точек $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. Тогда координаты вектора $\overline{AB}$ определяются по формуле

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1). \tag{1.15}$$

Пусть даны произвольные точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, а точка C является серединой отрезка AB. Тогда координаты точки C находятся по формулам

$$x_C=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_C=\frac{y_1+y_2}{2},\ z_C=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{1.16}$$

Если заданы координаты векторов $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то условие их коллинеарности можно записать в виде

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{1.17}$$

Пример 1.10. Даны точки $M(3;-5;11)$, $A(7;13;-8)$, $K(-11;9;12)$. Найти координаты вектора $3\overline{MA}-4\overline{MK}$.

Решение. Найдём координаты векторов $\overline{MA}$ и $\overline{MK}$ по формуле (1.15):

$\overline{MA}=(7-3;13-(-5);-8-11)=(4;18;-19)$;

$\overline{PK}=(-11-3;9-(-5);12-11)=(-14;14;1)$.

Используем формулу (1.13) и найдём:

$3\overline{MA} = 3\cdot(4;18;-19) = (12;54;-57)$;

$4\overline{MK} = 4\cdot(-14;14;1) = (-56;56;4)$.

По формуле (1.12) окончательно получится

$$3\overline{MA} - 4\overline{MK} = (12;54;-57) - (-56;56;4) =$$
$$= (12-(-56);54-56;-57-4) = (68;-2;-61).$$

Пример 1.11. Найти длину вектора $4\bar{b} - 3\bar{a}$, если $\bar{a} = (-2;1;3)$ и $\bar{b} = (-1;0;2)$.

Решение. Найдём координаты вектора $4\bar{b} - 3\bar{a}$:

$4\bar{b} - 3\bar{a} = 4\cdot(-1;0;2) - 3\cdot(-2;1;3) = (-4;0;8) - (-6;3;9) = (2;-3;-1)$.

Используя формулу (1.14), получаем

$|4\bar{b} - 3\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$.

Пример 1.12. Выяснить, при каких значениях m и n векторы $\bar{a} = (-1;-2;m)$ и $\bar{b} = (n;1;4)$ будут коллинеарны.

Решение. Из условия коллинеарности векторов (1.17) следует

$\frac{-1}{n} = \frac{-2}{1} = \frac{m}{4}$, то есть $-\frac{1}{n} = -2$, $\frac{m}{4} = -2 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$, $m = -8$.

1.6 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют число, равное произведению длин данных векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\hat{\bar{a},\bar{b}}). \qquad (1.18)$$

Угол между векторами обозначим φ, тогда скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ примет вид

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (1.19)$$

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$.

2. $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$.

3. $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{c}$, $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$.

4. $\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)=\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\left(\lambda\bar{b}\right)$.

5. $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

6. Два любых ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Основные приложения скалярного произведения

1) вычисление работы A силы $\overline{F}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения B в положение C

$$A=\overline{F}\cdot\overline{BC};\qquad(1.20)$$

2) вычисление угла между векторами

$$\cos\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|};\qquad(1.21)$$

3) вычисление проекции одного вектора на другой

$$np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|};\qquad(1.22)$$

4) использование необходимого и достаточного условия перпендикулярности ненулевых векторов

$$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0.\qquad(1.23)$$

Скалярное произведение в координатах

Если известны координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть $\bar{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$; $\bar{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то скалярное произведение этих векторов вычисляется по формуле

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\qquad(1.24)$$

Пример 1.13. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}=3\bar{b}-\bar{a}$ и $\bar{d}=4\bar{a}+\bar{b}$, если $\bar{a}=\left(1;2;-3\right)$ и $\bar{b}=\left(-2;-1;5\right)$.

Решение. Найдём координаты векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ с использованием формул (1.11)–(1.13):

$\bar{c}=3\bar{b}-\bar{a}=3\left(-2;-1;5\right)-\left(1;2;-3\right)=\left(-6;-3;15\right)-\left(1;2;-3\right)=\left(-7;-5;18\right)$,

$\bar{d}=4\bar{a}+\bar{b}=4\left(1;2;-3\right)+\left(-2;-1;5\right)=\left(4;8;-12\right)+\left(-2;-1;5\right)=\left(2;7;-7\right)$.

Тогда, используя формулу (1.24), получаем

$\bar{c}\cdot\bar{d}=-7\cdot2-5\cdot7+18\cdot\left(-7\right)=-14-35-126=-175$.

Пример 1.14. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если $A(2;-3;1)$, $B(2;-1;4)$, $C(4;0;2)$, $D(5;-1;6)$.

Решение. Используя формулу (1.21), получаем

$$\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}.$$

1) Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ по формуле (1.15):

$\overline{AB}=(0;2;3)$, $\overline{CD}=(1;-1;4)$.

2) Найдём скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ по формуле (1.24):

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot4=10$.

3) Найдём длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ по формуле (1.14):

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{0^2+2^2+3^2}=\sqrt{0+4+9}=\sqrt{13},$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}.$$

4) Тогда $\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\frac{10}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{18}}=\frac{10}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{9\cdot2}}=\frac{10}{\sqrt{13}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{10}{3\sqrt{26}}\Rightarrow$

$$\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\arccos\frac{10}{3\sqrt{26}}.$$

Пример 1.15. При каком значении m векторы $\bar{a}=(5;-3;2)$ и $\bar{b}=(m;4;1)$ перпендикулярны?

Решение. Используем формулу (1.23): $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Найдём скалярное произведение векторов по формуле (1.24):

$\bar{a}\cdot\bar{b}=5\cdot m-3\cdot4+2\cdot1=5m-10.$

Приравняем последнее выражение нулю и получим:

$5m-10=0$ или $m=2.$

Пример 1.16. Найти работу силы $\bar{F}=(2;-5;8)$ по прямолинейному перемещению материальной точки из положения $M(3;-7;5)$ в положение $K(5;-6;2)$.

Решение. Работа силы вычисляется по формуле (1.20): $A=\bar{F}\cdot\overline{MK}$, где по формуле (1.15): $\overline{MK}=(2;1;-3)$.

Тогда работа силы $\bar{F}$ будет: $A=\bar{F}\cdot\overline{MK}=2\cdot2+(-5)\cdot1+8\cdot(-3)=-25.$

1.7 Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют новый вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) модуль вектора $\bar{c}$ равна произведению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними: $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть: $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ из конца вектора $\bar{c}$ виден против часовой стрелки (при этом говорят, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов).

Свойства векторного произведения

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.
2. $\lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\lambda \bar{a}\right) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(\lambda \bar{b}\right)$.
3. $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.

Векторное произведение в координатах

Пусть известны координаты векторов $\bar{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$; $\bar{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right)$. Тогда векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ определяем по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1.25)$$

Векторное произведение используется при вычислении площади параллелограмма и площади треугольника (эти формулы следуют непосредственно из определения векторного произведения векторов):

1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, численно равна

$$S_{\text{паралл}} = |\bar{a} \times \bar{b}|; \qquad (1.26)$$

2) площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, численно равна

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|. \qquad (1.27)$$

Пример 1.17. Вычислить $(3\bar{b}+\bar{a})\times(\bar{b}-2\bar{a})$, если $\bar{a}=3\bar{k}-\bar{i}$ и $\bar{b}=(1;1;2)$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.25). Для этого найдём сначала координаты векторов $3\bar{b}+\bar{a}$ и $\bar{b}-2\bar{a}$:

$\bar{a}=3\bar{k}-\bar{i} \Rightarrow \bar{a}=(-1;0;3)$,

$3\bar{b}+\bar{a}=3(1;1;2)+(-1;0;3)=(3;3;6)+(-1;0;3)=(2;3;9)$,

$\bar{b}-2\bar{a}=(1;1;2)-2(-1;0;3)=(1;1;2)-(-2;0;6)=(3;1;-4)$.

Тогда по формуле (1.25), получаем

$$(3\bar{b}+\bar{a})\times(\bar{b}-2\bar{a})=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(-12-9)-\bar{j}\cdot(-8-27)+\bar{k}\cdot(2-9)=-21\bar{i}+35\bar{j}-7\bar{k}.$$

Пример 1.18. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1;-3;2)$, $B(-2;-3;1)$, $C(0;4;5)$.

Решение. Площадь треугольника вычисляется по формуле (1.27):

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|,$$

где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – векторы, на которых построен треугольник (рисунок 1.4).

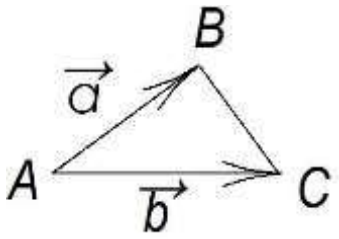


Рисунок 1.4 – Площадь треугольника

В нашем примере $\bar{a}=\overline{AB}=(-3;0;-1)$, $\bar{b}=\overline{AC}=(-1;7;3)$.

Тогда $S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$.

Найдём сначала векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \overset{+}{\bar{i}} & \overset{-}{\bar{j}} & \overset{+}{\bar{k}} \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{-1} \\ 7 & 3 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{-3} & \overset{-}{-1} \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{-3} & \overset{-}{0} \\ -1 & 7 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(0+7)-\bar{j}\cdot(-9-1)+\bar{k}\cdot(-21-0)=7\bar{i}+10\bar{j}-21\bar{k}\,.$$

Далее найдём модуль векторного произведения по формуле (1.14):

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{7^2+10^2+(-21)^2}=\sqrt{49+100+441}=\sqrt{590}\,.$$

Тогда площадь треугольника:

$$S_{\text{треуг}}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{590}\,.$$

1.8 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называют число, определяемое формулой $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Свойства смешанного произведения векторов

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.

2. $\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})=(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot(\lambda\bar{c})$.

3. $(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}==\bar{a}_1\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}_2\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$;

$\bar{a}\cdot(\bar{b}_1+\bar{b}_2)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}_1\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{b}_2\cdot\bar{c}$;

$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot(\bar{c}_1+\bar{c}_2)=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}_1+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}_2$.

4. При перестановке двух рядом стоящих сомножителей смешанного произведения его знак меняется на противоположный:

$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b}$.

5. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}$.

6. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$.

Смешанное произведение векторов в координатной форме

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\bar{c}=(c_x;c_y;c_z)$ то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.28)$$

Геометрический смысл смешанного произведения векторов заключается в том, что абсолютная величина смешанного произведения трёх некомпланарных векторов численно равна объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|=V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}.$$

Основные приложения смешанного произведения векторов

Из определения и геометрического смысла смешанного произведения векторов вытекают следующие условия и формулы:

1) условие компланарности векторов:

ненулевые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0; \qquad (1.29)$$

2) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен:

$$V_{\text{пар-да}}=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|; \qquad (1.30)$$

3) объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен:

$$V_{\text{приз}}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|; \qquad (1.31)$$

4) объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|. \qquad (1.32)$$

Пример 1.19. Принадлежат ли точки $M(2;3;-4)$, $N(7;4;-2)$, $P(5;6;-7)$ и $Q(4;7;-5)$ одной плоскости?

Решение. Точки *M*, *N*, *P* и *Q* принадлежат одной плоскости, если векторы $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ будут компланарны.

Найдём координаты векторов по формуле (1.15):

$\overline{MN}=(5;1;2)$; $\overline{MP}=(3;3;-3)$; $\overline{MQ}=(2;4;-1)$.

Проверим условие компланарности векторов (1.29). Для этого найдём смешанное произведение векторов $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ по формуле (1.28):

$$\overline{MN}\cdot\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & 3 & -3\\ 2 & 4 & -1\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=5(-3+12)-1(-3+6)+2(12-6)=54.$$

Так как $\overline{MN}\cdot\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=54\neq 0$, то векторы $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ не компланарны. Значит точки M, N, P и Q не лежат в одной плоскости.

Пример 1.20. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(3;-2;5)$, $B(2;3;-1)$, $C(4;-5;3)$ и $D(1;-1;7)$.

Решение. Объем пирамиды $ABCD$, построенной на трех некомпланарных векторах $\overline{AB}=(-1;5;-6)$, $\overline{AC}=(1;-3;-2)$ и $\overline{AD}=(-2;1;2)$, найдем по формуле (1.32): $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|$, где

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 5 & -6\\ 1 & -3 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}+(-6)\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-1(-6+2)-5(2-4)-6(1-6)=44.$$

Тогда $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\cdot 44=\frac{22}{3}$ (усл. куб. ед).

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей? Перечислите виды известных вам матриц.
2. Как найти сумму матриц, произведение матрицы на число?
3. Дайте определение произведения матриц. Какие должны быть размеры у этих матриц?
4. Как найти определитель третьего порядка?
5. Какие свойства определителей вам известны?
6. Дайте определение СЛАУ.
7. Запишите формулы Крамера. В каком случае их можно применять?
8. Дайте определения коллинеарных и компланарных векторов.
9. Как найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца?
10. Напишите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
11. Что вы можете сказать о соответственных координатах двух коллинеарных векторов?
12. Как найти длину вектора по его координатам?
13. Как найти скалярное произведение векторов?
14. Как найти угол между векторами?
15. Как найти площадь треугольника, построенного на двух векторах?

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Матрицы

1. Найти сумму матриц $A+B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти сумму матриц $2A+5B$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти разность матриц $3B-2C$, если $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 11 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

4. Найти разность матриц $B-2A^{\tau}$, если $A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 10 & -5\\ 3 & 16\end{pmatrix}$.

5. Найти произведение матриц $A\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

6. Найти произведение матриц $A^{\tau}\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

7. Найти определитель произведения матриц $B^{\tau}\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

8д. Найти сумму матриц $A+B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9д. Найти разность матриц $2A-B^{\tau}$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 7\\ 6 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

10д. Найти сумму матриц $2A+3B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

11.д. Найти произведения матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

12д. Найти произведения матриц $A\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

Определители

Вычислить определители:

13. $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 62 & -79 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

18д. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

19д. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

20д. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

21д. Найти определитель произведения матриц $A^{\tau} \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Системы линейных алгебраических уравнений

Решить системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера:

22. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6, \\ 5x + 2y = 7. \end{cases}$

23д. $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 3x + 5y = 21. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ -x + 3y - 2z = -3, \\ 3x + 2y - z = 3. \end{cases}$

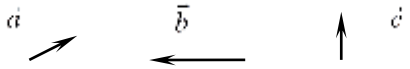
26д. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ x + 5y + 3z = 2, \\ 2x - y - 5z = -7. \end{cases}$

27д. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1, \\ x - 2y + 7z = 0, \\ 4x + 5y - 2z = 4. \end{cases}$

Линейные операции над векторами

28. Заданы векторы 

. Построить $2\bar{a}+\bar{b}$, $3\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}$.

29. Заданы векторы 

. Построить $\frac{1}{2}\bar{a}+\bar{c}$, $2\bar{b}-\bar{a}$, $3\bar{a}-2\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$.

30. В треугольнике ABC точка K – середина AB, точка P – середина BC, $\overline{AK}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AP}$.

31. В параллелограмме $ABCD$ точка P – середина AB, точка M – середина BC, $\overline{AC}=\bar{a}$, $\overline{CD}=\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AD}$, $\overline{AP}$, $\overline{MP}$, $\overline{PC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DM}$.

32. Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$.

Координаты вектора

33. Заданы векторы $\bar{a}=(-1;3;7)$, $\bar{b}=(2;-3;1)$. Найти $\bar{a}-\bar{b}$, $2\bar{b}+\bar{a}$, $3\bar{a}-4\bar{b}$.

34. Найти координаты и модуль вектора $\overline{AB}$, если $A(1;\ 3;-1)$, $B(3;\ 1;\ 0)$.

35. Даны точки $A(0;\ 2;-1)$, $B(1;\ 3;\ 3)$, $C(4;\ 2;\ 0)$. Найти координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $2\overline{CB}-\overline{AB}$.

36. Заданы векторы $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{k}-\bar{i}$. Найти длину вектора $3\bar{b}+\bar{a}$

37. Конец вектора $\bar{a}=(5;2;-2)$ совпадает с точкой $B(-4;\ 3;\ 1)$. Определить координаты начала вектора.

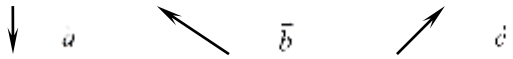
38. Найти координату z вектора $\bar{b}=(-5;1;z)$, если его длина равна $5\sqrt{3}$.

39. Дан вектор $\bar{a}=(2;-4;5)$. Найти единичный вектор $\bar{a}_0$.

40. Даны векторы $\bar{a}=(4;-12;2)$, $\bar{b}=(-1;3;-0{,}5)$. Проверить их коллинеарность. Установить какой из них и во сколько раз длиннее; как они направлены относительно друг друга.

41. Определить при каких значениях α и β векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если $\bar{a}=\alpha\bar{i}-2\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=(4;3;\beta)$.

42. Даны точки $A(7;\ 4;-1)$, $B(5;-6;\ 3)$, $C(8;\ 4;\ 1)$. Точка M – середина отрезка AB. Найти длину вектора $\overline{MC}$.

43д. Заданы векторы  . Построить: $3\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}-\frac{1}{2}\bar{b}$, $2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}$.

44д. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина CD, $\overline{AB}=\bar{p}$, $\overline{AD}=\bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ векторы $\overline{CM}$, $\overline{AM}$, $\overline{BM}$.

45д. В треугольнике ABC точка M – середина AC, точка P – середина BC, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{PM}$, $\overline{MB}$, $\overline{CB}$.

46д. Заданы векторы $\bar{a}=5\bar{k}-\bar{i}-3\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$. Найти $4\bar{b}-\bar{a}$, $2\bar{a}+5\bar{b}$.

47д. Даны точки $A(-2;\ 1;\ 3)$, $B(0;\ 3;-1)$, $C(1;\ 4;-2)$, $D(5;\ 0;\ 3)$. Найти $\overline{AC}+\overline{BD}$ и $\overline{AB}-2\overline{DC}$.

48д. Начало вектора $\bar{c}=(3;7;-2)$ совпадает с точкой $D(9;\ 1;-5)$. Определить координаты конца вектора.

49д. Найти координаты и модуль вектора $\overline{BD}$, если $B(1;-3;\ 2)$ и $D(-4;\ 6;\ 5)$.

50д. В треугольнике ABC найти длину медианы BM, если $A(2;-1;\ 0)$, $B(4;\ 7;\ 1)$, $C(-6;\ 5;\ 4)$.

51д. Определить при каких значениях x и z векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если $\bar{a}=(5;-2;z)$, $\bar{b}=(x;5;-6)$.

Скалярное произведение векторов

52. Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}$ и $\bar{a}\cdot(3\bar{b}+\bar{a})$, если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=7$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=60^0$.

53. Даны координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a}=(-4;1;3)$, $\bar{b}=(5;-2;8)$. Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}$ и $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+\bar{b})$.

54. Известны координаты точек A, C, D, M: $A(3;1;3)$, $C(0;7;-4)$, $D(2;0;-1)$, $M(3;6;-2)$. Вычислить $(\overline{AC}+\overline{DM})\cdot\overline{DC}$.

55. Найти проекцию вектора $\bar{a}=(1;3;-3)$ на вектор $\overline{AB}$, где $A(-2;7;3)$, $B(2;8;-2)$.

56. Заданы точки $A(-1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $C(1;5;-2)$, $D(0;-1;5)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}+\overline{DC}$ на вектор $\overline{AC}$.

57. Вычислить косинус угла между векторами $\bar{c}=2\bar{i}-5\bar{k}$ и $\bar{d}=(3;-1;1)$.

58. В треугольнике ABC заданы координаты вершин $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить внутренние углы при вершинах A и C.

59. При каком значении m векторы $\bar{a}=(6;0;-12)$ и $\bar{b}=(-8;9;m)$ будут взаимно перпендикулярны?

60. Проверить, будет ли треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(7;10;3)$ и $C(-1;3;1)$ прямоугольным.

61. Найти работу силы $\bar{F}=5\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M(4;-2;3)$ в точку $N(3;2;-1)$.

62. Найти вектор $\bar{c}$ коллинеарный вектору $\bar{b}=(-3;1;4)$, если $\bar{c}\cdot\bar{b}=78$.

63д. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}_1=3\bar{b}-\bar{a}$ и $\bar{c}_2=4\bar{a}+\bar{b}$, если $\bar{a}=(1;-1;0)$ и $\bar{b}=(1;-3;8)$.

64д. Заданы вершины треугольника ABC: $A(2;1;5)$, $B(1;3;2)$, $C(4;5;3)$. Вычислить косинус внутреннего угла B.

65д. Найти угол между векторами $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$, если $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

66д. Заданы точки $A(-2;4;0)$, $B(1;3;-5)$, $C(0;-1;1)$ и вектор $\bar{a}=3\bar{i}+10\bar{j}-5\bar{k}$. Вычислить скалярное произведение векторов $2\overline{AB}-3\overline{CA}$ и $\bar{a}+2\overline{AC}$.

67д. Найти проекцию вектора $\overline{CD}$ на вектор $\bar{b}$, если $C(2;1;-2)$, $D(-2;4;0)$ и $\bar{b}=(5;-2;5)$.

68д. Даны векторы $\bar{a}=m\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{b}=(6;m;-8)$. При каком значении m векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

69д. Вычислить работу, которую совершает сила $\bar{f}=6\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$ по прямолинейному перемещению материальной точки из положения $A(-4;1;0)$ в положение $C(2;-5;7)$.

70д. Найти координаты вектора $\bar{c}$, если он коллинеарен вектору $\bar{a}=(7;-5;2)$ и скалярное произведение его на вектор $\vec{b}=(2;3;-1)$ равно 9.

Векторное произведение векторов

71. Даны векторы $\bar{a}=(1;-5;2)$ и $\bar{b}=(1;1;-4)$. Вычислить $\bar{a}\times\bar{b}$, $(3\bar{a}+2\bar{b})\times(\bar{b}-\bar{a})$.

72. Заданы точки $A(1;0;-3)$, $B(-2;1;-1)$, $C(2;-1;0)$ и $D(3;-3;3)$. Найти векторное произведение векторов $\overline{AB}+3\overline{BC}$ и $\overline{DC}-\overline{AC}$.

73. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$ и $\bar{b} = (2; -1; 5)$ как на сторонах.

74. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(0; 2; -1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(-2; 2; -3)$.

75. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C, если $A(2; 3; 4)$, $B(4; 3; 2)$ и $C(1; 1; 1)$.

76д. Вычислить векторное произведение векторов $4\bar{b} - \bar{a}$ и $2\bar{b} + 3\bar{a}$, если $\bar{a} = 3\bar{k} - \bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 7\bar{j} + \bar{k}$.

77д. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известны три его вершины $A(1; 2; -2)$, $B(3; 2; -1)$, $C(0; 1; -2)$.

2 Аналитическая геометрия

В аналитической геометрии изучают геометрические фигуры с помощью метода координат. Причем рассматривают не только размеры фигур, но и их форму и положение. Основная идея аналитической геометрии проста: положение точки на плоскости можно описать двумя числами, следовательно, можно связать геометрию с алгеброй.

Равенство $f(x; y) = 0$ называется уравнением линии L в данной системе координат, если этому равенству удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии L.

2.1 Прямая на плоскости

Любое линейное уравнение двух переменных

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.1)$$

определяет прямую на плоскости, если A и B одновременно не обращаются в ноль. И наоборот, каждая прямая на плоскости определяется линейным уравнением.

При этом уравнение (2.1) называется ***общим уравнением прямой***.

Если $A = 0$, то $B \neq 0$, а уравнение (2.1) примет вид $By + C = 0 \Rightarrow By = -C \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ или

$y = b$ – ***уравнение горизонтальной прямой***, где $b = -\frac{C}{B}$.

Если $B=0$, то $A\neq 0$, а уравнение (2.1) примет вид $Ax+C=0 \Rightarrow Ax=-C \Rightarrow x=-\frac{C}{A}$ или

$x=a$ – ***уравнение вертикальной прямой***, где $a=-\frac{C}{A}$.

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси OX: $k=tg\alpha$ (рисунок 2.1).

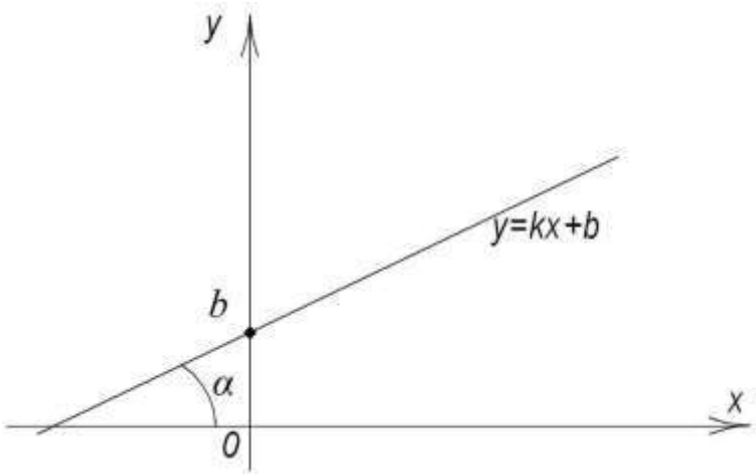


Рисунок 2.1 – Прямая с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом имеет вид

$$y=kx+b, \tag{2.2}$$

где

$$k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}. \tag{2.3}$$

Можно также показать, что величина b – это отрезок, «отсекаемый» прямой от оси OY.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{2.4}$$

где $M_0(x_0;y_0)$ – заданная точка, принадлежащая прямой;

k – угловой коэффициент прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{2.5}$$

где $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ – точки, через которые проходит прямая.

Угол между прямыми на плоскости

Пусть на плоскости заданы две прямые L_1 и L_2 уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, где $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ (рисунок 2.2).

Тогда угол φ между ними определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{2.6}$$

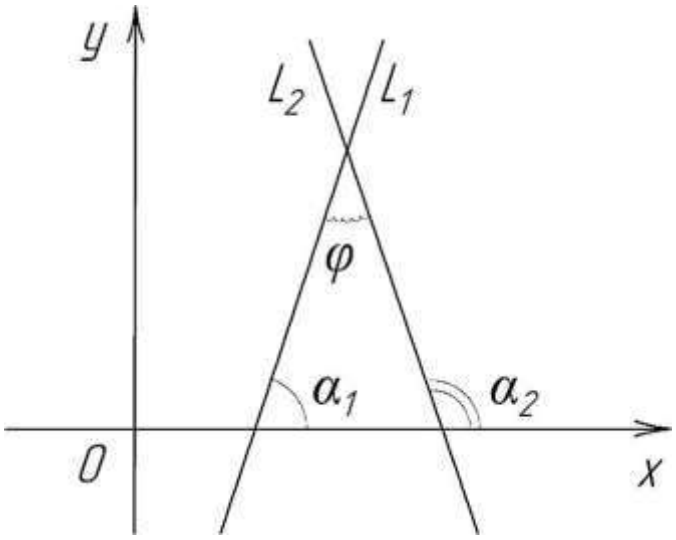


Рисунок 2.2 – Угол между прямыми на плоскости

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Если прямая L_1 параллельна прямой L_2, то их угловые коэффициенты равны, то есть

$$k_1 = k_2. \tag{2.7}$$

Если прямая L_1 перпендикулярна прямой L_2, то их угловые коэффициенты удовлетворяют условию

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{2.8}$$

Пример 2.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-7;\ 1)$ параллельно прямой $8x + 3y - 1 = 0$.

Решение. Обозначим заданную прямую L_1, а искомую – L_2.

Так как прямые параллельны, то по формуле (2.7) их угловые коэффициенты равны: $k_1 = k_2$.

Чтобы найти k_1 – угловой коэффициент заданной прямой L_1 воспользуемся формулой (2.3):

$$k = -\frac{A}{B},$$

где A и B – коэффициенты при x и y в уравнении $8x + 3y - 1 = 0$.

У нас $A = 8$, $B = 3$, тогда $k_1 = -\frac{8}{3} \Rightarrow k_2 = -\frac{8}{3}$.

Теперь применим формулу (2.4):

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где в качестве x_0, y_0 возьмём координаты точки $M(-7;\ 1)$, в качестве k возьмём $k_2 = -\frac{8}{3}$:

$$y - 1 = -\frac{8}{3}(x + 7) \quad \Big| \cdot 3;$$

$$3(y - 1) = -8(x + 7);$$

$$3y - 3 = -8x - 56.$$

Окончательно получим уравнение прямой L_2: $8x + 3y + 53 = 0$.

Пример 2.2. Составить уравнения прямой, проходящих через заданную точку $N(2; -3)$, перпендикулярно прямой $5x + 7y - 12 = 0$.

Решение. Обозначим заданную прямую L_1, а искомую – L_2.

Так как прямые перпендикулярны, то по формуле (2.7) их угловые коэффициенты удовлетворяют равенству $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Чтобы найти k_1 – угловой коэффициент заданной прямой L_1 воспользуемся формулой (2.3):

$$k = -\frac{A}{B},$$

где A и B – коэффициенты при x и y в уравнении $5x + 7y - 12 = 0$.

У нас $A = 5$, $B = 7$, тогда $k_1 = -\frac{5}{7} \Rightarrow k_2 = \frac{7}{5}$.

Теперь применим формулу (2.4):

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где в качестве x_0, y_0 возьмём координаты точки $M(-7;\ 1)$, в качестве k возьмём $k_2 = -\frac{8}{3}$:

$$y+3=\frac{7}{5}(x-2) \quad \Big| \cdot 5,$$

$$5(y+3)=7(x-2);$$

$$5y+15=7x-14.$$

Окончательно получим уравнение прямой L_2: $7x-5y-29=0.$

Пример 2.3 Даны координаты вершин треугольника $A(2;-3)$, $B(-2;4)$ и $C(5;2)$ (рисунок 2.3). Составить:

1) уравнение стороны BC;

2) уравнение высоты AH;

3) уравнение медианы BD.

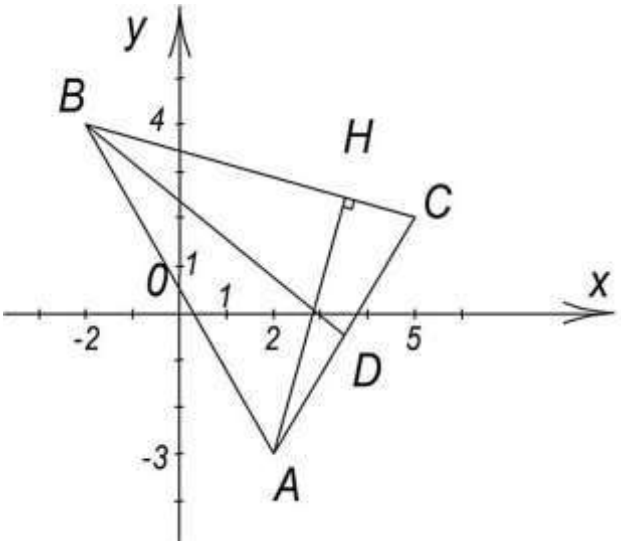


Рисунок 2.3 – Треугольник к примеру 2.3

Решение. 1. Уравнение стороны BC будем искать по формуле (2.5)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

в которую подставим координаты точек $B(-2;4)$ и $C(5;2)$:

$$\frac{x+2}{5+2}=\frac{y-4}{2-4};$$

$$\frac{x+2}{7}=\frac{y-4}{-2} \quad \Big| \cdot 14;$$

$$2(x+2)=-7(y-4).$$

Окончательно уравнение прямой AB будет иметь вид $2x+7y-24=0$.

2. Чтобы получить уравнение высоты CH, воспользуемся условием перпендикулярности прямых CH и AB по формуле (2.7): $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1.$

У нас $k_{AB} = -\frac{2}{7} \Rightarrow k_{CH} = \frac{7}{2}$.

Теперь применим формулу (2.4):

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где в качестве x_0, y_0 возьмём координаты точки $A(2;-3)$, в качестве k возьмём $k_{CH} = \frac{7}{2}$:

$$y + 3 = \frac{7}{2}(x - 2) \quad \Big| \cdot 2;$$

$$2(y + 3) = 7(x - 2);$$

$$2y + 6 = 7x - 14.$$

Окончательно уравнение высоты CH будет иметь вид $7x - 2y - 20 = 0$.

3. Для определения уравнения медианы BD найдем вначале координаты точки D, которая лежит на середине отрезка AC. Координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2};$$

$$y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Затем подставим в (2.52) координаты точек $B(-2;4)$ и $D\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{x - (-2)}{\frac{7}{2} - (-2)} = \frac{y - 4}{-\frac{1}{2} - 4};$$

$$\frac{x + 2}{\frac{11}{2}} = \frac{y - 4}{-\frac{9}{2}} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{99}{2}\right);$$

$$-9(x + 2) = 11(y - 4).$$

Тогда уравнение медианы BD будет иметь вид $9x + 11y - 26 = 0$.

Пример 2.4. Найти угол между двумя прямыми $L_1: 3x+2y+7=0$ и $L_2: 2x-6y-11=0$.

Решение. Угол φ между заданными прямыми найдём по формуле (2.6):

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты заданных прямых. Мы их найдём аналогично примеру 2.1 (пункт 1) из уравнений заданных прямых:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{3}{2};$$

$$k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2+9}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{6} : \frac{1}{2} = \frac{11}{3}.$$

Следовательно, угол между прямыми $\varphi = arctg\left(\frac{11}{3}\right)$.

2.2 Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, равная $2a$, $a > 0$ (рисунок 2.4).

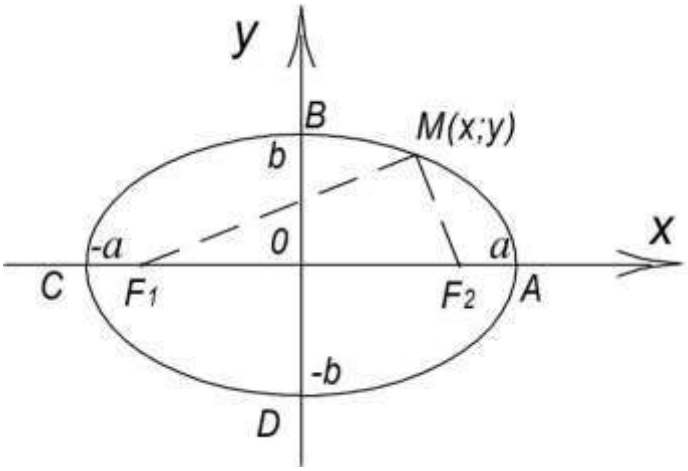


Рисунок 2.4 – Эллипс

Можно показать, что ***каноническое уравнение эллипса*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.9)$$

При этом точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы эллипса, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Замечание. Окружность с центром в начале координат можно рассматривать как частный случай эллипса.

2.3 Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, равная $2a$, $a>0$ (рисунок 2.5).

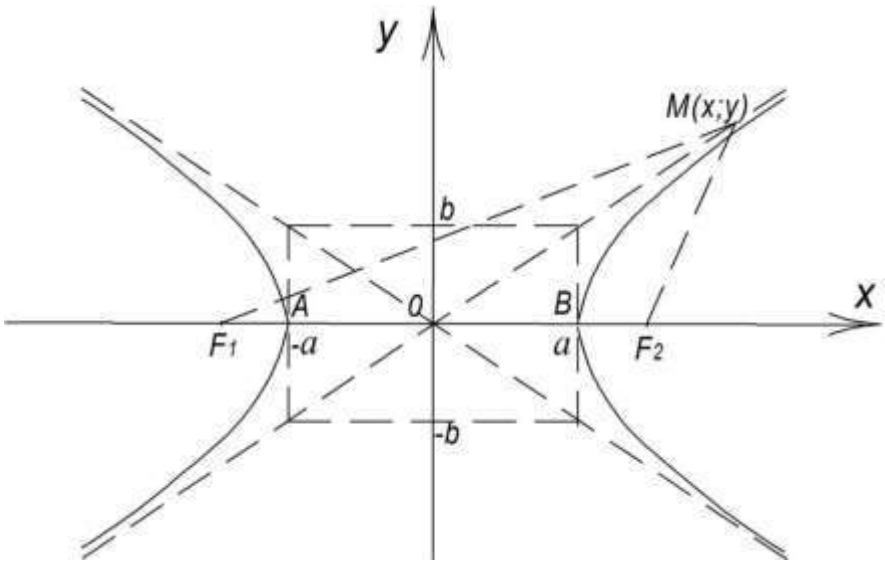


Рисунок 2.5 – Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2.10)$$

При этом точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Гипербола вида $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ имеет две асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Асимптотой кривой называют прямую, к которой бесконечно близко приближается кривая при неограниченном удалении от начала координат.

Гиперболу (рисунок 2.6) уравнение которой имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (2.11)$$

называют сопряженной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Её фокусы будут $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$.

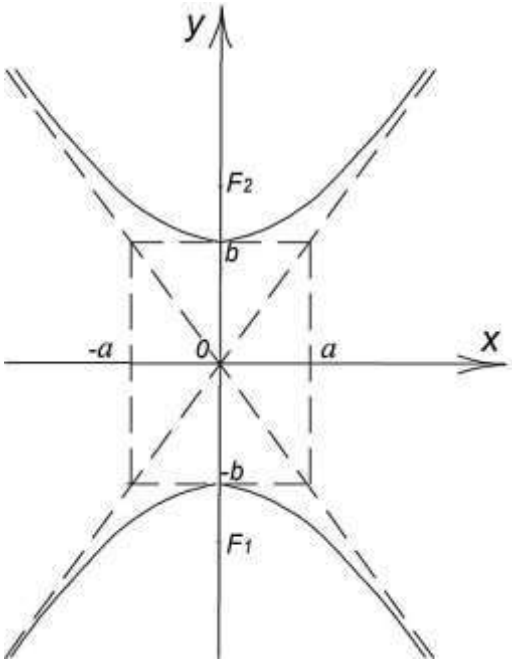


Рисунок 2.6 – Сопряженная гипербола

2.4 Парабола

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной прямой (называемой директрисой) и от заданной точки (называемой фокусом) (рисунок 2.7).

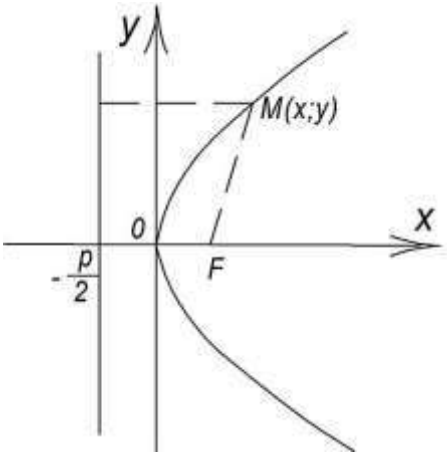


Рисунок 2.7 – Парабола вида $y^2=2px$

В зависимости от выбора системы координат ***канонические уравнения параболы*** могут иметь различные виды.

1 случай. $y^2 = 2px$, (2.12)

где фокус – $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$ (рисунок 2.7).

2 случай. $y^2 = -2px$, (2.13)

где фокус – $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, уравнение директрисы $x = \frac{p}{2}$ (рисунок 2.8).

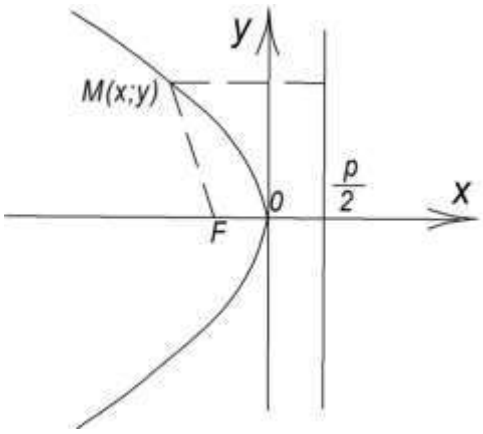


Рисунок 2.8 – Парабола вида $y^2 = -2px$

3 случай. $x^2 = 2py$, (2.14)

где фокус – $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы $y = -\frac{p}{2}$ (рисунок 2.9).

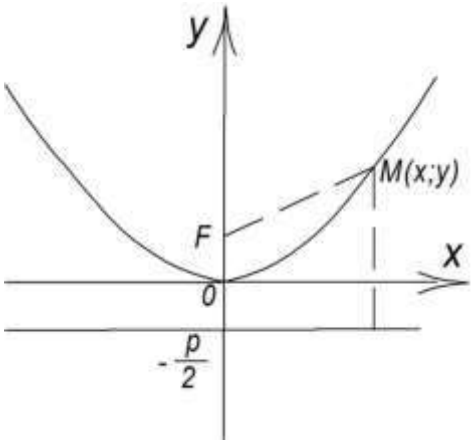


Рисунок 2.9 – Парабола вида $x^2 = 2py$

4 случай. $x^2 = -2py$, (2.15)

где фокус – $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы $y = \frac{p}{2}$ (рисунок 2.10).

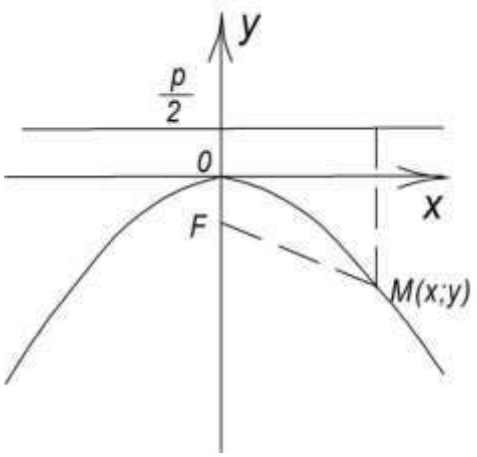


Рисунок 2.10 – Парабола вида $x^2 = -2py$

Пример 2.5. Даны уравнения кривых второго порядка:

а) $3x^2 + 6y^2 = 18$; б) $x^2 - 7y = 0$; в) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Найти: 1) для эллипса – полуоси, фокусы;

2) для параболы – параметр, фокус, уравнение директрисы;

3) для гиперболы – полуоси, фокусы, уравнения асимптот.

Построить эскизы кривых.

Решение.

а) $3x^2 + 6y^2 = 18$.

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, разделим обе части уравнения на 18 (чтобы в правой части было 1):

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Это уравнение описывает эллипс вида (2.9), поэтому $a^2 = 6$, $b^2 = 3$ $\Rightarrow$ полуоси будут равны $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$.

Фокусы эллипса – это точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $F_1\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{3}; 0\right)$ – фокусы эллипса.

Для построения эскиза эллипса на осях координат отметим вершины эллипса – точки $\left(\sqrt{6}; 0\right)$, $\left(-\sqrt{6}; 0\right)$, $\left(0; \sqrt{3}\right)$, $\left(0; -\sqrt{3}\right)$ (рисунок 2.11). Затем через эти точки пунктирной линией построим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и «впишем» в прямоугольник наш эллипс.

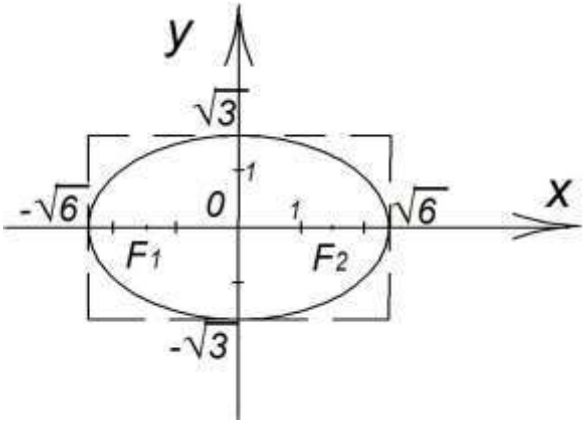


Рисунок 2.11 – Эллипс к примеру 2.5

б) $x^2 - 7y = 0.$

Перепишем уравнение в виде (2.14):

$x^2 = 7y.$

Это уравнение описывает параболу, ветви которой идут вверх.

Так как $2p = 7$, то параметр $p = \frac{7}{2}$.

Фокус параболы − точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right) \Rightarrow$ точка $F\left(0; \frac{7}{4}\right)$ является фокусом.

Уравнение директрисы $y = -\frac{p}{2} \Rightarrow$ прямая $y = -\frac{7}{4}$ является директрисой.

Строим эскиз параболы (рисунок 2.12).

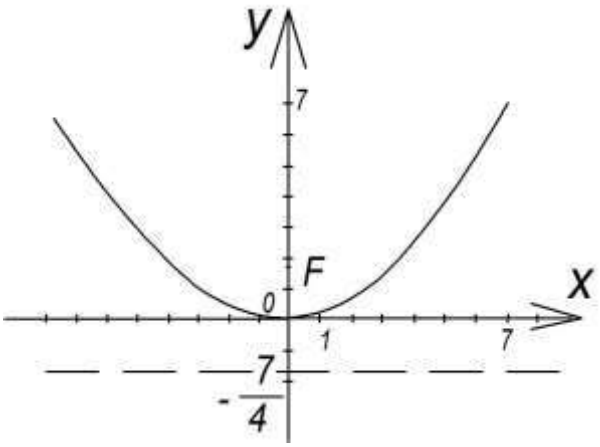


Рисунок 2.12 – Парабола к примеру 2.5

в) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Приведём уравнение к каноническому виду, для этого обе части уравнения разделим на 36 (чтобы в правой части была 1).

Получается $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Это уравнение описывает гиперболу вида (2.10), при этом $a^2 = 6$, $b^2 = 3$ $\Rightarrow$

1) действительная полуось – $a = \sqrt{9} = 3$, мнимая полуось – $b = \sqrt{4} = 2$;

2) точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, то есть $F_1\left(-\sqrt{13}; 0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{13}; 0\right)$ – фокусы гиперболы;

3) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ или $y = \pm\dfrac{2}{3}x$.

Для построения эскиза гиперболы на осях координат отметим точки (3; 0), (–3; 0) – вершины гиперболы и точки (0; 2), (0; –2) (рисунок 2.13). Через эти точки пунктирной линией построим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

Проведём диагонали прямоугольника, выходящие за его пределы (это асимптоты гиперболы), и «вписываем» гиперболу между асимптотами.

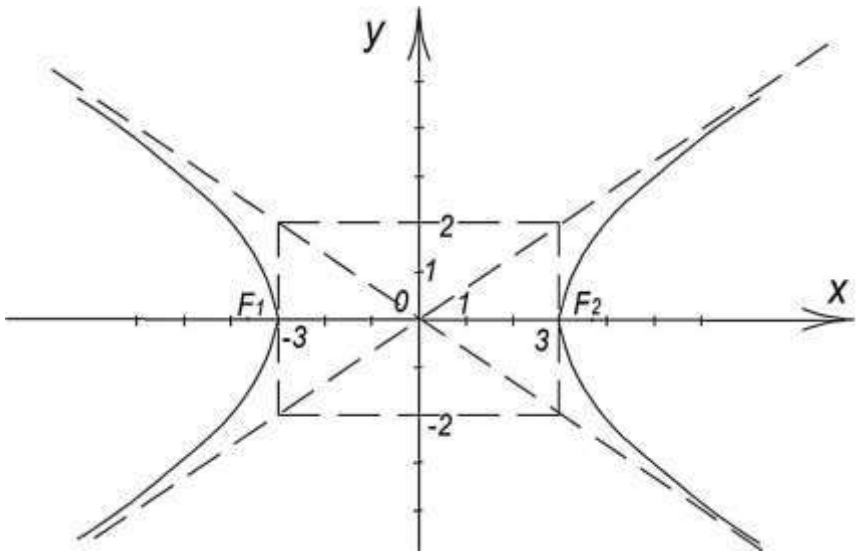


Рисунок 2.13 – Гипербола к примеру 2.5

Вопросы для самопроверки

1. Какие Вы знаете виды уравнений прямой на плоскости?
2. Как найти угол между двумя прямыми на плоскости?
3. Как выглядит условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости?
4. Запишите каноническое уравнение эллипса.
5. Запишите канонические уравнения гиперболы.
6. Запишите канонические уравнения параболы.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

78. Найти угловые коэффициенты прямых, параллельных и перпендикулярных данным:
    а) $7x-2y+3=0$; б) $3x+y-9=0$;
    в) $4x-y=0$; г) $2x+5y+1=0$.

79. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(-2;\ 2)$, одна из которых параллельна, а другая – перпендикулярна заданной прямой $x-3y+4=0$.

80. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $(5;\ 1)$ и $(3;\ 4)$.

81. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $K(-1;-3)$ и точку пересечения прямых $x+y-2=0$ и $x-2y+1=0$.

82. Для треугольника с вершинами $A(1;-4)$, $B(3;\ 2)$, $C(-3;\ 1)$ составьте уравнения: а) стороны AC; б) высоты, опущенной из вершины B на сторону AC; в) медианы, проведённой из вершины C.

83. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $3x+2y+9=0$ и $x-5y-1=0$.

84. При каком значении m прямые $3x+4y+11=0$ и $mx-3y-7=0$ перпендикулярны?

85. Точки $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(9;-1)$ – последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Написать уравнения сторон AB и CD.

86д. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(4;-7)$ параллельно и перпендикулярно прямой $2x+9y-11=0$.

87д. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-3;\ 4)$ и $A(2;\ 3)$.

88д. Вершины треугольника $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(7;\ 3)$. Найти уравнения стороны AB и высоты CD.

89д. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $7x-2y-6=0$ и $x+4y+5=0$.

Назвать и построить кривые второго порядка:

90. $8x^2+3y^2=24$.

91. $2x^2-6y^2=18$.

92. $x^2+4y^2=16$.

93. $3x^2-y=0$.

94. $y^2+4x=0$.

95. $5x^2-2y^2=10$.

96. $x^2+y^2-9=0$.

97. $x^2+5y=0$.

98. $2x^2+6y^2=36$.

99. $9x^2+16y^2=144$.

3 Введение в математический анализ

3.1 Множества и операции над ними

Под ***множеством*** понимается совокупность объектов, называемых элементами множества: $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называется ***подмножеством*** множества B.

Множества A и B называются ***равными*** ($A=B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Вспомним обозначения основных ***числовых множеств***: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ − множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел; $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Между множествами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ существует соотношение $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Способы задания множеств

1. Перечисление элементов.

Например: $A=\{2, 5, 7, 11\}$;

$A=\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}=\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

2. Если имеется некоторое основное множество E и свойство P, по которому мы будем выбирать элементы из множества E, то множество A обозначается $A=\{x\in E: P\}$.

Например: $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2+1=0\}=\varnothing.$

$A=\{x\in\mathbb{R}: x^2+1=0\}=\{-2,2\}.$

Вспомним ***определения числовых промежутков***.

Пусть $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, тогда

– ***отрезок*** – это множество $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$;

– ***интервал*** – это множество $(a;b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$;

в частности $(a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$ и $(-\infty;b)=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$;

– ***полуинтервал*** – это множество $[a;b)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$

либо $(a;b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$;

в частности $[a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\ge a\}$ и $(-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}: x\le b\}$.

Операции над множествами

Рассмотрим множества A и B одной природы.

1. Множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, называется ***объединением***: $A\cup B$ (рисунок 3.1 а).

2. Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A так и множеству B, называется ***пересечением***: $A\cap B$ (рисунок 3.1 б).

3. Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству B, но не принадлежат множеству A, называется ***разностью множеств*** B и A: $B\setminus A$ (из B удалены элементы множества A) (рисунок 1 в).

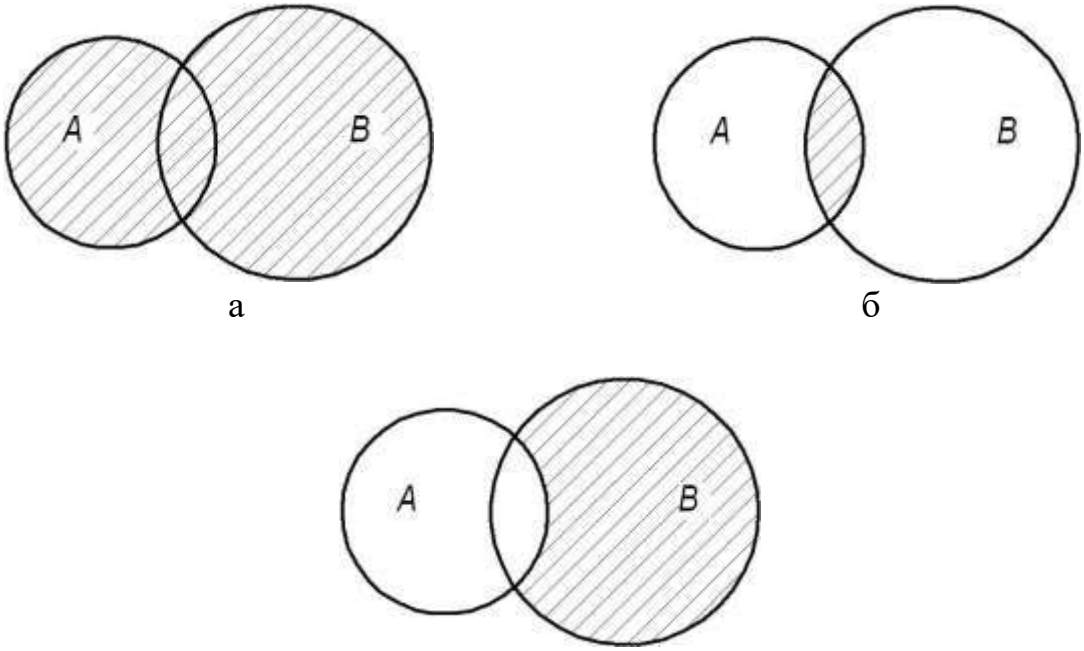
Пример 3.1. Пусть даны множества $A=[0;5]$ и $B=(1;10)$.

Тогда $A\cup B=[0;10)$; $A\cap B=(1;5]$; $B\setminus A=(5;10)$.

Пример 3.2. Пусть даны множества $A=\{-2,-1,0,3,5,7\}$; $B=\{-1,3,5,8,10,13\}$; $C=\{-3,-1,1,5,8,13\}$.

Тогда $A\cup B=\{-2,-1,0,3,5,7,8,10,13\}$; $(A\cup B)\cap C=\{-1,5,8,13\}$;

$A\setminus B=\{-2,0,7\}$.



а б

в

Рисунок 3.1 – Операции над множествами

3.2 Понятие функции одной переменной

Пусть X, Y – некоторые множества. Если каждому элементу x множества X можно поставить в соответствие по некоторому закону f единственный элемент y из множества Y, то говорят, что задана ***функция*** f, действующая из X в Y.

Часто функцию также называют ***отображением***, ***соответствием***, ***оператором***.

Функцию будем обозначать двумя способами:

- $y = f(x), \quad x \in X$ (читается «y есть функция от x»);
- $f: X \to Y$ (читается «f есть отображение множества X во множество Y» или «отображение f действует из X в Y»).

При этом $x \in X$ – аргумент функции, $y = f(x)$ – значение функции.

Множество X называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(f)$.

Множество значений функции – это множество значений, которые принимает функция в результате её применения. Таким образом, множеством значений функции называется подмножество множества Y вида $E(f)=\{y\in Y:\exists x\in X,\ y=f(x)\}$.

Тут $\exists$ – квантор существования – читается «существует», «найдётся»).

Пример 3.3. Найти область определения и множество значений функции $y=3\sqrt{x-4}+5$.

Решение. 1. Область определения данной функции определяется неравенством $x-4\geq 0$ или $x\geq 4$, то есть $D(y)=[4;\infty)$.

2. Чтобы найти множество значений функции, произведем оценку:

$\sqrt{x-4}\geq 0;$

$3\sqrt{x-4}\geq 0;$

$3\sqrt{x-4}+5\geq 5.$

Таким образом $E(y)=[5;\infty)$.

Функция $f:\ X\to Y$ называется ***числовой функцией***, если $X\subset\mathbb{R},\ Y\subset\mathbb{R}$

Если заданы прямоугольная система координат OXY и функция $y=f(x)$, то ***графиком функции*** $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x;\ f(x))$, где $x\in D(f)$.

Формула $y=f(x)$ определяет ***явный способ*** задания функции.

Однако во многих случаях приходится использовать неявный способ задания функции.

Пусть данная функция определена на множестве X. Тогда, если каждое значение $x\in X$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяют некоторому (одному и тому же) уравнению $F(x,y)=0$, то говорят, что эта ***функция задана неявно*** уравнением $F(x,y)=0$. Сама функция в этом случае называется неявной функцией.

Графиком уравнения $F(x,y)=0$ называется множество всех точек координатной плоскости OXY, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

В некоторых случаях мы рассматриваем параметрически заданные функции.

Пусть на некотором множестве $T\subset\mathbb{R}$ заданы две функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$. Тогда множество всех точек плоскости OXY с координатами $(x(t);\ y(t))$, где $t\in T$, называется ***кривой*** (или линией), ***заданной параметри-***

чески. Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то эта функция называется ***функцией, заданной параметрически***.

Композиция или суперпозиция функций

Пусть функция $f: X \subset R \to Y \subset R$, функция $\varphi: Y \to Z \subset R$.

Функция, действующая из множества X на множество Z по закону $z = \varphi(f(x))$ называется композицией (суперпозицией или сложной функцией) отображений φ и f, и обозначается $\varphi \circ f: X \to Z$, $z = \varphi(f(x))$.

Например. Пусть $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$;

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos x$;

$\varphi \circ f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\varphi \circ f = \cos(\log_2 x)$.

Постоянная, показательная, степенная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции называют простейшими элементарными функциями (основными элементарными). Функции, полученные из основных элементарных с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций, называются элементарными.

3.3 Предел функции

Понятие предела функции

Интервал $(a-\delta; a+\delta)$ называется δ***-окрестностью точки a*** и обозначается $U_\delta(a)$.

Проколотой δ***-окрестностью точки*** a называется δ-окрестность этой точки без самой точки a: $\overset{o}{U}_\delta(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\varepsilon)$.

δ***-окрестностью бесконечности*** называют множество всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $|x| > \delta$, то есть $U_\delta(\infty) = \{x \in \mathbb{R}: |x| > \delta\}$.

При этом δ-окрестности для $+\infty$ и $-\infty$ (рисунок 3.2) – это множества $U_\delta(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > \delta\}$ и $U_\delta(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x < -\delta\}$.



Рисунок 3.2 – δ-окрестности для $+\infty$ и $-\infty$

Пусть функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, $\forall \overset{o}{U}_\delta(a) \bigcap X \neq \varnothing$.

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке a (при $x \to a$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (в общем случае зависящее от ε) такое, что для всех $x \in \overset{o}{U}_\delta(a) \bigcap X$ соответствующие значения функции $f(x) \in U_A(\varepsilon)$.

При этом пишут $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Используя кванторы общности ∀ (читается как «для любого», «любой», «для всех») и существования ∃ (читается как «существует», «найдётся») определение предела функции можно записать следующим образом:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(a) \bigcap X \;\Rightarrow\; f(x) \in U_A(\varepsilon).$$

Знак ∀ − перевернутое A – первая буква слова All – все (англ.),
знак ∃ − перевернутое E – первая буква слова Exist – существовать (англ.).

Предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ определяется следующим образом:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(\infty) \bigcap X \;\Rightarrow\; f(x) \in U_A(\varepsilon).$$

При этом пишут $A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Аналогично определяются понятия пределов функции при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Односторонние пределы функции

Число A называется ***левым*** (***правым***) ***пределом функции*** $f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \varepsilon; a) \bigcap X \; (\forall x \in (a; a + \varepsilon) \bigcap X) \Rightarrow f(x) \in U_A(\varepsilon)$,

при этом пишут $A = \lim\limits_{x \to a - 0} f(x) \;\; \left(A = \lim\limits_{x \to a + 0} f(x) \right)$.

Замечание. При рассмотрении односторонних пределов в точке $a = 0$, достаточно писать $x \to -0$ или $x \to +0$.

Например. Рассмотрим функцию $\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

И найдём её односторонние пределы в точке $x = 0$.

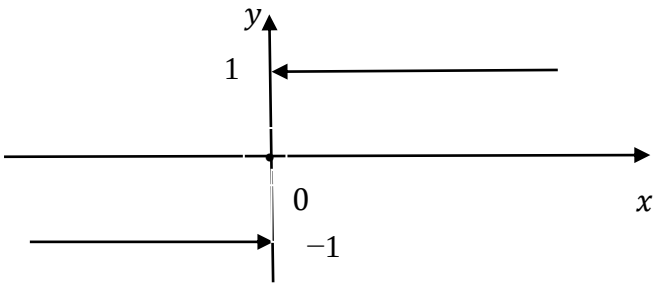


Рисунок 3.3 – График функции $\operatorname{sign} x$

Данная функция (рисунок 3.3) имеет односторонние пределы в точке $x = 0$, причём $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1$.

Теорема 1. Условие существования предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке a необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали равные односторонние пределы, причём $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Правила вычисления пределов

Можно показать, что $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где $C = const$; $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} C\, f(x) = C \lim_{x \to a} f(x), \text{ где } C = const,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Пример 3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-1}{4x+7}$.

Решение. Применим свойства пределов:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-1}{4x+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+3x-1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(4x+7\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}(-1)}{\lim\limits_{x\to 2}4x+\lim\limits_{x\to 2}7}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-1}{4\lim\limits_{x\to 2}4x+7}=\frac{2\cdot 2^2+3\cdot 2-1}{4\cdot 2+7}=\frac{13}{15}.$$

Отсюда следует следующее правило вычисления пределов.

Правило 1. Чтобы вычислить предел функции при $x\to a$, нужно в функцию вместо x подставить её предельное значение.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$

Следствие: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1.$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** (***б.м.***) вблизи точки a (при $x\to a$), если $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** (***б.б.***) вблизи точки a (при $x\to a$), если для любого сколь угодно большого числа M, найдется число $\delta>0$ (в общем случае зависящее от M) такое, что для всех $x\in\overset{o}{U}_{\delta}(a)$ соответствующие значения функции $|f(x)|>M$.

При этом пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Если бесконечно большая функция в окрестности рассматриваемой точки сохраняет положительный (отрицательный) знак, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty\right)$.

Пример 3.5. Найти пределы функции $f(x)=e^x$ в точках $x=0$, $x=2$, а также при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Решение. Воспользуемся свойствами функции $f(x)=e^x$ (рисунок 3.4):

$\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$, $\lim\limits_{x\to 2} e^x=e^2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

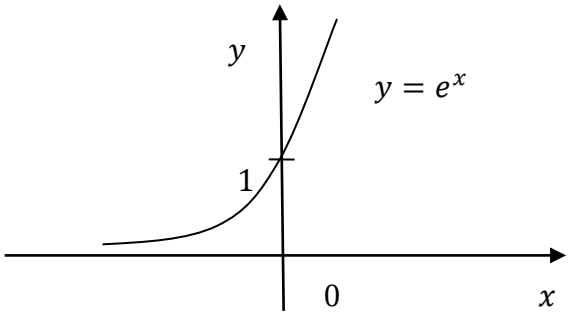


Рисунок 3.4 – График экспоненты

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма бесконечно малых вблизи точки *a* (при $x\to a$) функций есть бесконечно малая функция в рассматриваемой точке.

2. Произведение бесконечно малых вблизи точки *a* (при $x\to a$) функций есть бесконечно малая функция в рассматриваемой точке.

3. Произведение бесконечно малой функции вблизи точки *a* (при $x\to a$) на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая в рассматриваемой точке.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***) на отрезке $[a;b]$, если найдется такое число $C(c)$, что будет выполнено неравенство $f(x)<C$ $(f(x)>c)$.

Функция, ограниченная и сверху и снизу на отрезке $[a,b]$, называется ограниченной на этом отрезке.

Теорема 2. Условие существования предела функции.

Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке a, равный A, необходимо и достаточно, чтобы в точке a функция $f(x)$ имела следующее представление: $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция вблизи точки a (при $x\to a$).

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to a$ есть неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ или ∞.

Раскрыть неопределённость – это значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно малые функции вблизи точки a (при $x\to a$).

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ называют ***эквивалентными б.м.***

При этом пишут $f(x)\sim\varphi(x)$ при $x\to a$.

В случае неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ можно применять ***правило эквивалентного перехода***: при рассмотрении предела произведения или отношения бесконечно малых в одной и той же точке функций, эти функции можно заменять их эквивалентными вблизи точки рассмотрения, не изменив существования и величины предела.

Опираясь на замечательные пределы и следствия из них, можно привести примеры следующих эквивалентных бесконечно малых:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$;
2. $tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$;
3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$;
4. $arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$;
5. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$;
6. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

Пример 3.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{arctg}2x}{\sin^2 5x}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=0$ и получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg}2x}{\sin^2 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow$$

Применим правило эквивалентного перехода: заменим бесконечно малые функции на им эквивалентные, для этого учитываем, что

$$\operatorname{arctg}2x\sim 2x,\ \sin^2 5x\sim(5x)^2 \text{ при } x\to 0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 2x}{(5x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{25x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{25}=\frac{6}{25}.$$

Пример 3.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{\sin(2x-1)}{\operatorname{arctg}(8x-4)}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=0{,}5$ и получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 0,5}\frac{\sin(2x-1)}{\operatorname{arctg}(8x-4)}=\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow$$

Применим правило эквивалентного перехода: заменим бесконечно малые функции на им эквивалентные, у нас в примере

$$\sin(2x-1)\sim(2x-1),\ \operatorname{arctg}(8x-4)\sim 8x-4 \text{ при } x\to 0{,}5$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0,5}\frac{2x-1}{8x-4}=\lim_{x\to 0,5}\frac{2x-1}{4(2x-1)}=\lim_{x\to 0,5}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Раскрытие некоторых видов неопределенностей

Бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой: если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая. И наоборот, если $\varphi(x)$ – бесконечно малая в точке a функция, и она определена в некоторой проколотой окрестности этой точки, то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ – бесконечно большая в точке a функция.

Пример 3.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{7x^2-x+8}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{7x^2-x+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

В числителе и знаменателе рассматриваемой функции мы видим многочлены. Вынесем за скобки старшие степени числителя и знаменателя:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)}=$$

Так как $x\to\infty$ (то есть $x-$ бесконечно большая), то $\dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая. Значит $\dfrac{1}{x}\to 0$, тогда

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{7x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{7}=\frac{3}{7}.$$

На этом примере можно убедиться в верности ***правила старших степеней***: если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются многочленами, то для раскрытия неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ при $x\to\infty$ достаточно найти предел отношения их старших степеней.

Пример 3.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x+2x^2}{8x^2-3x+9}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x+2x^2}{8x^2-3x+9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

А дальше найдём предел отношения старших степеней числителя и знаменателя:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{8}=\left(\frac{\infty}{8}\right)=\infty.$$

Пример 3.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{3x^2-13x-10}$.

Решение. Подставим вначале в данное выражение предельное значение аргумента $x=5$, однако получим неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{3x^2-13x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow$$

Для раскрытия данной неопределённости можно числитель и знаменатель разложить на произведение простых множителей, для этого в числителе можно применить формулу «разность квадратов»:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

а в знаменателе формулу разложения квадратного трехчлена на произведение линейных множителей:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена.

Найдём корни квадратного трехчлена, для этого решим уравнение

$3x^2-13x-10=0$.

$D=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot 3\cdot(-10)=169+120=289=17^2$;

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-(-13)\pm\sqrt{289}}{2\cdot 3}=\dfrac{13\pm 17}{6}$;

$x_1=\dfrac{13+17}{6}=\dfrac{30}{6}=5$;

$x_2=\dfrac{13-17}{6}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}$.

Тогда $3x^2-13x-10=3(x-5)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(x-5)(3x+2)$, значит

$$\Rightarrow\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(3x+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{3x+2}=\left(\frac{10}{17}\right)=\frac{10}{17}.$$

Для раскрытия неопределённостей вида $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$ необходимо преобразовать их к неопределённостям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 3.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Решение. Подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=3$ и получим неопределённость вида $(\infty-\infty)$:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{6}{0}\right)=(\infty-\infty)\Rightarrow$$

Чтобы раскрыть такую неопределенность, мы приведем дроби к общему знаменателю и найдем их разность:

$$\Rightarrow\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{1(x+3)-6}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

Пример 3.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}-2x^2\right)$.

Решение. Подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость вида $(\infty-\infty)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}-2x^2\right)=(\infty-\infty)\Rightarrow$$

Для избавления от неопределённости в случае, когда функция содержит иррациональное выражение, домножим и разделим её на сопряженное знаменателю:

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}-2x^2\right)\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}\right)^2-\left(2x^2\right)^2}{\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+2-4x^4}{\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\Rightarrow$$

Дальше применим правило старших степеней. Чтобы найти старшую степень знаменателя, возьмём отдельно старшую степень корня:

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Пример 3.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x+6}{\sqrt{3-x}-3}$.

Решение. Вначале подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=-6$, однако получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to -6}\frac{x+6}{\sqrt{3-x}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)\Ominus$$

Для раскрытия такой неопределённости применим тот же прием, что и в примере 3.11, то есть числитель и знаменатель дроби домножим на сопряженное знаменателю.

$$\Ominus\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}-3\right)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}=\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-3^2}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-3^2}=\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{3-x-9}=\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{-x-6}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{-(x+6)}=\lim_{x\to -6}\frac{\sqrt{3-x}+3}{-1}=\left(\frac{6}{-1}\right)=-6.$$

3.4 Непрерывные функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x=x_0$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если существует предел функции в точке x_0, равный значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной справа*** (***слева***) ***в точке*** x_0, если существует правый (левый) предел функции в точке x_0, равный значению функции в этой точке.

Функция $f(x)$ называется

- ***непрерывной в интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала;
- ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$ и непрерывна справа и слева в точках a и b соответственно.

Геометрический смысл непрерывности функции на числовом промежутке состоит в том, что график этой функции является непрерывной линией на данном промежутке.

Например: 1) функция $f(x)=x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$;

2) функция $g(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, но не является непрерывной на $\mathbb{R}$ (рисунок 3.5).

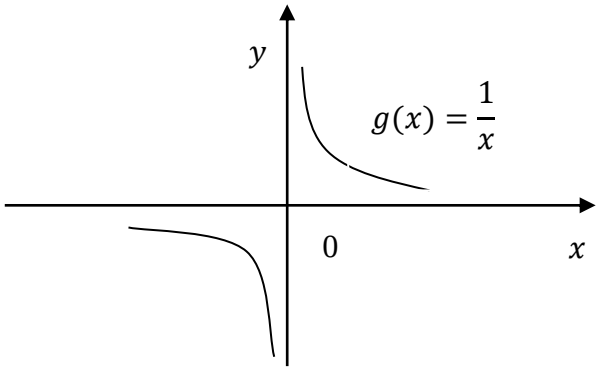


Рисунок 3.5 – График функции $g(x)=\frac{1}{x}$

Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема 1. Об ограниченности на отрезке непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений, то есть существуют такие точки $x_m,\ x_M \in [a;b]$, что $f(x_m)=m,\ f(x_M)=M$.

Теорема 3. Функция, непрерывная на отрезке, принимает все значения, заключенные между её наименьшим и наибольшим значениями, то есть если $\mu:\ m\le\mu\le M$, то найдется $x_\mu\in[a;b]$, такое что $f(x_\mu)=\mu$.

Точки разрыва функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=x_0$ и, может быть, в самой точке x_0.

Определение. Точка $x=x_0$, в которой функция $f(x)$ не является непрерывной, называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Различают два типа разрывов функции в точке.

Разрыв первого рода

Точка $x = x_0$ называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные односторонние пределы.

Разрыв первого рода называется устранимым, если односторонние пределы совпадают. Разрыв первого рода называется неустранимым, если односторонние пределы не совпадают.

Пример 3.14. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Область определения данной функции: $x \neq 0$ или $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

То есть функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$, но определена в любой проколотой окрестности этой точки. Значит, в точке $x = 0$ функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не является непрерывной.

Найдём односторонние пределы функции в точке $x = 0$, используя первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно, точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода.

Этот разрыв можно устранить, доопределив функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ значением $= 1$.

То есть определим функцию $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$

Такая функция $f_1(x)$ будет непрерывна на всей числовой оси.

Пример 3.15. Найти точки разрыва функции $f(x) = \operatorname{sign}(x)$.

Решение. Область определения данной функции: $D(f) = \mathbb{R}$.

При этом односторонние пределы функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1, \quad \lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1,$$

значит, точка $x = 0$ является точкой разрыва 1-го рода.

Разрыв 2-го рода

Точка $x = x_0$ называется точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$ если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности, равен бесконечности).

Пример 3.16. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{1}{x}$.

Решение. Область определения заданной функции: $x \neq 0$ или $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

То есть функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$, но определена в любой проколотой окрестности этой точки. Значит, в точке $x = 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является непрерывной.

Найдём односторонние пределы функции в точке $x = 0$ (рисунок 3.5):

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода.

3.5 Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается уходящая в бесконечность ветвь графика функции.

Мы будем различать вертикальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ или один из односторонних пределов, то есть $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$. Следовательно, значения a следует искать среди точек разрыва второго рода данной функции.

Уравнения наклонных асимптот имеют вид

$$y = kx + b, \text{ где } k_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right). \tag{3.1}$$

При $x \to +\infty$ наклонная асимптота называется правой (правосторонней), при $x \to -\infty$ наклонная асимптота называется левой (левосторонней).

Для рациональных функций левая и правая наклонные асимптоты к их графикам (если они существуют) совпадают, то есть $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

Если при вычислении k или b хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то наклонных асимптот нет.

Пример 3.17. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{3x^2}{x+5}$.

Решение. 1. Область определения функции $D(f)$: $x\neq -5$ или $D(f)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$.

2. Найдем вертикальную асимптоту графика функции. Из определения вертикальной асимптоты следует, что она может проходить в точке $x=-5$. Поверим это:

$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3x^2}{x+5}=\infty \;\Rightarrow$ прямая $x=-5$ является вертикальной асимптотой графика функции.

3. Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Рассматриваемая функция является рациональной, поэтому $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$ (если они существуют).

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{(x+5)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x}=3,\text{ тогда}$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{x+5}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-15x}{x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-15x}{x}=15.$$

Таким образом, график рассматриваемой функции имеет наклонную асимптоту $y=3x-15$ при $x\to\pm\infty$.

Пример 3.18. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2+4}$.

Решение. 1. Так как выражение, стоящее в знаменателе формулы, задающей функцию $x^2+4>0$ при любых действительных значениях x, то область определения функции – множество всех действительных чисел, то есть $D(f)=\mathbb{R}$ или $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то график функции не имеет вертикальных асимптот.

3. Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Рассматриваемая функция является рациональной, поэтому $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$ (если они существуют).

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{\left(x^2+4\right)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{x}=0.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y=x$ при $x\to\pm\infty$.

Пример 3.19. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{x^2+1}$.

Решение. 1. Область определения функции – множество всех действительных чисел, то есть $D(f)=\mathbb{R}$ или $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то график функции не имеет вертикальных асимптот.

3. Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Рассматриваемая функция не является рациональной, поэтому будем находить отдельно k_1 и k_2, b_1 и b_2.

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1,\ \text{тогда}$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Таким образом, график функции имеет наклонные асимптоты $y = x$ при $x \to +\infty$ и $y = -x$ при $x \to -\infty$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции. Что называется областью определения функции?
2. Какие способы задания функции вы знаете?
3. Какие функции называются элементарными?
4. Дайте определение понятия предела функции.
5. В каком случае функция называется бесконечно малой?
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
7. Дайте определение непрерывности функции в точке.
8. Укажите основные свойства непрерывных функций.
9. Дайте определения асимптот графика функции.
10. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Множества и операции над ними

100. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{-4, -1, 0, 3, 4, 7, 8\}$.
Найти: а) $A \cap B$; б) $A \cup C$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus (A \cap C)$; д) $A \cap B \cap C$.

101. Даны множества $A = (-7; 3]$, $B = [-1; 5]$, $C = [-10; 1)$. Найти $(A \cap C) \setminus B$.

102. Даны множества $A = \{-9, -6, -2, 1, 3, 6, 10, 11\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 3, 6, 8, 10, 15\}$. Найти: а) $A \cap C$; б) $B \setminus C$; в) $C \setminus (A \cap B)$.

103. Даны множества $A = \{x \in R : -3 < x < 6\}$, $B = \{x \in N : 2 < x < 8\}$.
Найти: а) $A \cap B$; б) $B \setminus A$.

104д. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$. Найти $(A \setminus B) \cap C$.

105д. Даны множества $A=\{x\in N: x<15\}$, $B=\{x\in R: 2<x\le 7\}$. Найти $A\cap B$.

106д. Даны множества $A=[-2;4)$, $B=(-5;1)$, $C=[2;7]$.

Найти: а) $A\cup B$; б) $B\cap C$; в) $A\setminus C$.

107д. Даны множества $A=(-7;2)$, $B=(-11;-1]$. Найти: а) $A\cup B$; б) $A\cap B$.

Понятие функции одной переменной

Найти область определения функций:

108. $y=\log_2(3-x)+\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}}$.

109. $y=\sqrt[4]{8-|x|}$.

110д. $y=\lg(5x-x^2-6)$.

111д. $y=\sqrt{7-3x}+\lg x$.

Найти область значений функций:

112. $y=7-5\sin 3x$.

113. $y=8^{x^2}+1$.

114д. $y=6\cos x+2$.

115д. $y=x^2-4x-2$.

Найти область определения и область значений функций:

116. $y=8^{\log_5(1-x^2)}$.

117. $y=11-4\sqrt{6x+3}$.

118д. $y=2\sqrt{x+3}-7$.

119д. $y=\sqrt{4-x^2}$.

Найти множества, на которое данные функции отображают множество X:

120. $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $X=\left[\dfrac{1}{9};27\right]$.

121. $y=2^{3x-1}$, $X=[0;2]$.

122д. $y=x^2$, $X=[-3;0{,}5]$.

123д. $y=\sqrt[3]{3x+1}$, $X=[-3;0]$.

124. Найти $f(0)$, $f(4)$, $f(-1)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, если $f(x)=\dfrac{9}{2x+1}$.

125. Найти $f(-2)$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$, если $f(x)=3\sqrt{x^2+5}$.

126. Найти $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(6)$, если

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & при \quad x<0,\\ 3x^2+1 & при \quad 0\le x\le 3,\\ 5-x & при \quad x>3. \end{cases}$$

127д. Найти $f(1)$, $f(2)$, $f(10)$, $f\left(\dfrac{2}{5}\right)$, если $f(x)=2x^2-\dfrac{12}{\sqrt{5x-1}}$.

128д. Найти $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(-1{,}5)$, если

$$f(x)=\begin{cases}9-x \ \ при \ \ x<-1,\\ 2x^2+3 \ \ при \ \ x\ge -1.\end{cases}$$

Предел функции

Вычислить указанные пределы:

129. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

130. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-x^2+3}{x^2+2x+1}$.

131. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+4x}{x^2+x-2}$.

132. $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\dfrac{2x^2+13x-7}{8x-4}$.

133. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{4x^2+5x-7}$.

134. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x-x^2+3}{2x^2+2x-5}$.

135. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7x+10}{4x+x^3-2}$.

136. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x^3-7x+5}{3x+5x^2-3}$.

137. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(3x^3-4x\right)(2x+1)^2}{\left(4x^2-3x\right)(7-x)^3}$.

138. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(7x+2x^2\right)\left(5x-x^2\right)^3}{\left(5x^4+2\right)(3-x)^4}$.

139. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}-5+3x}{7x-8x^2+\sqrt[3]{27x^3+2}}$.

140. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-7-\sqrt{9x^2-8x}}{\sqrt{16x^2+5}-3x+9}$.

141. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x-3}-2\sqrt{x}\right)$.

142. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x\right)$.

143. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

144. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$.

145. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$.

146. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg\,2x}{\sin^2 3x}$.

147. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\,tg\,2x}$.

148. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\ln(1-2x)}{tg^2 4x\cdot\cos 5x}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{tg\,3x\cdot\ln(1+4x)}$.

150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)\cdot\sin^2 x}{2x\,arctg\,3x}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\arcsin^2 7x}{tg^2 3x\cdot\sin 5x}$.

152. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{4x-\pi}$.

153. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg(3x-6)}{\arcsin\left(x^2-4\right)}$.

154. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin\left(x^3+1\right)}{tg(x+1)}$.

155. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

156. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

157. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{x^2-4}\right)$.

158. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

159. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}\right)$.

160. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}$.

161. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3-3x-2}$.

162. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x-1}{2x^2-x-1}$.

163д. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$.

164д. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-7x-15}$.

165д. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+5x+1}{3x^2+7x+4}$.

166д. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2+7}{4x-2x^2+5}$.

167д. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{4x^2-3x+6}$.

168д. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x-x^2}{4x^2+5x-8}$.

169д. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+5x-7}{4x^2-x^4+3}$.

170д. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(5x^2-3x\right)(x-2)^3}{(2x-1)^2\left(4x-x^3\right)}$.

171д. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+8}+2x-5}{8x-2-\sqrt[3]{8x^3+3}}$.

172д. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$.

173д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$.

174д. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{5-2x}-3}$.

175д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 9x}{tg18x}$.

176д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\ln(1-3x)}$.

177д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{2x\cdot arctg\,2x}$.

178д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\arcsin 2x}{arctg^2 3x}$.

179д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2 4x}{\arcsin 5x\cdot\ln(1-2x)}$.

180д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1+5x)}{arctg^2 4x}$.

181д. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg^2(x-1)}{\arcsin(x^2-1)}$.

182д. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

183д. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{5}{1-x^2}\right)$.

184д. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

185д. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{27}{x^3+27}\right)$.

186д. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}$.

Асимптоты графика функции

Найти асимптоты графиков функций:

187. $y=1-\dfrac{4}{x^2}$.

188. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

189. $y=\dfrac{4x^3+5}{x^2+1}$.

190. $y=\dfrac{5x^4-2}{x-3}$.

192. $y=\dfrac{4x+3}{x^2-4}$.

192. $y=5xe^{-2x}$.

193д. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

194д. $y=\dfrac{3x^4+5}{x^2-1}$.

195д. $y=\dfrac{5x-10}{x+3}$.

196д. $y=\dfrac{2x+4}{x^2+7}$.

197д. $y=\dfrac{2x^3-3}{x^2-1}$.

198д. $y=e^{\frac{2}{x-3}}$.

4 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

4.1 Понятие производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Для любой точки x из этой окрестности можно определить ***приращение аргумента*** как разность $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$.

Приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется разность $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначают следующим образом:

$$y'(x_0),\quad f'(x_0),\quad \frac{dy(x_0)}{dx},\quad \frac{df(x_0)}{dx},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Если функция называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если она имеет в этой точке конечную производную.

Геометрический смысл производной

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, то есть $y'(x_0) = f'(x_0) = tg\alpha$ (рисунок 4.1).

Таким образом, если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ***уравнение касательной*** к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0). \qquad (4.2)$$

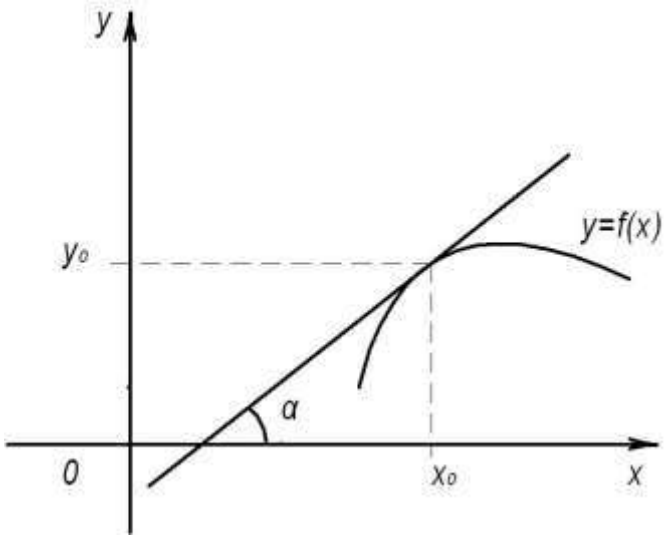


Рисунок 4.1 – Геометрический смысл производной

Задача о скорости химической реакции

Пусть дана функция $m = m(t)$, где m – количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t.

Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m.

Отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ – средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. А предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, то есть $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ – это скорость химической реакции в данный момент времени t или мгновенная скорость химической реакции.

Таким образом, мгновенная скорость химической реакции есть производная количества вещества m по времени t.

Производная функции, заданной параметрически

В случае параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ её производную можно найти по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (4.3)$$

Правила и формулы дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные, $C = const$, $a > 0$, $a \neq 1$, тогда имеют место следующие ***правила дифференцирования***:

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

4.1. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - uv'}{v^2}$

5.1. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$

Таблица 4.1 – ***Формулы производных* (*формулы дифференцирования*)**

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	1.1. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ 1.2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
2. $(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$	2.1. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
3. $(log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot ln\, a}$	3.1. $(ln\, u)' = \frac{u'}{u}$
4. $(sin\, u)' = cos\, u \cdot u'$	5. $(cos\, u)' = -sin\, u \cdot u'$
6. $(tg\, u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$	7. $(ctg\, u)' = -\frac{u'}{sin^2 u}$
8. $(arc\, sin\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	9. $(arc\, cos\, u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10. $(arc\, tg\, u)' = \frac{u'}{u^2+1}$	11. $(arc\, ctg\, u)' = -\frac{u'}{u^2+1}$

Пример 4.1. Найти производную функции $y = 3x^2 - 5x + 7 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}$.

Решение. Используя правила и формулы производных из таблицы 4.1, получаем:

$$y' = \left(3x^2 - 5x + 7 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}\right)' =$$

сначала применим правило (3)

$$= \left(3x^2\right)' - \left(5x\right)' + \left(7\right)' - \left(2\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{3}{x^3}\right)' =$$

дальше применим правило (4.1), к третьему слагаемому – правило (1), последнее слагаемое преобразуем

$$= 3\left(x^2\right)' - 5\left(x\right)' + 0 - 2\left(\sqrt{x}\right)' + 3\left(x^{-3}\right)' = 3 \cdot 2x^{2-1} - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2\sqrt{x} + 3\left(-3\right)x^{-3-1} =$$

формула (1) таблицы 4.1; правило (2); формула (1.1) таблицы 4.1; формула (1) таблицы 4.1

$$= 6x - 5 - 4\sqrt{x} - 9x^{-4}.$$

Пример 4.2. Найти производную функции $y = \sin\left(5x + 6\right) \cdot \log_2\left(x^2 - 3\right)$.

Решение. Используем правило (4) и получаем:

$$y' = \left(\sin\left(5x + 6\right)\right)' \cdot \log_2\left(x^2 - 3\right) + \sin\left(5x + 6\right) \cdot \left(\log_2\left(x^2 - 3\right)\right)' =$$

формула (4) таблицы 4.1; формула (3) таблицы 4.1

$$= \cos\left(5x + 6\right) \cdot \left(5x + 6\right)' \cdot \log_2\left(x^2 - 3\right) + \sin\left(5x + 6\right) \cdot \frac{\left(x^2 - 3\right)'}{\left(x^2 - 3\right) \cdot \ln 2} =$$

$$= 5\cos\left(5x + 6\right) \cdot \log_2\left(x^2 - 3\right) + \sin\left(5x + 6\right) \cdot \frac{2x}{\left(x^2 - 3\right) \cdot \ln 2}.$$

Здесь мы использовали, что

$\left(5x + 6\right)' = \left(5x\right)' + \left(6\right)' = 5 + 0 = 5$, $\left(x^2 - 3\right)' = \left(x^2\right)' - \left(3\right)' = 2x + 0 = 2x$.

Пример 4.3. Найти производную функции $y=\ln\left(7x^2-3\right)\cdot\cos\left(9-\frac{2}{x}\right)$.

Решение. Используем правило (4) и получаем:

$$y'=\left(\ln\left(7x^2-3\right)\right)'\cdot\cos\left(9-\frac{2}{x}\right)+\ln\left(7x^2-3\right)\cdot\left(\cos\left(9-\frac{2}{x}\right)\right)'=$$

формула (3.1) таблицы 4.1

формула (5) таблицы 4.1

$$=\frac{\left(7x^2-3\right)'}{7x^2-3}\cos\left(9-\frac{2}{x}\right)+\ln\left(7x^2-3\right)\cdot\left(-\sin\left(9-\frac{2}{x}\right)\right)\cdot\left(9-\frac{2}{x}\right)'=$$

$$=\frac{14x}{7x^2-3}\cos\left(9-\frac{2}{x}\right)-\ln\left(7x^2-3\right)\sin\left(9-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^2}.$$

Здесь мы использовали, что

$$\left(7x^2-3\right)'=\left(7x^2\right)'-(3)'=7\left(x^2\right)'-0=7\cdot 2x=14x,$$

$$\left(9-\frac{2}{x}\right)'=(9)'-\left(\frac{2}{x}\right)'=0-\left(-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{2}{x^2}.$$

Пример 4.4. Найти производную функции $y=\frac{3x+1}{e^{2x}}$.

Решение. Используем правило (5) и получаем:

$$y'=\frac{(3x+1)'e^{2x}-(3x+1)\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{3e^{2x}-(3x+1)\cdot 2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{e^{2x}(3-6x-2)}{e^{4x}}=\frac{1-6x}{e^{2x}}.$$

Здесь мы использовали, что

$$(3x+1)'=(3x)'-(1)'=3-0=3,$$

$$\left(e^{2x}\right)'=e^{2x}\cdot(2x)'=e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}.$$

Пример 4.5. Найти производную параметрически заданной функции

$$\begin{cases}x=a\cos 3x,\\ y=a\sin 3t.\end{cases}$$

Решение. Найдем производные $x_t'=-3a\sin 3t$, $y_t'=3a\cos 3t$ и воспользуемся формулой (4.3): $y_x'=\frac{3a\cos 3t}{-3a\sin 3t}=-\operatorname{ctg}3t$.

Пример 4.6. Составить уравнения касательной к графику функции $y=\sqrt{6x+7}$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение. Для решения воспользуемся формулой (4.2):

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0).$$

Найдём $y(x_0)=y(3)=\sqrt{6\cdot 3+7}=\sqrt{25}=5,$

$$y'=\frac{(6x+7)'}{2\sqrt{6x+7}}=\frac{6}{2\sqrt{6x+7}}=\frac{3}{\sqrt{6x+7}},$$

отсюда следует: $y'(x_0)=y'(3)=\frac{3}{\sqrt{6\cdot 3+7}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5},$

тогда по формуле (4.2) имеем:

$$y=5+\frac{3}{5}(x-3) \quad \Big| \cdot 5,$$

$$5y=25+3(x-3),$$

$$5y=25+3x-9.$$

Таким образом, касательная к графику заданной функции в точке $x_0=3$ задаётся уравнением $3x-5y+16=0.$

Производная неявно заданной функции

Чтобы найти производную функции, заданной неявно уравнением $F(x;y)=0$, необходимо продифференцировать обе части данного уравнения, а затем выразить из полученного равенства y'.

Пример 4.7. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $5x^2y+7\operatorname{tg}8y=5\ln 7x$.

Решение. Продифференцируем вначале обе части уравнения, учитывая, что $y=f(x)$:

$$10xy+5x^2\,y'+7\cdot\frac{8y'}{\cos^2 8y}=5\cdot\frac{7}{7x}.$$

Затем выразим из полученного равенства y':

$$\left(5x^2+\frac{56}{\cos^2 8y}\right)y'=\frac{5}{x}-10xy \text{ или } y'=\frac{\frac{5}{x}-10xy}{5x^2+\frac{56}{\cos^2 8y}}=\frac{5\left(1-2x^2y\right)\cos^2 8y}{x\left(5x^2\cos^2 8y+56\right)}.$$

Дифференциал функции, связь с производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращение функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая в точке x_0 функция.

Дифференциалом независимой переменной называется её приращение: $dx=\Delta x$.

Дифференциалом функции называется главная часть приращения $A\Delta x$, линейно зависящая от приращения аргумента: dy или df, поэтому $dy=A\Delta x$.

При этом $A=f'(x_0) \Rightarrow dy=f'(x_0)dx$.

Так как $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)=dy+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая в точке x_0 функция, то $\Delta y\approx dy=f'(x_0)dx$.

$\Rightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx$.

При этом погрешность приближения, равная $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x\to 0$.

Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ называется первой производной функции $f(x)$.

Производная от первой производной функции $f(x)$ называется второй производной или ***производной второго порядка*** и обозначается $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$, то есть $f''(x)=(f'(x))'$.

Производная n-го порядка – это производная от производной $(n-1)$-го порядка, то есть $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке, то $dy = f'(x)dx$.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = dx(f'(x))'dx = f''(x)(dx)^2,$$

то есть $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Аналогично дифференциал n-го порядка имеет вид: $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Пример 4.8. Найти вторую производную функции $y = \dfrac{3x+1}{e^{2x}}$.

Решение. Производную первого порядка мы нашли в примере 4.4:

$$y' = \frac{1-6x}{e^{2x}}.$$

Теперь найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1-6x}{e^{2x}}\right)' = \frac{(1-6x)'e^{2x} - (1-6x)\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2} = \frac{-6e^{2x} - (1-6x)\cdot 2e^{2x}}{e^{4x}} =$$

$$= \frac{e^{2x}(-6-2+12x)}{e^{4x}} = \frac{12x-8}{e^{2x}}.$$

Пример 4.9. Найти производные старших порядков функции $y = 2x^3 - 4x^2 + x - 8$.

Решение.

Производная первого порядка: $y' = \left(2x^3 - 4x^2 + x - 8\right)' = 6x^2 - 8x + 1.$

Производная второго порядка: $y'' = \left(6x^2 - 8x + 1\right)' = 12x - 8.$

Производная третьего порядка: $y''' = (12x - 8)' = 12.$

Производная четвёртого порядка: $y^{(4)} = (12)' = 0.$

Очевидно, что при всех натуральных $n \geq 4$ производные n-го порядка будут равны нулю: $y^{(n)} = (0)' = 0.$

4.2 Правило Лопитáля раскрытия неопределенностей

При вычислении предела функции для избавления от неопределённостей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. Правило Лопитáля.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ обе бесконечно малые либо обе бесконечно большие вблизи точки x_0. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и справедлива формула:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.4}$$

При этом если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно.

Пример 4.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. (Символ *Л* над знаком равенства означает, что мы используем правило Лопиталя).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{e^x}$.

Решение. (Символ *Л* над знаком равенства означает, что мы используем правило Лопиталя).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-5x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-5)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0.$$

Пример 4.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2\pi}(x-2\pi)\operatorname{ctg}x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(x-2\pi)\operatorname{ctg}x=(0\cdot\infty)$.

Преобразуем произведение, стоящее под знаком предела, в частное, используя, что $ctg\,x=\dfrac{1}{tg\,x}$ (символ $Л$ над знаком равенства означает, что мы используем правило Лопиталя):

$$\lim_{x\to 2\pi}(x-2\pi)\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 2\pi}\frac{x-2\pi}{\operatorname{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)'}{(\operatorname{tg}x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2\pi}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 2\pi}\cos^2 x=\cos^2 2\pi=1.$$

К пределу, рассмотренному в примере 3.10 также можно применить правило Лопиталя.

Пример 4.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{3x^2-13x-10}$.

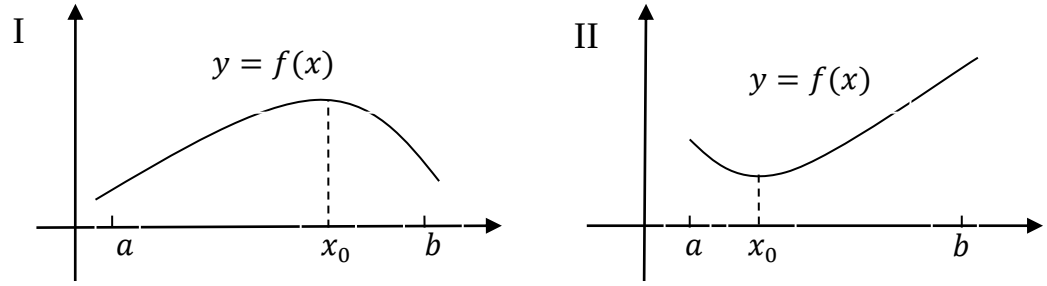
Решение. Подставим вначале в данное выражение предельное значение аргумента $x=5$, однако получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{3x^2-13x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(x^2-25\right)'}{\left(3x^2-13x-10\right)'}=\lim_{x\to 5}\frac{2x}{6x-13}=\frac{2\cdot 5}{6\cdot 5-13}=\frac{10}{17}.$$

4.3 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма́.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в интервале $(a;b)$ и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если существует производная этой функции в точке x_0, то она равна нулю: $f'(x_0)=0$.



Если $\exists\, f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Рисунок 4.2 – Иллюстрация к теореме Ферма

Теорема Ро́лля.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируема в интервале $(a;b)$;

3) на концах отрезка принимает равные значения: $f(a)=f(b)$.

Тогда $\exists$ хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: если функция $y=f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Роля, то в интервале $(a;b)$ найдётся хотя бы одна точка, касательная в которой к графику функции будет проходить параллельно оси OX (на рисунке 4.3 таких точек три).

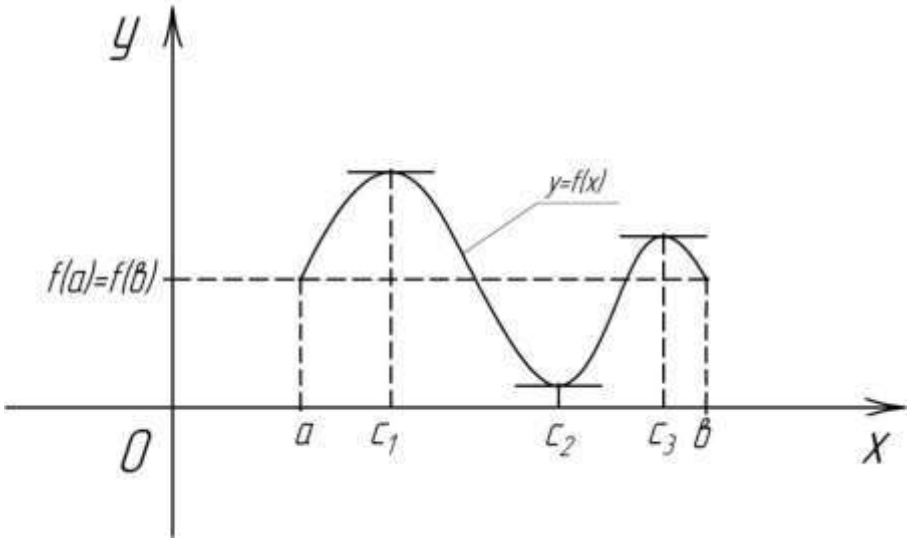


Рисунок 4.3 – Геометрический смысл теоремы Ролля

Теорема Лагра́нжа.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируема в интервале $(a;b)$.

Тогда ∃ хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, то в интервале $(a;b)$ найдётся хотя бы одна точка, касательная в которой к графику функции будет проходить параллельно хорде, стягивающей концы графика функции на отрезке $[a;b]$ (рисунок 4.4).

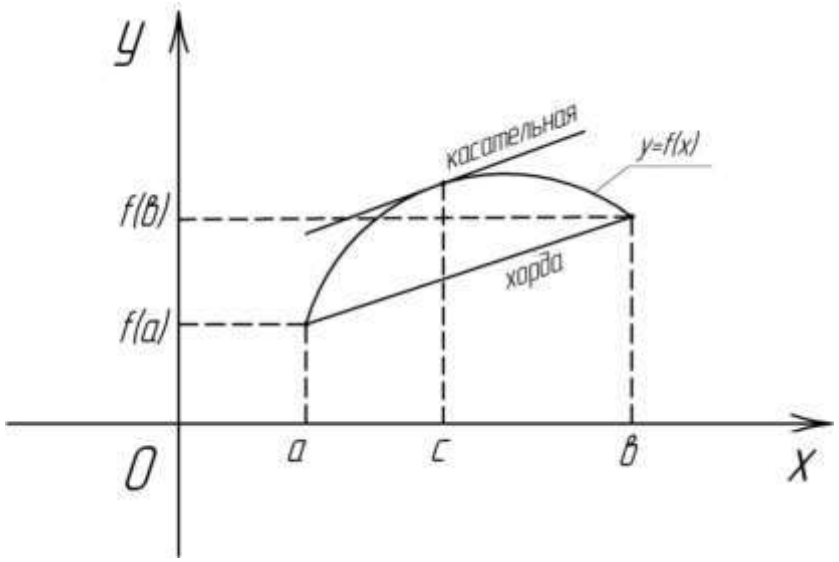


Рисунок 4.4 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Теорема Коши́.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причём $g'(x) \neq 0$ в этом интервале.

Тогда ∃ хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

4.4 Монотонность функции. Экстремумы

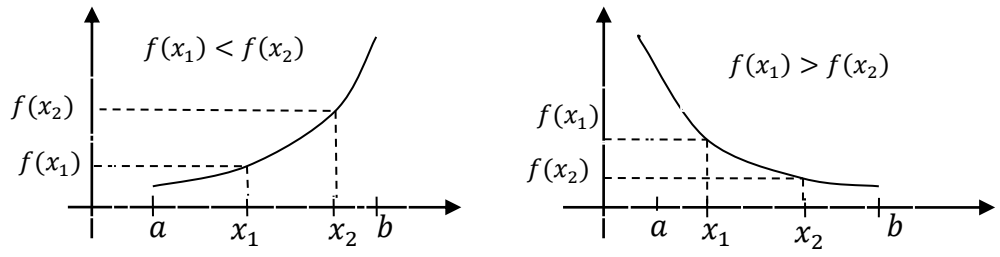
Возрастание и убывание функции

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на интервале $(a;b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство (рисунок 4.5)

$$f(x_1) > f(x_2) \ \ (f(x_1) < f(x_2)). \tag{4.5}$$

Если в неравенстве (4.5) допускается знак $\leq$ $(\geq)$, то функция называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***).

Возрастающую или убывающую на промежутке функцию называют ***монотонной*** на этом промежутке.



Функция возрастает на $(a;b)$ Функция убывает на $(a;b)$

Рисунок 4.5 – Монотонность функции

Теорема. Условие монотонности.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если производная $f'(x) > 0 \ \ (f'(x) < 0)$ для всех значений $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Экстремумы функции

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой максимума*** (***минимума***), если существует такая δ -окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0) \ \ (f(x) \geq f(x_0))$ (рисунок 4.6).

Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

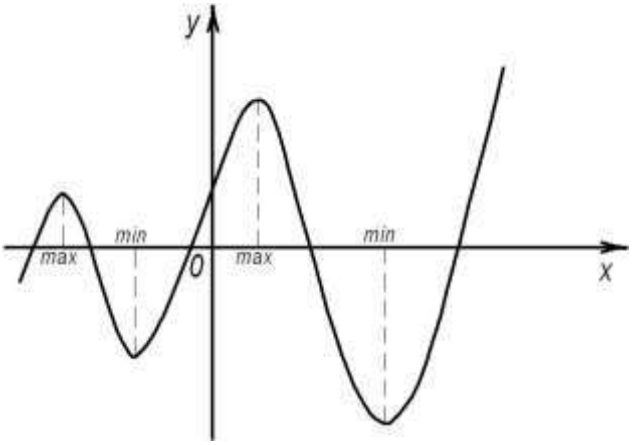


Рисунок 4.6 – Точки минимума и максимума функции

Теорема. Необходимое условие экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то её производная в этой точке равна нулю или не существует: $f'(x_0)=0$ или $\nexists\ f'(x_0)$.

Замечание. Данная теорема является необходимым, но не достаточным условием экстремума функции.

Например, функция $y=x^3$: $\left(x^3\right)'=3x^2=0$ при $x=0$, но в этой точке функция не имеет экстремума (рисунок 4.7).

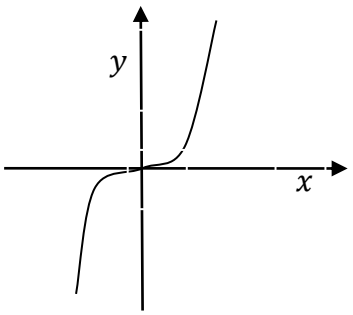


Рисунок 4.7 – График функции $y=x^3$

Точки области определения функции, в которых $f'(x)$ обращается в ноль или не существует, называются ***критическими точками (1-го рода)*** функции $f(x)$.

Из теоремы о необходимом условие экстремума следует, что любая точка экстремума функции является критической точкой, поэтому критические точки «подозрительны на экстремум».

Теорема. Достаточное условие экстремума.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой проколотой окрестности критической точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0. Если при переходе через точку x_0 производная:

1) меняет знак с (+) на (−), то x_0 – точка максимума;

2) меняет знак с (−) на (+), то x_0 – точка минимума;

3) не меняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

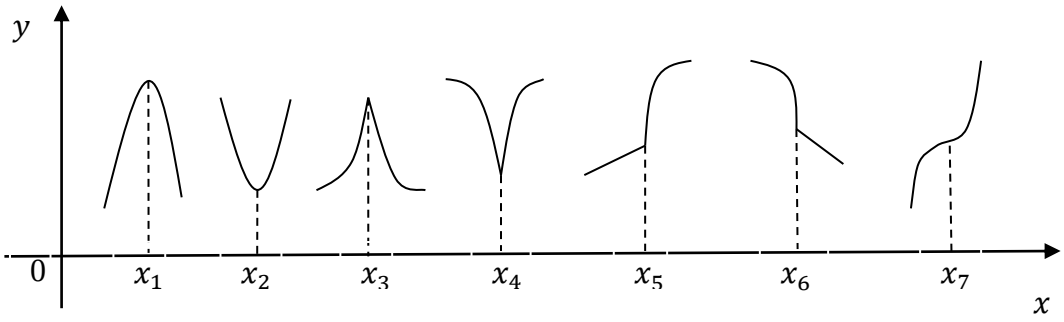


Рисунок 4.8 – Критические точки

На рисунке 4.8 приведены различные варианты, которые могут быть в критических точках:

1) $f'(x_1)=0$, производная $f'(x)$ меняет знак с (−) на (+) $\Rightarrow$ x_1 – точка минимума;

2) $f'(x_2)=0$, производная $f'(x)$ меняет знак с (+) на (−) $\Rightarrow$ x_2 – точка максимума;

3) $f'(x_3)$ не существует, производная $f'(x)$ меняет знак с (+) на (−) $\Rightarrow$ x_3 – точка максимума;

4) $f'(x_4)$ не существует, производная $f'(x)$ меняет знак с (−) на (+) $\Rightarrow$ x_4 – точка минимума;

5) $f'(x_5)$ не существует, производная $f'(x)$ не меняет знак $(f'(x)>0)\Rightarrow$ x_5 не является точкой экстремума;

6) $f'(x_6)$ не существует, производная $f'(x)$ не меняет знак $(f'(x)<0)\Rightarrow$ x_6 не является точкой экстремума;

7) $f'(x_7)=0$, производная $f'(x)$ не меняет знак $(f'(x)>0)\Rightarrow$ x_7 не является точкой экстремума.

План исследования функции $y=f(x)$ ***на монотонность, экстремум***

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти производную функции $y'=f'(x)$.
3. Найти критические точки 1-го рода (точки из области определения функции, в которых $y'=0$ или не существует).
4. На числовой оси отметить область определения функции $D(f)$ и критические точки 1-го рода.
5. На полученных интервалах найти знак производной функции $f'(x)$.
6. Определить промежутки убывания и возрастания функции и найти экстремумы функции.

Пример 4.14. Найти интервалы монотонности функции $y=8x^3+21x^2-12x+1$.

Найти интервалы монотонности функции $y=x^3-2x^2+x$.

Решение. 1. Так как данная функция представляет собой многочлен, то её область определения – множество всех действительных чисел, то есть $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. $y'=\left(x^3-2x^2+x\right)=3x^2-4x+1$.

3. Производная $y'=0$, если $3x^2-4x+1=0$,

$$x_1=\frac{1}{3}\in D(f),$$

$$x_2=1\in D(f).$$

Значит, $x_1=\frac{1}{3}$ и $x_2=1$ – критические точки 1-го рода рассматриваемой функции.

4. На оси OX отметим область определения функции и критические точки 1-го рода:



5. На полученных интервалах определим знаки производной $y'=3x^2-4x+1$:

1) на интервале $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ $\Rightarrow$ $y'(0)=3\cdot0^2-4\cdot0+1=1>0$;

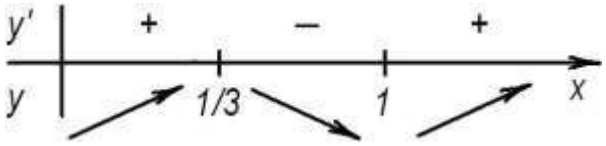
2) на интервале $\left(\frac{1}{3};1\right)\ \Rightarrow$

$$y'\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+1=3\cdot\frac{2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{3}{3}=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}<0;$$

3) на интервале $(1;+\infty)\ \Rightarrow\ y'(10)=3\cdot10^2-4\cdot10+1=300-40+1>0$.



6. Используя условие монотонности, определим поведение функции на рассматриваемых интервалах (интервалы возрастания и убывания функции отметим стрелками):



Итак, функция $y=x^3-2x^2+x$ возрастает на интервалах $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ и $(1;+\infty)$, убывает на интервале $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Пример 4.15. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ на монотонность и экстремум.

Решение. 1. Область определения функции:

$D(f)$: $x-1\neq0$,

$x\neq1$ или $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. $y'=\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2+3\right)'(x-1)-\left(x^2+3\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-\left(x^2+3\right)}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

3. Производная $y'=0$, если $x^2-2x-3=0$,

$x_1=-1\in D(f)$,

$x_2=3\in D(f)$.

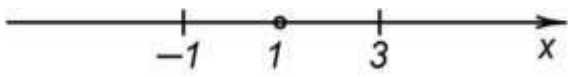
Производная y' не существует, если $(x-1)^2=0$,

$$x_3=1\notin D(f).$$

Значит, $x_1=-1$ и $x_2=3$ – критические точки 1-го рода рассматриваемой функции, а $x_3=1$ не является критической точкой 1-го рода.

Используя формулу разложения квадратного трёхчлена на линейные множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, можно преобразовать производную: $y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

4. На оси OX отметим область определения функции и критические точки 1-го рода:



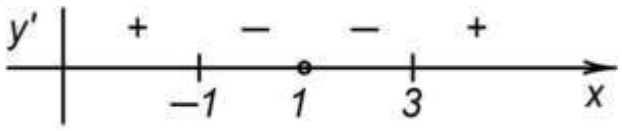
5. На полученных интервалах определим знаки производной $y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$:

1) на интервале $(-\infty;-1)\ \Rightarrow\ y'(-10)=\dfrac{(-10-3)(-10+1)}{(-10-1)^2}=\dfrac{(-)(-)}{(+)}=(+)$;

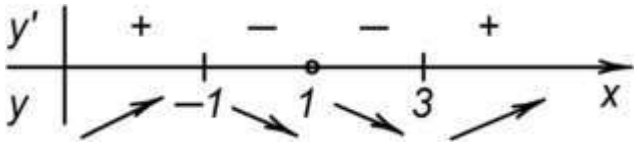
2) на интервале $(-1;1)\ \Rightarrow\ y'(0)=\dfrac{(0-3)(0+1)}{(0-1)^2}=\dfrac{(-)(+)}{(+)}=(-)$;

3) на интервале $(1;3)\ \Rightarrow\ y'(2)=\dfrac{(2-3)(2+1)}{(2-1)^2}=\dfrac{(-)(+)}{(+)}=(-)$.

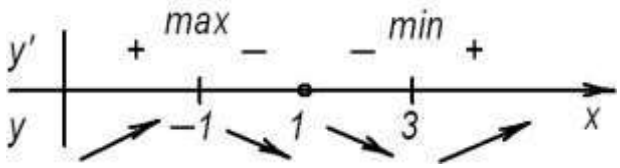
4) на интервале $(3;+\infty)\ \Rightarrow\ y'(10)=\dfrac{(10-3)(10+1)}{(10-1)^2}=\dfrac{(+)(+)}{(+)}=(+)$.



6. Используя условие монотонности, определим поведение функции на рассматриваемых интервалах (интервалы возрастания и убывания функции отметим стрелками):



Используя достаточное условие экстремума, определим точки минимума и максимума:



Найдём значения функции в точках минимума и максимума:

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{(-1)^2 + 3}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2.$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{3^2 + 3}{3-1} = \frac{12}{2} = 6.$$

Итак, функция $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на интервалах $(-1; 1)$ и $(1; 3)$, имеет максимум в точке $x_1 = -1$: $y_{\max}(-1) = -2$ и минимум в точке $x_2 = 3$: $y_{\max}(3) = 6$.

Пример 4.16. Исследовать функцию $y = xe^{-x}$ на экстремум.

Решение. 1. Найдём область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

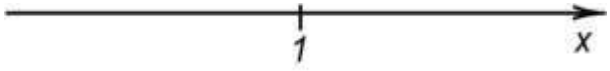
2. $y' = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$.

3. Производная $y' = 0$, если $e^{-x}(1-x) = 0 \,\big|: e^{-x} > 0$

$$1 - x = 0$$
$$x = 1 \in D(f).$$

Значит, $x = 1$ – критическая точка 1-го рода рассматриваемой функции.

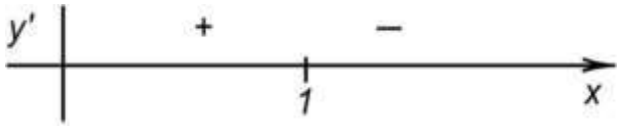
4. На оси *OX* отметим область определения функции (в нашем случае область определения – это вся действительная ось) и критическую точку:



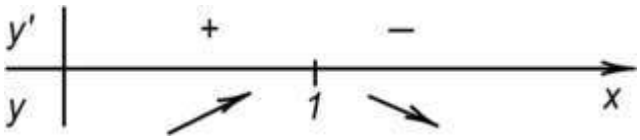
5. На полученных интервалах определим знаки производной:

1) на интервале $(-\infty; 1) \Rightarrow y'(0) = e^0(1-0) = e > 0$;

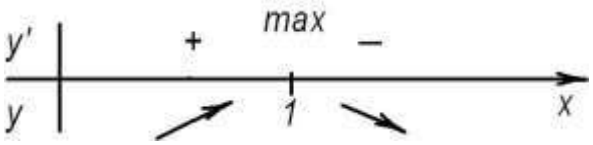
2) на интервале $(1; +\infty) \Rightarrow y'(2) = e^2(1-2) = -e^2 < 0$.



6. Используя условие монотонности, определим поведение функции на рассматриваемых интервалах (интервалы возрастания и убывания функции отметим стрелками):



Используя достаточное условие экстремума, определим точку максимума:



Таким образом получаем, что функция имеет максимум в точке $x=1$: $y_{\max}(1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции

На практике часто встречаются задачи, которые сводятся к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции на некотором отрезке.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда на этом отрезке она достигает наибольшего и наименьшего значений. Эти значения могут достигаться или в точках экстремума или на концах отрезка, поэтому необходимо:

1. Найти производную функции.
2. Найти критические точки (точки области определения функции, в которых производная не существует либо равна нулю) и отобрать те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.
3. Вычислить значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка.
4. Среди найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 4.17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)$ на отрезке $[-3;0]$.

Решение. 1. Найдём производную функции:

$$y'=\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)'=\frac{1}{4}\left(3x^2+18x+15\right)=\frac{3}{4}\left(x^2+6x+5\right).$$

2. Найдём критические точки 1-го рода:

$$y'=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(x^2+6x+5\right)=0,$$

$$x^2+6x+5=0,$$
$$x_1=-5\notin[-3;0],$$
$$x_2=-1\in[-3;0].$$

3. Вычислим значения заданной функции на концах отрезка $[-3;0]$ и в критической точке 1-го рода, попавшей на отрезок, и сравним результаты:

$$y(-3)=\frac{1}{4}\left((-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9\right)=\frac{1}{4}(-27+81-45-9)=0;$$

$$y(-1)=\frac{1}{4}\left((-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9\right)=\frac{1}{4}(-1+9-15-9)=\frac{1}{4}\cdot(-16)=-4;$$

$$y(0)=\frac{1}{4}\left(0^3+9\cdot 0^2+15\cdot 0-9\right)=-\frac{1}{4}\cdot 9=-\frac{9}{4}.$$

4. Выберем из найденных значений x наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-3;0]} y=-4;\quad \min_{[-3;0]} y=0.$$

4.5 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба в биохимии

Выпуклость и вогнутость графика функции

Пусть функция $y=f(x)$ задана на интервале $(a;b)$ и дифференцируема на нём.

График функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым*** (рисунок 4.9) на данном интервале, если график лежит не выше любой касательной, проведенной к графику на этом интервале.

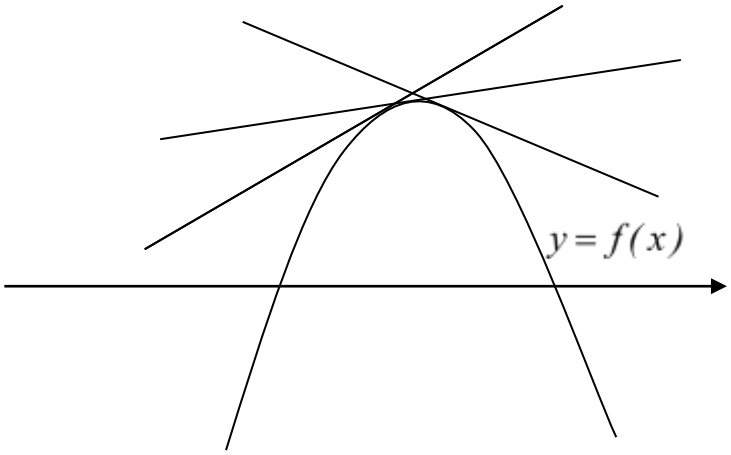


Рисунок 4.9 – Выпуклый график

График функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым*** (рисунок 4.10) на данном интервале, если график лежит не выше (не ниже) любой касательной, проведенной к графику на этом интервале.

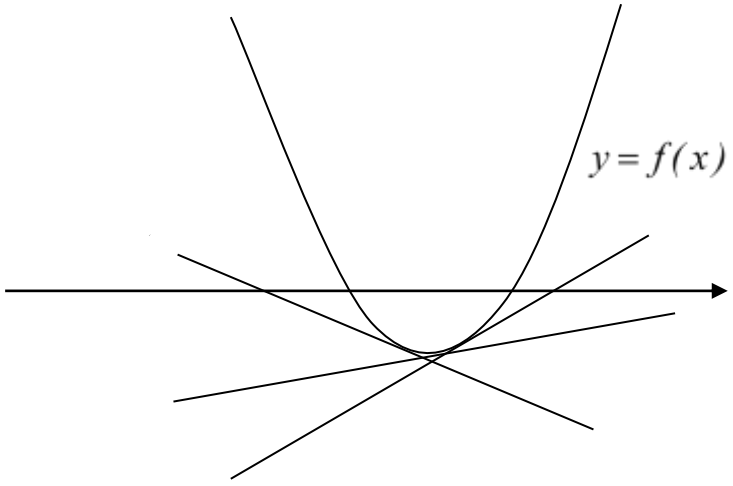


Рисунок 4.10 – Вогнутый график

Теорема. Достаточное условие выпуклости графика функции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную и во всех точках интервала $(a;b)$ $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то график функции является выпуклым (вогнутым) на этом интервале.

Точки перегиба графика функции

Точка $M_0(x_0; y_0)$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***точкой перегиба***, если она отделяет выпуклую часть графика от вогнутой (рисунок 4.11).

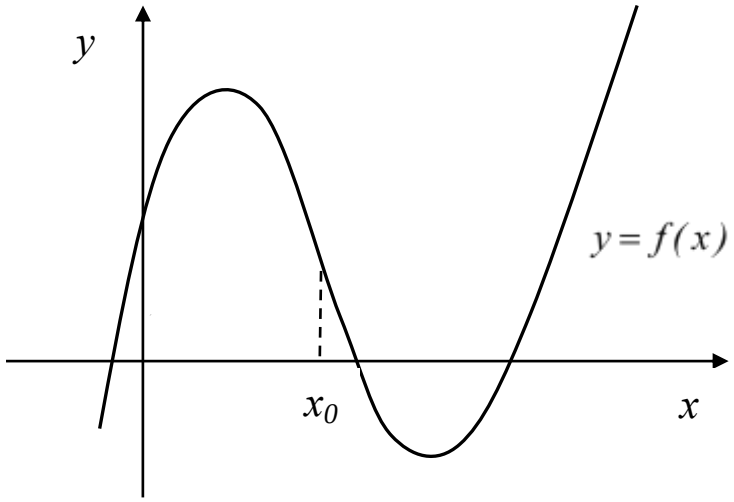


Рисунок 4.11 – Точка перегиба

Теорема. Необходимое условие точки перегиба.

Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика непрерывной функции $y = f(x)$, то в этой точке вторая производная функции $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки области определения функции, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими точками 2-го рода***.

Теорема. Достаточное условие точки перегиба.

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой выколотой окрестности критической точки 2-го рода x_0 и непрерывна в самой точке x_0. Если при переходе через нее вторая производная функции $f''(x)$ меняет знак, то $M_0(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба.

План исследования функции $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость графика, точки перегиба.

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти вторую производную функции $f''(x)$.

3. Найти критические точки 2-го рода (точки области определения, в которых $f''(x)=0$ или не существует).
4. На числовой оси отметить область определения функции $D(f)$ и критические точки 2-го рода.
5. На полученных интервалах определить знак второй производной функции $f''(x)$.
6. Определить промежутки выпуклости (вогнутости) графика функции.
7. Определить точки перегиба, если они существуют.

Пример 4.18. Найти интервалы выпуклости графика функции $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$.

Решение. 1. Область определения функции – множество всех действительных чисел, то есть $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Найдём первую производную функции:

$$y'=\left(\frac{4x^2}{x^2+3}\right)'=\frac{\left(4x^2\right)'\left(x^2+3\right)-4x^2\cdot\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{8x\left(x^2+3\right)-4x^2\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$$

$$=\frac{8x^3+24x-8x^3}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Найдём вторую производную функции:

$$y''=\left(\frac{24x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)'=\frac{(24x)'\left(x^2+3\right)^2-24x\cdot\left(\left(x^2+3\right)^2\right)'}{\left(x^2+3\right)^4}=$$

$$=\frac{24\left(x^2+3\right)^2-24x\cdot 2\left(x^2+3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^4}=\frac{24\left(x^2+3\right)\left(\left(x^2+3\right)-x\cdot 2\cdot 2x\right)}{\left(x^2+3\right)^4}=$$

$$=\frac{24\left(x^2+3-4x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{24\left(3-3x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{24\cdot 3\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{72\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3}.$$

3. Найдём критические точки 2-го рода функции. Вторая производная определена на множестве всех действительных чисел, поэтому нет точек, в которых вторая производная не существует.

$y''=0$, если $1-x^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=1$,

$$x_1=-1\in D(f),$$

$$x_2 = 1 \in D(f).$$

Таким образом, функция имеет две критические точки 2-го рода: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

4. На оси *OX* отметим область определения функции и критические точки 2-го рода:

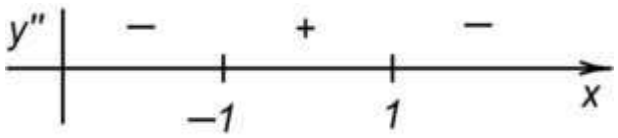


5. На полученных интервалах определяем знаки второй производной $y'' = \dfrac{72(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$:

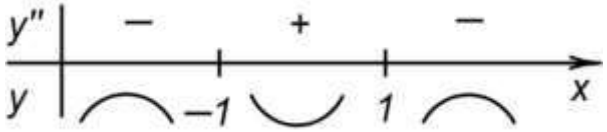
1) на интервале $(-\infty;-1) \Rightarrow y''(-10) = \dfrac{72(1-100)}{(100+3)^3} = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$;

2) на интервале $(-1;1) \Rightarrow y''(0) = \dfrac{72(1-0)}{(0+3)^3} = \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$;

3) на интервале $(1;+\infty) \Rightarrow y''(10) = \dfrac{72(1-100)}{(100+3)^3} = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$.



6. Используя достаточное условие выпуклости графика функции отметим дугами направления выпуклости графика функции.



Итак, график функции выпуклый (или выпуклый вверх) на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$, вогнутый (или выпуклый вниз) на интервале $(-1;1)$.

Пример 4.19. Найти точки перегиба графика функции $y=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.

Решение. Область определения функции: $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$, то есть $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

2. Найдём первую производную функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2=-2\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)^1\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)'=-2\cdot\frac{x}{x+2}\cdot\frac{(x)'(x+2)-x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$=-\frac{2x}{x+2}\cdot\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=-\frac{4x}{(x+2)^3}.$$

Найдём вторую производную функции:

$$y''=\left(\frac{-4x}{(x+2)^3}\right)'=\frac{(-4x)'(x+2)^3-(-4x)\left((x+2)^3\right)'}{\left((x+2)^3\right)^2}=$$

$$=\frac{-4(x+2)^3+4x\cdot 3\cdot(x+2)^2}{(x+2)^6}=\frac{4(x+2)^2(-(x+2)+x\cdot 3)}{(x+2)^6}=\frac{4(2x-2)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{8(x-1)}{(x+2)^4}.$$

3. Найдем критические точки второго рода.

$y''=0$, если $x-1=0 \Leftrightarrow x=1\in D(f)$.

y'' не существует, если $(x+2)^4=0$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2\notin D(f).$$

Таким образом, функция имеет одну критическую точку 2-го рода: $x=1$.

4. На числовой оси отметим область определения функции и найденную критическую точку:

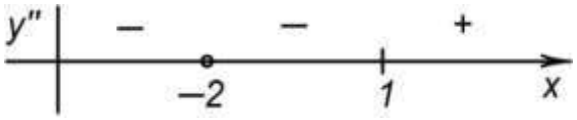


5. Найдём знаки второй производной $y''=\frac{8(x-1)}{(x+2)^4}$ на полученных интервалах:

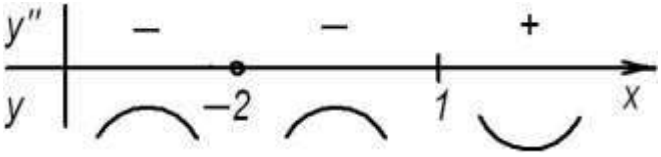
1) на интервале $(-\infty;-2) \Rightarrow y''(-10)=\frac{8(-10-1)}{(-10+2)^4}=\frac{(-)}{(+)}=(-)$;

2) на интервале $(-2;1) \Rightarrow y''(0)=\frac{8(0-1)}{(0+2)^4}=\frac{(-)}{(+)}=(-)$;

3) на интервале $(1;+\infty)$ $\Rightarrow$ $y''(10)=\dfrac{8(10-1)}{(10+2)^4}=\dfrac{(+)}{(+)}=(+).$



6. Используя достаточное условие выпуклости графика функции отметим дугами направления выпуклости графика функции:



Используя условие точки перегиба, определим, что $x_{\text{т.п.}}=1$ – абсцисса точки перегиба, а соответствующая ей ордината равна:

$$y_{\text{т.п.}}=y(1)=-\left(\frac{1}{1+2}\right)^2=-\frac{1}{9}.$$

Таким образом $M\left(1;-\dfrac{1}{9}\right)$ – точка перегиба.

Точки перегиба в биохимии

Точки перегиба важны в биохимии, так как они определяют условия, при которых некоторая величина, например скорость процесса, наиболее (или наименее) чувствительна к каким-либо воздействиям. Рассмотрим (см. [4]) способность буфера препятствовать изменению pH $\left(\text{pH}=-\lg\left[\text{H}^+\right]\right)$, которое может быть обусловлено, к примеру, добавлением щелочи. Эта ситуация описывается уравнением

$$\text{pH}=\text{pK}_{\text{д}}+\lg\frac{[\text{Соль}]}{[\text{Кислота}]},$$

где $\text{K}_{\text{д}}$ – константа диссоциации кислоты,

$\text{pK}_{\text{д}}=-\lg\text{K}_{\text{д}}$.

Для буфера, приготовленного добавлением x моль$\cdot$л$^{-1}$ NaOH к раствору уксусной кислоты HOA_{c} (для краткости через A_{c} обозначено CH_3CO), начальная концентрация которого равна A, мы имеем

$$\text{pH}=\text{pK}_{\text{д}}+\lg\frac{[\text{NaOH}]}{[\text{HOA}_{\text{c}}]}=\text{pK}_{\text{д}}+0{,}4343\ln\frac{[\text{NaOH}]}{[\text{HOA}_{\text{c}}]}=\text{pK}_{\text{д}}+0{,}4343\ln\frac{x}{A-x},\quad(4.6)$$

поскольку до тех пор пока x меньше A, практически все добавляемые ионы OH^- стехиометрически превращают молекулы HOA_c в ионы OA_c^-.

Дифференцируя (4.6) по x, получаем

$$(pH)' = 0{,}4343\frac{A-x}{x}\cdot\frac{A-x+x}{(A-x)^2} = \frac{0{,}4343A}{x(A-x)}.$$

Эта первая производная является мерой чувствительности pH к действию щелочи. Ясно, что буфер наиболее эффективен, когда производная минимальна (или обратная ей величина, известная под названием буферной ёмкости, максимальна).

Для нахождения значения x, при котором $(pH)'$ минимальная, следует взять вторую производную

$$(pH)'' = -0{,}4343\,A\cdot\frac{A-2x}{\left(Ax-x^2\right)^2}.$$

Отсюда видно, что вторая производная равна нулю в точке $x=\frac{A}{2}$ и при переходе через неё в направлении возрастания x меняет знак с (−) на (+). Следовательно, $(pH)'$ минимальна в точке перегиба функции pH. Подставив это значение в (4.6), найдем, что

$$pH = pK_д + 0{,}4343\ln\frac{2A}{2A} = pK_д.$$

Таким образом, буфер наиболее эффективен при pH, равном $pK_д$ кислоты, которая участвует в нитрировании.

4.6 Построение графика функции

Наиболее наглядное представление о ходе изменения функции дает её график. Построение графика функции проводится по следующей схеме:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти асимптоты графика функции.
3. Найти экстремумы функции и определить интервалы её монотонности.
4. Найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика.
5. Построить график, используя результаты предыдущих исследований.

Пример 4.20. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2+20}{x-4}$ и построить её график.

Решение. 1. Область определения функции: $D(f)$: $x\neq 4$ или $D(y)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

2. Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x=4$. Вычислим её односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}\frac{x^2+20}{x-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0}\frac{x^2+20}{x-4}=+\infty.$$

Таким образом, точка $x=4$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x=4$ – вертикальной асимптотой графика.

Исследование графика на наличие наклонных асимптот $y=kx+b$.

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+20}{x^2-4x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1;$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+20}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+20}{x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x}=4.$$

Таким образом, прямая $y=x+4$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$.

3. Исследование на экстремум и промежутки монотонности (более подробно разобрано в примерах 4.14 – 4.16).

$$y'=\left(\frac{x^2+20}{x-4}\right)'=\frac{\big(x^2+20\big)'(x-4)-\big(x^2+20\big)(x-4)'}{(x-4)}=\frac{2x(x-4)-\big(x^2+20\big)}{(x-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}.$$

$y'=0$, если $x^2-8x-20=0$,

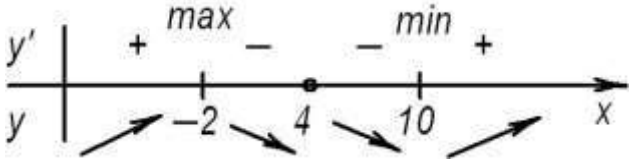
$x_1=-2\in D(f)$,

$x_2=10\in D(f)$.

y' не существует, если $(x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=4\notin D(f)$.

Таким образом, критическими точками 1-го рода являются точки $x_1 = -2, x_2 = 10$.

На оси *OX* отметим область определения функции и критические точки 1-го рода и определим знаки производной на полученных интервалах. Монотонность функции схематично отметим стрелками. Определим точки минимума и максимума функции:



Итак, $y_{\max} = y(-2) = -4;\ y_{\min} = y(10) = 20$.

4. Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости (более подробно разобрано в примерах 4.18 – 4.19).

$$y'' = \left(\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}\right)' = \frac{\left(x^2-8x-20\right)'(x-4)^2 - \left(x^2-8x-20\right)\left((x-4)^2\right)'}{(x-4)^2} =$$

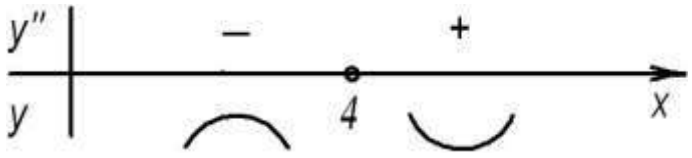
$$= \frac{(2x-8)(x-4)^2 - \left(x^2-8x-20\right)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2(x-4)\left[(x-4)^2 - \left(x^2-8x-20\right)\right]}{(x-4)^4} = \frac{2\cdot\left(x^2-8x+16-x^2+8x+20\right)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{72}{(x-4)^3}.$$

Так как $y'' \neq 0$ и определена во всей области определения функции, то график заданной функции точек перегиба не имеет.

Остаётся выяснить вопрос об интервалах его выпуклости и вогнутости:



Итак, график функции выпуклый на интервале $(-\infty; 4)$, вогнутый на интервале $(4; +\infty)$.

5. Построение эскиза графика.

Очевидно, что график заданной функции пересекает ось *OY* в точке $(0; -5)$ и на основе обобщения результатов всех предыдущих исследований имеет вид, представленный на рисунке 4.12.

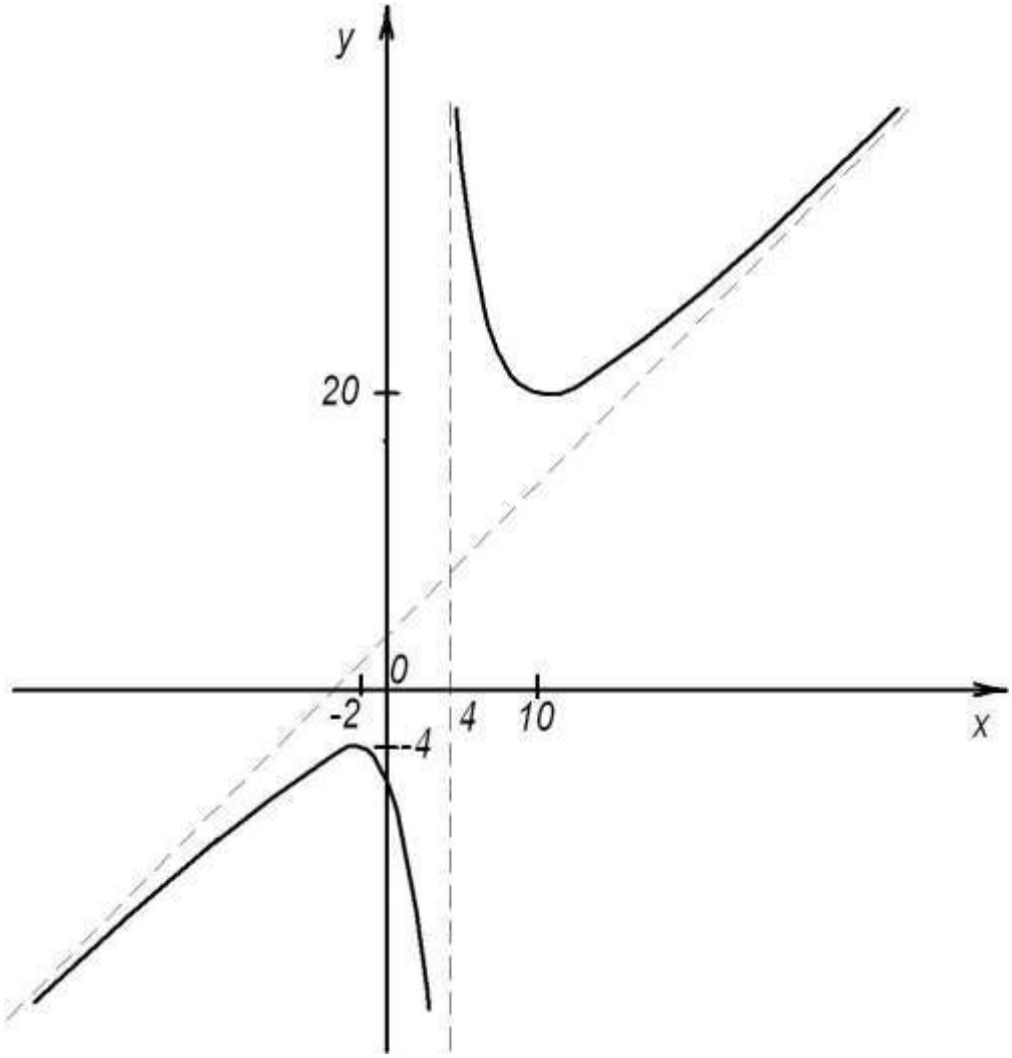


Рисунок 4.12 – Эскиз графика функции $y = \dfrac{x^2 + 20}{x - 4}$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение производной функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. Дайте определение дифференциала функции.
4. Как продифференцировать функцию, которая задана неявно?
5. Приведите формулу производной для параметрически заданной функции.
6. Дайте определение второй производной функции.
7. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
8. Как формулируется теорема Лагранжа?
9. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
10. Докажите, что функция $y = \cos x - x$ убывает на любом промежутке.
11. Сформулируйте правила нахождения экстремумов функции.

12. Приведите пример, показывающий, что обращение в нуль производной не является достаточным условием экстремума функции.
13. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Производная функции

Найти производные следующих функций:

199. $y = 8x^3 - 6x^2 + x - 1.$

200. $y = 9x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}.$

201. $y = 6x^4 - 0{,}2x^5 + 6\sqrt{x} + \frac{4}{x}.$

202. $y = \frac{1}{4}x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 11.$

203. $y = \frac{3}{5} - 8x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^6.$

204. $y = 3x - \frac{5}{6}x^3 - \frac{9}{x^3} - 11.$

205. $y = 2x^8 - 9x^2 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3}.$

206. $y = \frac{8}{\sqrt{x^3}} + \sqrt[5]{x^4} - 3.$

207. $y = 2\cos 5x - \sqrt{9x - 5}.$

208. $y = 5tg\,9x + 3\ln(9 - x).$

209. $y = 8^{9x + x^2} - 5\ln(15 - 7x).$

210. $y = (7x + 5) \cdot e^{\sin 4x}.$

211. $y = 3^{8ctgx} \cdot \arcsin 5x.$

212. $y = (2x^3 - x) \cdot \log_5(6 - 7x^2).$

213. $y = x^9 \cdot arctg\,2x.$

214. $y = \arccos\frac{9}{x^3}.$

215. $y = \frac{8x + 5}{2x^2 - x + 3}.$

216. $y = \frac{7x - 3}{3\sin 2x}.$

217. $y = \frac{\sqrt{8x^2 - 6x + 7}}{4 - x}.$

218. $y = \frac{7}{8\cos 9x}.$

219. $y = \frac{6}{5(2x - 11)^5}.$

220. $y = \left(7x^4 - \frac{9}{x} + 5x - 13\right)^3.$

221. $y = \frac{x^4 - 3x + 5}{\sqrt{x} - 4}.$

222. $y = \left(7x + 2x^5 - \frac{6}{x} + 1\right)^4.$

223. $y = 6tg^3(5x + 2).$

224. $y = 5arctg^2 3x.$

225. $y = \frac{1}{25}\cos^{10}(2x^2 + 3).$

226. $y = \frac{3\cos x}{\sin^2 x} - \frac{6}{\sqrt{x}}.$

227. $y=\ln(\sqrt{x}-9x^4)$.

228. $y=\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$.

229. $y=6e^{-3x}\cdot tg(8-5x)$.

230. $y=x^2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\ln x^3\right)$.

231. $y=7\cos(2x^2-e^{4-x^3})$.

232. $y=\sqrt[3]{\ln(9x^2+5x)-3e^{7x}-17}$.

233. $y=8^{4-9x}\cdot arctg\frac{1}{x}$.

234. $y=\sqrt[6]{\left(5x^2-3x^4\right)^5}+11$.

235д. $y=12x^3-7x^2+11x-1$.

236д. $y=5x^2-9x^4+3x-14$.

237д. $y=8-\frac{7x^4}{2}+\frac{5}{x^2}$.

238д. $y=8x^6-\sqrt[6]{x^5}+9x$.

239д. $y=9x\cdot\sqrt[4]{x^3}+5x$.

240д. $y=\frac{9}{6x+7}+\frac{3x+2}{9}$.

241д. $y=6tg8x+\sqrt{13-4x}$.

242д. $y=4\arccos(5x^3)-9$.

243д. $y=(8x-1)\cdot e^{15-x}$.

244д. $y=e^{6\cos 7x}\cdot ctg\,x^4$.

245д. $y=(3x-x^4)\cdot\sin(5x+2)$.

246д. $y=\frac{9x^2-6x+4}{3-4x}$.

247д. $y=\frac{2\sqrt{-3-4x-x^2}}{x+2}$.

248д. $y=\frac{6\cos 2x-1}{4x^3+5}$.

249д. $y=\sqrt{6\log_2 x-9x^2+4}-\frac{7x}{4}$.

250д. $y=\left(\ln\frac{9}{x}+3\cos x^2\right)^8$.

251д. $y=(5-9x-2x^4)^3$.

252д. $y=5-3(9+5x^2)^6$.

253д. $y=\sqrt{18-3e^{4x}}+\frac{6}{\sqrt{x^3}}$.

254д. $y=\frac{tg5x}{3}-\frac{2}{\sin^2 x}$.

255д. $y=5^{\cos^3(3-2x)}$.

256д. $y=\sin^6(8x^3-17)$.

257д. $y=3\left(\frac{8}{x^3}-5e^{-2x}\right)^4$.

258д. $y=9x^2\cdot\left(7-6x^5\right)^3$.

259д. $y=\cos\frac{7x}{2}-\sin\left(3x^2+2\right)$.

260д. $y=e^{3\sin 2x}\cdot\ln\left(8x^3+1\right)$.

Для функций, заданных параметрически, найти y'_x:

261. $\begin{cases} x = \ln\left(1+9t^2\right), \\ y = 4arctg\,3t. \end{cases}$

262. $\begin{cases} x = 3\cos^2 4t, \\ y = \sin 8t. \end{cases}$

263. $\begin{cases} x = \dfrac{2t-1}{t}, \\ y = \dfrac{5-t}{t}. \end{cases}$

264д. $\begin{cases} x = \left(3t^2+1\right)^3, \\ y = 18t^2 - 6t + 5. \end{cases}$

265д. $\begin{cases} x = t^4, \\ y = 6t + 2. \end{cases}$

266д. $\begin{cases} x = 3e^{-8t} + 2, \\ y = 4e^{5t} - 2. \end{cases}$

Найти y'_x для следующих функций, заданных неявно:

267. $e^{2x+y} + 2x^3 = 5y^2.$

268. $x\sin 2y + 3x^3 y = 2.$

269д. $x^2 - 2y^2 = 4xy.$

270. $x^5 - e^{-3y} = 2y + 3.$

Найти производные второго порядка следующих функций:

271. $y = \cos(6x+7).$

272. $y = 3(2x-7)^4.$

273. $y = \ln(9x^2 + 2x - 1).$

274. $y = e^{7x^3+2x}.$

275д. $y = 5^{9-2x}.$

276д. $y = \dfrac{1}{5}x^5 + 8x^3 - 7x.$

277д. $y = \sin(11 - 6x^2).$

278д. $y = 6arctg\,x^2.$

279. Вычислить $f''(0)$, если $f(x) = \dfrac{5}{(3x+1)^3}.$

280д. Вычислить $f'''(2)$, если $f(x) = -2e^{4-2x}.$

281. Показать, что функция $y = 7e^{2x} + 4e^{3x}$ удовлетворяет уравнению $y'' - 5y' + 6y = 0.$

282д. Показать, что функция $y = 8 - 11e^{-4x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y' = 0.$

283. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = 5 - 3x + x^2 - 2x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1.$

284. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = 6\sqrt{x-1} - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 5.$

285. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 \cdot \ln(2x-5)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3.$

286д. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = e^{x^2-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1.$

287д. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2x^2 + 8x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 3.$

Правило Лопиталя

Вычислить пределы:

288. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}.$

289. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}.$

290. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{tg3x}.$

291. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{\sin 6x}.$

292. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin^2 3x}.$

293. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x)\cdot tg\dfrac{x}{2}.$

294. $\lim\limits_{x\to +0} x \cdot \ln x.$

295д. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

296д. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - arctgx}{x^3}.$

297д. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}.$

298д. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1 - \sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x}.$

299д. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 3x}{x^3}.$

300д. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}.$

301д. $\lim\limits_{x\to +\infty} 8x \cdot e^{-x}.$

Монотонность функции. Экстремум

Найти интервалы возрастания и убывания следующих функций:

302. $y = 9x^2 - \dfrac{1}{2}x^4 + 7.$

303. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4.$

304. $y = e^{x^2 - 6x}.$

305. $y = \dfrac{8}{x^2 + 5}.$

306. $y=\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$.

307. $y=xe^{-x}$.

306д. $y=x^3+6x^2-11$.

307д. $y=\ln(x^2+4x+9)$.

308д. $y=\frac{2}{3}x^3-2x+1$.

309д. $y=3x+\frac{3}{x}+5$.

310д. $y=x^3+6x^2-11$.

311д. $y=\ln(x^2+4x+9)$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

312. $y=x^3-9x^2+15x-3$.

313. $y=\frac{x}{x^2+4}$.

314. $y=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$.

315. $y=x\ln x$.

316. $y=x+\sqrt{3-x}$.

317. $y=\frac{x^2-2x+1}{x+3}$.

318. $y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

319. $y=\frac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$.

320д. $y=x^4-4x^3+6x^2-4x$.

321д. $y=e^{6x-x^2-1}$.

322д. $y=\frac{2x^2-6}{x-2}$.

323д. $y=\frac{x^2}{1-x^2}$.

Найти наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

324. $y=x^4-8x^2+3$ на отрезке $[-2;2]$.

325. $y=\frac{1}{x^2-1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

326. $y=x^3+3x^2-24x+5$ на отрезке $[-5;1]$.

327. $y=tgx-x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

328д. $y=x^3+9x^2+24x-7$ на отрезке $[-6;-3]$.

329д. $y=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-3;2]$.

330д. $y=\frac{8}{x}+\frac{1}{2}x^2$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};4\right]$.

331*. Найти положительное число x, чтобы разность $x-x^2$ была наибольшей.

332*. Скорость роста популяции x задана формулой $y = 0{,}001x(100 - x)$, когда время выражается в днях. При каком размере популяции эта скорость максимальна?

333д*. Реакция организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

334. $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.

335. $y = (x-4)^5 + 4x + 4$.

336. $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

337. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

338. $y = xe^x$.

339. $y = \sqrt{x}(x-1)$.

340д. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

341д. $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.

342д. $y = \dfrac{x}{2} + arctgx$.

343д. $y = \ln(x^2 - 2x + 10)$.

Полное исследование функции и построение графика

Исследовать следующие функции и построить их графики:

344. $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.

345. $y = \dfrac{x}{x^2+16}$.

346. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

347. $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

348. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

349. $y = \left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2$.

350д. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

351д. $y = \dfrac{3x-1}{x}$.

352д. $y = x + \dfrac{4}{x+2}$.

353д. $y = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$.

5 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

5.1 Понятие функции двух переменных

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

Если каждой точке $M(x;y)$ множества D плоскости OXY по некоторому правилу (закону) f ставится в соответствие единственное число $z \in \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве D задана функция $z = f(M)$ или $z = f(x;y)$.

При этом x и y называются независимыми переменными,

z – зависимой переменной (функцией),

множество D называется областью определения функции.

Пример 5.1. Найти область определения функции: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение. Область определения задается условием: $1-x^2-y^2 \geq 0$ или $x^2+y^2 \leq 1$, то есть представляет собой единичный круг с центром в начале координат, включая границу (рисунок 5.1).

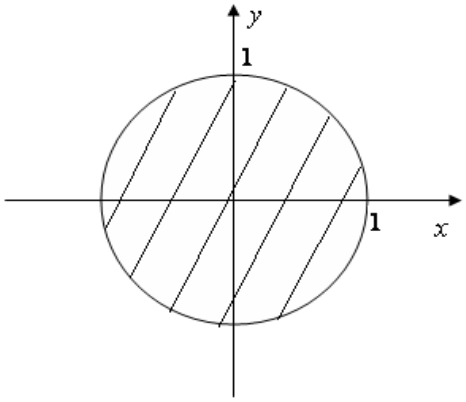


Рисунок 5.1 – Область определения функции $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Как известно, график функции одной переменной изображается на плоскости *OXY*, то есть в двумерном пространстве. Функцию двух переменных $z = f(x; y)$ также можно изобразить графически. Её график является поверхностью в трехмерном пространстве (рисунок 5.2).

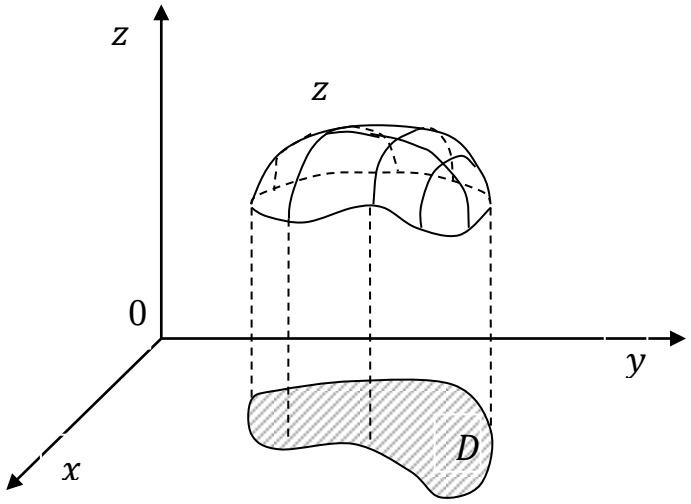


Рисунок 5.2 – График функции двух переменных

Например, рассмотрим функцию $z = x^2 + y^2$.

Данная функция определена для любых пар действительных переменных $(x; y)$. Поэтому областью определения этой функции является множество всех точек плоскости *OXY*.

Графиком данной функции является поверхность, называемая параболоидом (рисунок 5.3).

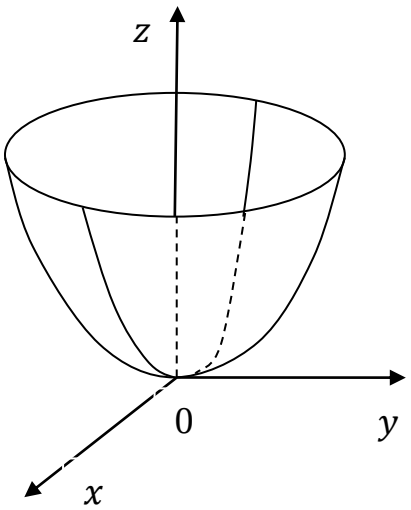


Рисунок 5.3 – Параболоид

Линии уровня

Понятие линии уровня широко используется в описании различных физических полей (температура, давление и другие).

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x;y)$ называется плоская кривая, которая получается при пересечении графика этой функции плоскостью *OXY*: $z = C$, где $C = const$.

Обычно линии уровня, соответствующие различным значениям постоянной величины *C*, проецируются на одну плоскость (чаще всего *OXY*). Тогда их удобно анализировать и с их помощью исследовать сложенный характер поверхности, описываемой функцией $z = f(x;y)$.

Таким образом, можно сказать, что линии уровня функции $z = f(x;y)$ – это семейство непересекающихся кривых на координатной плоскости *OXY*, описывается уравнением вида $f(x;y) = C$.

Обычно берут арифметическую прогрессию чисел C_i с постоянной разностью *h*. Тогда по взаимному расположению линий уровня можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x;y)$: там, где функция изменяется быстрее, линии уровня сгущаются, а там, где поверхность пологая, линии уровня располагаются реже.

Пример 5.2. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Решение. Линии уровня данной функции – это семейство кривых на плоскости *OXY*, которое описывается уравнением

$$x^2 + y^2 - 2y = C.$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$x^2 + y^2 - 2y = x^2 + \left(y^2 - 2y + 1\right) - 1 = x^2 + (y-1)^2 - 1.$$

Тогда получим уравнение вида $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$, которое описывает семейство окружностей с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $R = \sqrt{C+1}$.

Точка $(0;1)$ – это вырожденная линия уровня, соответствующая минимальному значению функции $z = -1$ и достигающемуся в точке $(0;1)$. Линии уровня – концентрические окружности, радиус которых увеличивается с ростом $z = C$, причем расстояния между линиями с одинаковым шагом уровня уменьшаются по мере удаления от центра. Линии уровня позволяют представить график данной функции (рисунок 5.4).

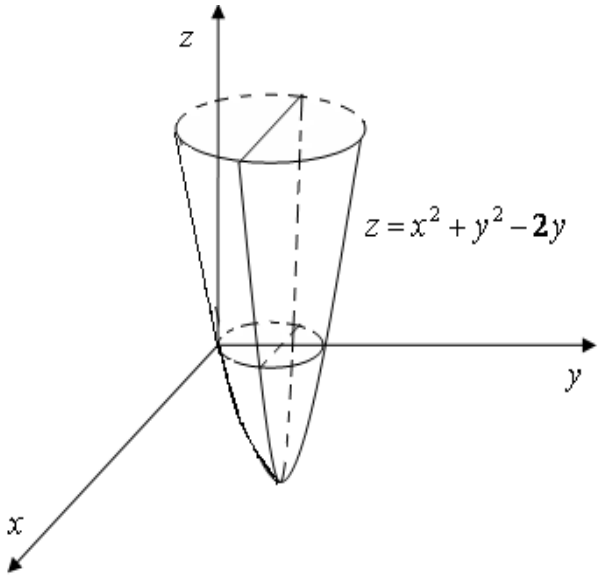


Рисунок 5.5 – График функции $z = x^2 + y^2 - 2y$

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

δ-окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество точек плоскости *OXY*, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < \delta$ и обозначается $U_\delta(M_0)$.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена на множестве D плоскости OXY. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0; y_0) \in D$ такую, что любая δ-окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества D, не совпадающую с $M_0(x_0; y_0)$.

Число A называется ***пределом функции*** $z = f(M)$ в точке M_0 (или при $M \to M_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in D \bigcap U_\delta(M_0)$, не совпадающих с M_0, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A$.

Число A называется ***пределом функции*** $z = f(M)$ при $M \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $R > 0$ такое, что для всех точек $M(x; y) \in D$, удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + y^2} > R$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут: $\lim\limits_{M \to \infty} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x; y) = A$.

Функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если:

1) функция определена в точке $M_0(x_0;y_0)$;

2) функция имеет конечный предел при $x \to x_0$ и $y \to y_0$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной на множестве***, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

5.2 Дифференцирование функции нескольких переменных

Частные приращения и частные производные

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ плоскости *OXY*.

Приращение переменной x определяется как разность $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$.

Найдём соответствующее приращение функции $z = f(x;y)$:

$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ – эта разность называется ***частным приращением функции*** $z = f(x;y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Аналогичным образом определяется приращение переменной y: $\Delta y = y - y_0$ и соответствующее ему частное приращение функции $z = f(x;y)$ по переменной y: $\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$.

Частной производной по переменной x (y) функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ называется предел (если он существует) отношения частного приращения $\Delta_x z$ $(\Delta_y z)$ к соответствующему приращению аргумента Δx (Δy), когда $\Delta x \to 0$ $(\Delta y \to 0)$.

Частная производная по x от функции $z = f(x;y)$ обозначается одним из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Частная производная по y от функции $z = f(x;y)$ обозначается одним из символов $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Тогда по определению: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Так как $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, то частную производную по x от функции $z = f(x; y)$ находим в предположении, что y – постоянная.

Аналогично определяется частная производная по y.

Пример 5.3. Найти частные производные функций:

1. $z = 5x^2 + 6xy - 4y^3$.
2. $z = x^5 y^3 + e^{3x} - \ln(2y-1)$.
3. $z = \sin\left(3x^3 - 2y^4\right)$.

Решение. Считая y постоянной, находим производные по x:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(5x^2 + 6xy - 4y^3\right)'_x = 5 \cdot 2x + 6y \cdot 1 - 0 = 10x + 6y$.
2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(x^5 y^3 + e^{3x} - \ln(2y-1)\right)'_x = y^3 \cdot 5x^4 + e^{3x} \cdot 3 - 0 = 5x^4 y^3 + 3e^{3x}$.
3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(\sin\left(3x^3 - 2y^4\right)\right)'_x = \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(3x^3 - 2y^4\right)'_x =$

$= \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(3 \cdot 3x^2 - 0\right) = 9x^2 \cos\left(3x^3 - 2y^4\right)$.

Считая x постоянной, находим производную по y:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(5x^2 + 6xy - 4y^3\right)'_y = 0 + 6x \cdot 1 - 4 \cdot 3y^2 = 6x - 12y^2$.
2. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(x^5 y^3 + e^{3x} - \ln(2y-1)\right)'_y = x^5 \cdot 3y^2 + 0 - \dfrac{(2y-1)'_y}{2y-1} =$

$= 3x^5 y^2 - \dfrac{2}{2y-1}$.
3. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(\sin\left(3x^3 - 2y^4\right)\right)'_y = \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(3x^3 - 2y^4\right)'_y =$

$= \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(0 - 2 \cdot 4y^3\right) = -8y^3 \cos\left(3x^3 - 2y^4\right)$.

Для функции любого числа переменных частные производные определяются так же, как и для функции двух переменных.

Пример 5.4. Дана функция $u = x^3z - 2yz + \sin 2x \cdot 3^z + 8y^2$, найти частные производные.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y,\ z = C) = \left(x^3z - 2yz + \sin 2x \cdot 3^z + 8y^2\right)'_x = 3x^2 \cdot z + 2\cos 2x \cdot 3^z + 0 =$$

$$= 3x^2z + 2\cos 2x \cdot 3^z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x,\ z = C) = \left(x^3z - 2yz + \sin 2x \cdot 3^z + 8y^2\right)'_y = 0 - 2 \cdot 1 \cdot z + 0 + 8 \cdot 2y =$$

$$= -2 \cdot z + 16y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x,\ y = C) = \left(x^3z - 2yz + \sin 2x \cdot 3^z + 8y^2\right)'_z = x^3 \cdot 1 - 2y \cdot 1 + \sin 2x \cdot 3^z \cdot \ln 3 + 0 =$$

$$= x^3 - 2y + \sin 2x \cdot 3^z \cdot \ln 3.$$

Полный дифференциал функции

Полным приращением функции $z = f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$.

Функция $z = f(x;\ y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon \cdot \rho, \qquad (5.1)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x;\ \Delta y)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$,

A и B – числа, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Если функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то линейная функция $dz = A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется ***дифференциалом*** этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Обозначим $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$, получим

$$dz = Adx + Bdy. \qquad (5.2)$$

Теорема. Необходимое условие дифференцируемости функции двух переменных. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то она имеет частные производные по x и по y в этой точке, причём

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = A \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = B.$$

Из данной теоремы и формулы (5.2) следует, что дифференциал функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ можно записать в виде

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy$ или, опуская рассматриваемую точку,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy. \qquad (5.3)$$

Пример 5.5. Найти полный дифференциал функции $z = 2xy - y^4 + \cos(3x - y)$.

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(2xy - y^4 + \cos(3x - y)\right)'_x = 2 \cdot 1 \cdot y - 0 - \sin(3x - y) \cdot (3x - y)'_x =$$

$$= 2y - \sin(3x - y) \cdot (3 \cdot 1 - 0) = 2y - 3\sin(3x - y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(2xy - y^4 + \cos(3x - y)\right)'_y = 2x \cdot 1 - 4y^3 - \sin(3x - y) \cdot (3x - y)'_y =$$

$$= 2x - 4y^3 - \sin(3x - y) \cdot (0 - 1) = 2x - 4y^3 + \sin(3x - y).$$

Применяя формулу (5.3), получим полный дифференциал dz:

$$dz = [2y - 3\sin(3x - y)]dx + \left[2x - 4y^3 + \sin(3x - y)\right]dy.$$

Градиент

Градиентом функция $z = f(x; y)$ дифференцируемой в точке $M_0(x_0; y_0)$, называется вектор, координаты которого соответственно равны значениям частных производных в этой точке, то есть

$$grad\ z(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) \cdot \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) \cdot \bar{j} \qquad (5.4)$$

или

$$grad\ z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (5.5)$$

Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в точке.

Пример 5.6. Найти градиент функции $z = 2e^{xy+4} + 3y^2$ в точке $M_0(-2; 2)$.

Решение. Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(2e^{xy+4} + 3y^2\right)'_x = 2e^{xy+4} \cdot (xy+4)'_x + 0 = 2e^{xy+4} \cdot (1 \cdot y + 0) =$$

$$= 2ye^{xy+4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(2e^{xy+4} + 3y^2\right)'_y = 2e^{xy+4} \cdot (xy+4)'_y + 3 \cdot 2y =$$

$$= 2e^{xy+4} \cdot (x \cdot 1 + 0) + 6y = 2xe^{xy+4} + 6y.$$

Вычислим их значения в точке $M_0(-2; 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-2; 2) = 2 \cdot 2e^{-2 \cdot 2+4} = 4, \ \frac{\partial z}{\partial y}(-2; 2) = 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2 \cdot 2+4} + 6 \cdot 2 = 8.$$

Тогда $grad\, z(-2; 2) = 4\bar{i} + 8\bar{j}$.

Для функции любого числа переменных градиент определяется так же, как и для функции двух переменных.

Пример 5.7. Найти градиент функции $u = x^3yz + xy^2 - yz$ в точке $M_0(1; 2; 3)$.

Решение. Найдём частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y, z = C) = \left(x^3yz + xy^2 - yz\right)'_x = 3x^2yz + 1 \cdot y^2 - 0 = 3x^2yz + y^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x, z = C) = \left(x^3yz + xy^2 - yz\right)'_y = x^3 \cdot 1 \cdot z + x \cdot 2y - 1 \cdot z = x^3z + 2xy - z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x, y = C) = \left(x^3yz + xy^2 - yz\right)'_z = x^3y \cdot 1 + 0 - yz = x^3y - y.$$

Вычислим их значения в точке $M_0(1;2;3)$:

$\frac{\partial z}{\partial x}(1;2;3)=3\cdot1\cdot2\cdot3+2^2=22$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;2;3)=1\cdot3+2\cdot1\cdot2-3=4$,

$\frac{\partial z}{\partial z}(1;2;3)=1\cdot2-2=0$.

Тогда $grad\,u(1;2;3)=(22;4;0)$.

Частные производные высших порядков

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена на множестве D плоскости OXY. И в каждой точке $M(x;y)\in D$ существуют частные производные $f'_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $f'_y=\frac{\partial z}{\partial y}$. Тогда частные производные $f'_x(x;y)$ и $f'_y(x;y)$ являются функциями с областью определения D. Они называются ***частными производными первого порядка***.

Частные производные от функций $f'_x(x;y)$ и $f'_y(x;y)$ называются ***частными производными второго порядка*** функции $z=f(x;y)$, то есть

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x,\ f''_{yy}=(f'_y)'_y,\ f''_{xy}=(f'_x)'_y,\ f''_{yx}=(f'_y)'_x$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогичным образом определяются частные производные более высоких порядков.

Пример 5.8. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^3y^2+3x^5+2y-1$.

Решение. 1. Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$\frac{\partial z}{\partial x}=(y=C)=\left(x^3y^2+3x^5+2y-13\right)'_x=x^2y^2+15x^4$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=(x=C)=\left(x^3y^2+3x^5+2y-13\right)'_y=2x^3y+2$.

2. Найдём производные второго порядка по определению:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(x^2y^2+15x^4\right)'_x=(y=C)=6xy^2+60x^3$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(x^2 y^2 + 15x^4\right)'_y = (x = C) = 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x^3 y + 2\right)'_y = (x = C) = 2x^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2x^3 y + 2\right)'_x = (y = C) = 6x^2 y.$$

Пример 5.9. Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin\dfrac{8x-3}{y}$.

Решение. 1. Найдём частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(\sin\frac{8x-3}{y}\right)'_x = \cos\frac{8x-3}{y}\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_x = \cos\frac{8x-3}{y}\cdot\frac{8\cdot 1-0}{y} =$$

$$= \frac{8}{y}\cos\frac{8x-3}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(\sin\frac{8x-3}{y}\right)'_y = \cos\frac{8x-3}{y}\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_y = \cos\frac{8x-3}{y}\cdot\left(-\frac{(8x-3)\cdot 1}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{8x-3}{y^2}\cos\frac{8x-3}{y}.$$

2. Найдём производные второго порядка по определению:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{8}{y}\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x = (y = C) = \frac{8}{y}\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x =$$

$$= \frac{8}{y}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_x = \frac{8}{y}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\frac{8}{y} = -\frac{64}{y^2}\sin\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{8}{y}\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y = (x = C) = \left(\frac{8}{y}\right)'_y\cdot\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8}{y}\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{8}{y^2}\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8}{y}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{8}{y^2}\cos\frac{8x-3}{y} - \frac{8}{y}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}\cdot\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{8}{y^2}\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8(8x-3)}{y^3}\sin\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{8x-3}{y^2}\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y = (x = C) =$$

$$= \left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)'_y \cdot \cos\frac{8x-3}{y} + \left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{2(8x-3)}{y^3}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} - \frac{8x-3}{y^2}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{2(8x-3)}{y^3}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8x-3}{y^2}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}\cdot\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{2(8x-3)}{y^3}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} - \left(\frac{8x-3}{y^2}\right)^2\cdot\sin\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{8x-3}{y^2}\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x = (y = C) =$$

$$= \left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)'_x \cdot \cos\frac{8x-3}{y} + \left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x =$$

$$= -\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} - \frac{8x-3}{y^2}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_x =$$

$$= -\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8x-3}{y^2}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}\cdot\frac{8}{y} = -\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8(8x-3)}{y^3}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}$$

Частная производная второго порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной производной.

В приведённых примерах мы получили, что смешанные производные равны, то есть $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Это равенство не случайно. В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть частные производные $f'_x(x;y)$ и $f'_y(x;y)$ дифференцируемы в точке $M_0(x_0;y_0)$, тогда $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5.3 Экстремум. Исследование функций двух переменных с помощью частных производных

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена на множестве D плоскости OXY.

Точка $M_0(x_0;y_0)$ из области определения функции $z = f(x;y)$ называется ***точкой локального максимума*** (***минимума***), если существует такая δ-окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что для всех $M(x;y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0;y_0) \geq f(x;y)$ $(f(x_0;y_0) \leq f(x;y))$.

Точки локального максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

На рисунке 5.5 M_1 – точка локального минимума, M_2 – точка локального максимума.

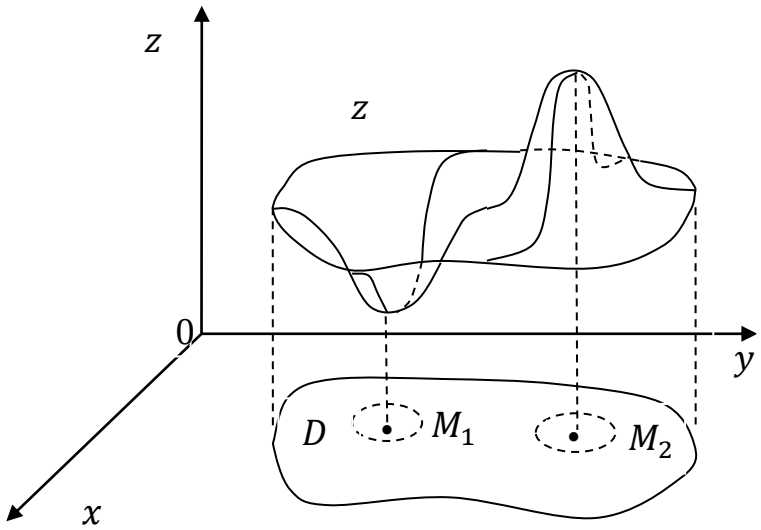


Рисунок 5.5 – Точки локального экстремума

Теорема. Необходимое условие экстремума функции двух переменных. Если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ и частные производные первого порядка, то её частные производные в этой точке равны нулю, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 0;\ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 0. \tag{5.6}$$

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются ***стационарными точками*** функции $z = f(x; y)$ (точками возможного экстремума).

Для исследования функции $z = f(x; y)$ на экстремум воспользуемся следующей теоремой.

Теорема. Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ является стационарной точкой функции $z = f(x; y)$, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков в некоторой окрестности этой точки. Составим выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2. \tag{5.7}$$

Если $\Delta(M_0) < 0$, то в стационарной точке $M_0(x_0; y_0)$ нет экстремума.

Если $\Delta(M_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ есть экстремум, причем максимум, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) < 0$, и минимум, если $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) > 0$.

Если $\Delta(P_0) = 0$, то требуется дополнительное исследование.

При этом выражение (5.7) называется дискриминантом.

Пример 5.10. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

Решение. 1. Данная функция определена для любой пары значений переменных $(x; y)$. Поэтому областью определения этой функции является множество всех точек плоскости *OXY*.

2. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(3x + 6y - x^2 - xy - y^2\right)'_x = 3 - 2x - y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(3x + 6y - x^2 - xy - y^2\right)'_y = 6 - x - 2y.$$

3. Найдем стационарные точки. Для этого приравняем частные производные первого порядка к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3-2x-y=0, \\ 6-x-2y=0. \end{cases}$$

Находим $x=0$ и $y=3$. Следовательно, $M_0(0;3)$ есть стационарная точка функции z.

4. Составляем выражение Δ. Для этого находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(3-2x-y)'_x=(y=C)=-2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(3-2x-y)'_y=(x=C)=-1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(6-x-2y)'_y=(x=C)=-2.$$

Тогда $\Delta=(-2)\cdot(-2)-(-1)^2=3$.

Так как $\Delta(M_0)=3>0$, то в точке $M_0(0;3)$ функция имеет экстремум. Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=-2<0$, то в точке $M_0(0;3)$ функция имеет максимум.

$$z_{max}=z(0;3)=3\cdot 0+6\cdot 3-0^2-0\cdot 3-3^2=18-9=9.$$

5.4 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов – это метод, который часто используют при обработке экспериментальных данных в тех случаях, когда теория дает закон, определяющий уравнение связи между физическими величинами, но с некоторыми неопределенными параметрами, для определения которых проводятся эксперименты.

Например, удлинение ΔL линейного образца с начальной длиной L_0 и начальной температурой T_0 прямо пропорционально приращению его температуры T: $\Delta L=\alpha L_0(T-T_0)$, где α − коэффициент линейного расширения, который определяется экспериментально.

В соответствии с законом Гука имеет место линейная связь между напряжениями и деформациями упругого деформируемого тела.

В случае линейной связи двух физических величин x, Y применим соотношение

$$Y(x)=ax+b \qquad (5.8)$$

с двумя параметрами *a*, *b*, для определения которых проводят эксперименты и для заданных значений $x_1, x_2,\ldots, x_n$ определяют соответствующие им значения $y_1, y_2,\ldots y_n$.

Полученные результаты записывают в таблицу

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	⋯	y_n

Если полученные данные нанести на график как точки с координатами (*x*; *y*) на плоскости *OXY*, то в результате получится, что эти точки не лежат на одной прямой (рисунок 5.6). Это можно объяснить наличием погрешностей эксперимента.

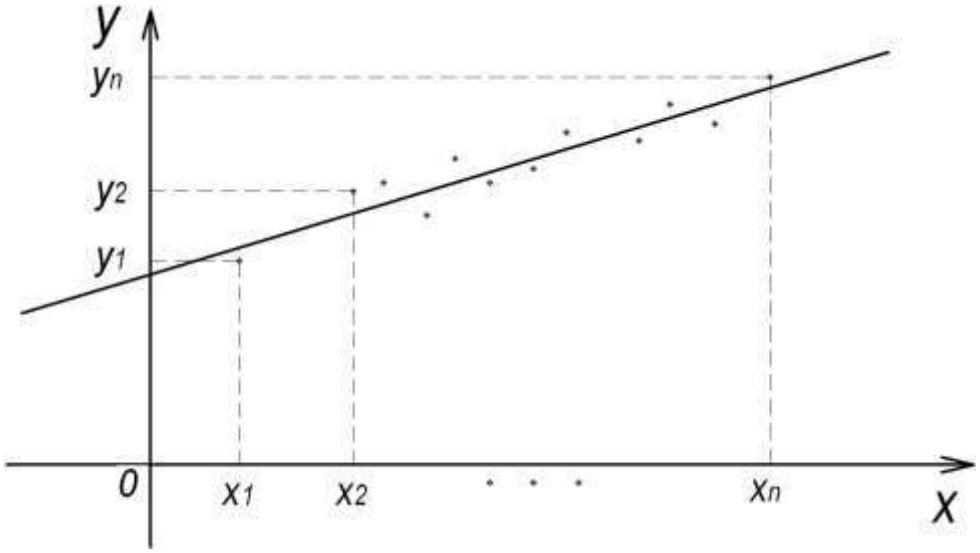


Рисунок 5.6 – Иллюстрация метода наименьших квадратов

Для определения параметров *a* и *b* уравнения (5.8) используется ***метод наименьших квадратов***. Суть данного метода заключается в том, что неизвестные коэффициенты *a* и *b* определяются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений всех точек, полученных экспериментально, от теоретической прямой (5.8) была наименьшей.

Поскольку у нас имеются значения x_i и y_i, то $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$.

Эта сумма является функцией двух переменных *a* и *b*:

$$f(a;b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2 \qquad (5.9)$$

Чтобы определить параметры a и b, воспользуемся необходимыми условиями экстремума функции двух переменных: $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ и $\frac{\partial f}{\partial b}=0$

Продифференцируем равенство (5.9) по переменным a и b

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2(ax_1+b-y_1)\cdot x_1+2(ax_2+b-y_2)\cdot x_2+\ldots+2(ax_n+b-y_n)\cdot x_n,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=2(ax_1+b-y_1)+2(ax_2+b-y_2)+\ldots+2(ax_n+b-y_n)$$

и приравняем результаты к нулю:

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)\cdot x_i=0 \quad \text{и} \quad 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$$

Преобразуем каждое из полученных уравнений:

1) $2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)\cdot x_i=0,$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a\,x_i^2+b\,x_i-y_i\,x_i\right)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a\,x_i^2+\sum_{i=1}^{n}b\,x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\,x_i=0,$$

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\,x_i\,.$$

2) $2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0,$

$$\sum_{i=1}^{n}a\,x_i+\sum_{i=1}^{n}b-\sum_{i=1}^{n}y_i=0,$$

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

Таким образом, параметры a и b определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\,x_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \qquad (5.10)$$

Покажем, что для найденных таким способом значений параметров a и b функция $f(a;b)$ имеет минимум:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} = 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n = 2\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Тогда $\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 =$

$$= 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \left(x_i - x_j\right)^2 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 .$$

Тогда по достаточному условию существования экстремума, функция $f(a;b)$ имеет минимум.

Подставляя найденные значения a и b в равенство (5.8), получим линейную функцию, наилучшим образом отражающую зависимость между величинами x и y, найденными экспериментально.

Пример 5.11. Описать с помощью линейной зависимости $Y(x) = ax + b$ следующие экспериментальные данные:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Решение. Для составления системы (5.10) и определения коэффициентов a и b вычислим следующие величины:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i = 21,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 39,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 11,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 10 .$$

Тогда система (5.10) примет вид $\begin{cases} 39a + 11b = 21, \\ 11a + 4b = 10. \end{cases}$

Решая эту систему, определим параметры: $a = -\dfrac{26}{35}$, $b = \dfrac{159}{35}$.

Подставим полученные значения в (5.8) и получим искомую зависимость $Y(x)=-\frac{26}{35}x+\frac{159}{35}$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции нескольких переменных.
2. Дайте определения частных производных функции нескольких переменных.
3. Запишите формулу градиента функции двух переменных.
4. Каковы необходимые условия экстремума функции двух переменных?
5. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на экстремум.
6. Перечислите основные этапы метода наименьших квадратов.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Дифференцирование функции нескольких переменных

Найти частные производные первого порядка следующих функций:

354. $z=5x^3-3xy+2y$

355. $z=5x^2y^3-4xy^2+2xy-7x^2$.

356. $z=ln\left(x^2+y^2\right)$.

357. $z=\frac{xy^2}{x-y}$.

358. $z=sin\frac{y}{x}$.

359д. $z=arctg\frac{x}{y}$.

360д. $z=arctgx-xy+5y$.

361д. $z=x^3\sin y+\ln x-y^2$.

362. $u=x\ln y+ye^{2z}-arctgx$.

363д. $u=x^2yz-x\sin(yz)+xe^{yz}$.

364. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$, если $z=ln\left(x^2+xy+y^2\right)$.

365д. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, если $z=\frac{xy}{x+y}$.

Найти полные дифференциалы следующих функций:

366. $z=x\sin y+e^xy^3$.

367. $z=y^2tg(9x-4)$.

368. $z=x^2y^3+x^2-5y^2$ в точке $P(2;1)$.

369д. $z=\left(5x+y^4\right)^3$.

370д. $z=y^3+x^2\,ln(\sin y)$.

371д. $z=x^3+y^4$ в точке $P(1;-2)$.

Найти частные производные второго порядка следующих функций:

372. $z = arctgx + x^2 \ln y + xy^3$.

373. $z = x^3 y - \cos 4y$.

374. $z = ln\left(x^2 + y\right)$.

375. $z = arctg\,\frac{y}{2x}$.

376. $z = e^{7xy+5}$.

377д. $z = \left(x^5 + 3\right)\cdot \sin\left(6y - 1\right)$.

378д. $z = x^4 e^y + 2x + y$.

379д. $z = 2x^2 y^3 - 7xy + 5x^3 - 4xy^2$.

380. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, если $z = \frac{sin\left(x+3y\right)}{e^{x+3y}}$.

Найти градиент функции в указанной точке:

381. $z = 2x^2 y - xy^2 + 3x - 4$ в точке $M\left(-2; 2\right)$.

382. $z = arctg\,\frac{3y}{x}$ в точке $P\left(1; 1\right)$.

383. $z = \ln\left(6xy^2 + 3y + 4\right)$ в точке $M\left(-1; 1\right)$.

384. $u = \sqrt{xy - yz + 2xz + 1}$ в точке $P\left(1; -1; 3\right)$.

385д. $z = 5x^2 + 2xy - 3y^3$ в точке $P\left(2; -1\right)$.

386д. $z = \sqrt{x^2 y + 17y}$ в точке $M\left(-1; 2\right)$.

387д. $z = e^{x^3 - 5y - 2}$ в точке $P\left(3; 5\right)$.

388д. $u = 3xy^2 - 2z^3 - yz$ в точке $M\left(-1; 2; -1\right)$.

Экстремум. Исследование функций двух переменных с помощью частных производных

Исследовать на экстремум следующие функции:

389. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

390. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

391. $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9$.

392*. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

393д. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2$.

394д. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

Метод наименьших квадратов

395. Методом наименьших квадратов выровнять по прямой $Y = ax + b$ следующие эмпирические данные:

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

396. Методом наименьших квадратов выровнять по прямой $Y = ax + b$ следующие эмпирические данные:

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

397д. Методом наименьших квадратов выровнять по прямой $y = ax + b$ следующие эмпирические данные:

x	1	1,5	2	2,5	3
y	2,1	2,2	2,7	2,8	2,85

6 Интегральное исчисление функции одной переменной

6.1 Понятие первообразной и неопределённого интеграла

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для всех $x \in (a;b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и при этом $F'(x) = f(x)$.

Например, каждая из функций $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3 + 1$, $F_3(x) = x^3 - 11{,}3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на множестве всех действительных чисел, так как $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3 + 1)' = 3x^2$, $(x^3 - 11{,}3)' = 3x^2$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Теорема. Об общем виде первообразной.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ на этом интервале задаётся формулой $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Знак « $\int$ » называется знаком неопределённого интеграла,

$f(x)$ – подынтегральной функцией,

$f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Процесс нахождения неопределённого интеграла от заданной функции $f(x)$ называют интегрированием этой функции или «взятием неопределённого интеграла».

Не каждый неопределённый интеграл может быть выражен через элементарные функции. Интегралы такого типа принято называть «неберущимися». Например, неберущимися являются следующие интегралы:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx.$$

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Покажем это: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x).$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

Воспользовавшись формулой для дифференциала функции $df(x) = f'(x)dx$ и свойством 1, получим $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной: $\int dF(x) = F(x)+C.$

Так как $d(F(x)) = F'(x)dx$, то $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, то есть $\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k = const$.

Доказательство: $k\int f(x)dx = k\left[F(x)+C\right] = k\,F(x)+C_1 = \int k\ f(x)dx.$

5. Интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от данных функций, то есть

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а $G(x)$ – одна из первообразных функции $g(x)$ на интервале $(a;b)$, то

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \left[F(x)+C_1\right] \pm \left[G(x)+C_2\right] = \left[F(x)\pm G(x)\right]+(C_1+C_2) =$$
$$= \left[F(x)\pm G(x)\right]+C = \int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx.$$

6.2 Таблица основных неопределённых интегралов

Все формулы неопределённых интегралов доказываются непосредственной проверкой того, что производная правой части формулы равна подынтегральной функции в левой части.

Таблица неопределённых интегралов:

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1$

2.1. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$

2.2. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

3. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

4.1. $\int e^u du = e^u + C$

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u \, du = \sin u + C$

7. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$

8. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

11. $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\sin u| + C$

13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{u}{a} + C$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{u}{a} + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

Например, доказательство формулы 13, из приведённой выше таблицы, выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C\right)'=\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)'+C'=\frac{1}{a}\cdot\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{u'}{a}}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{u'}{\left(\frac{a^2+u^2}{a^2}\right)}=\frac{u'}{a^2+u^2}.$$

Это и означает, что $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$.

6.3 Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Отыскание неопределенного интеграла с помощью таблицы основных интегралов и тождественных преобразований называют непосредственным интегрированием.

Пример 6.1. Найти неопределённые интегралы $\int x^5\cdot\sqrt[4]{x^3}\,dx$, $\int\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^3}dx$.

Решение. Если подынтегральная функция представляет собой произведение или частное различных степеней *x*, то её представляют как степенную функцию вида x^n, а затем применяют 2 формулу таблицы интегралов.

1. $\int x^5\cdot\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^5\cdot x^{\frac{3}{4}}dx=\int x^{\frac{23}{4}}dx=\frac{x^{\frac{27}{4}}}{\frac{27}{4}}+C=\frac{4x^{6\frac{3}{4}}}{27}+C=\frac{4x^6\sqrt[4]{x^3}}{27}+C.$

2. $\int\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^3}dx=\int\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x^3}dx=\int x^{\frac{2}{5}-3}dx=\int x^{-\frac{13}{5}}dx=\frac{x^{-\frac{8}{5}}}{-\frac{8}{5}}+C=-\frac{5}{8x^{\frac{8}{5}}}+C=-\frac{5}{8x^{1\frac{3}{5}}}+C=$

$$=-\frac{5}{8x\sqrt[5]{x^3}}+C.$$

В примере 6.1 мы применили следующие свойства степеней:

$$\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}},\quad a^n\cdot a^k=a^{n+k},\quad\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}.$$

Замечание. Нет необходимости после каждого слагаемого ставить произвольную постоянную, потому что сумма произвольных постоянных есть также произвольная постоянная, которую записывают в конце.

Пример 6.2. Найти неопределённый интеграл

$$\int\left(5x^4-2\cos x+\frac{3}{\sqrt{x^2-16}}+7\right)dx.$$

Решение. $\int\left(5x^4-2\cos x+\frac{3}{\sqrt{x^2-16}}+7\right)dx=$ ← применим 5 свойство и разобьём данный интеграл на четыре интеграла

$$=\int 5x^4dx-\int 2\cos x dx+\int\frac{3dx}{\sqrt{x^2-16}}+\int 7dx=$$ ← применим 4 свойство и вынесем в каждом интеграле постоянный множитель

$$=5\int x^4dx-2\int\cos x dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}+7\int dx=$$

формула 2 таблицы интегралов; формула 6 таблицы интегралов; формула 16 таблицы интегралов; формула 1 таблицы интегралов

$$=5\cdot\frac{x^5}{5}-2\sin x+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+7x+C=$$

$$=x^5-2\sin x+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+7x+C.$$

Пример 6.3. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{x^4-7x+5}{x^2}dx$.

Решение. $\int\frac{x^4-7x+5}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^4}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)dx=\int x^2\,dx-7\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{1}{x^2}dx=$

Разделим почленно числитель на знаменатель; сократим дроби и применим 5 и 4 свойства; формула 2 таблицы интегралов; формула 3 таблицы интегралов; формула 2.2 таблицы интегралов

$$=\frac{x^3}{3}-7\ln|x|+5\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+C=\frac{x^3}{3}-7\ln|x|-\frac{5}{x}+C.$$

Пример 6.4. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$.

Решение. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} dx = 2\int \sin x dx = -\cos x + C$.

В числителе мы применили тригонометрическую формулу «синус двойного угла», а затем формулу 5 таблицы интегралов.

Пример 6.5. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{4x^2 - 8}$.

Решение. $\int \frac{dx}{4x^2 - 8} = \int \frac{dx}{4\left(x^2 - 2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - 2} =$ ← применим формулу 14 таблицы интегралов, для этого преобразуем «2»

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}\right| + C = \sqrt{2}\, ln\left|\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}\right| + C.$$

Пример 6.6. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2x^2}{x^2 + 3} dx$.

Решение. Воспользуемся искусственным приемом: к числителю дроби прибавим и вычтем одно и то же число 3, после чего выполним деление числителя на знаменатель.

$$\int \frac{2x^2}{x^2 + 3} dx = 2\int \frac{\left(x^2 + 3\right) - 3}{x^2 + 3} dx = 2\int \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} - \frac{3}{x^2 + 3}\right) dx = 2\int dx - 6\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= 2x - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C = x - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 6.7. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2dx}{\sqrt{9 - 9x^2}}$.

Решение. $\int \frac{2dx}{\sqrt{9 - 9x^2}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{9\left(1 - x^2\right)}} = \int \frac{2dx}{3\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$

$$= \frac{2}{3} \arcsin x + C.$$

Метод замены переменной (метод подстановки) в неопределённом интеграле

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет обратную функцию $t=\psi(x)$, тогда справедлива формула

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\psi(x)}.$$

Эту формулу называют ***подстановкой*** или ***формулой замены переменной в неопределённом интеграле***. Смысл при применении подстановки состоит в следующем: подстановку можно подобрать так, что правая часть будет более простой, чем левая.

Пример 6.8. Найти неопределённый интеграл $\int \operatorname{tg}(x-3)dx$.

Решение. Воспользуемся формулой 11 таблицы интегралов.

Так как $d(x-3)=(x-3)'dx=dx$, то

$$\int \operatorname{tg}(x-3)dx=\int \operatorname{tg}(x-3)d(x-3)=-\ln\left|\cos(x-3)\right|+C.$$

Замечание. Такой метод интегрирования называют ***методом подведения под знак дифференциала***.

Пример 6.9. Найти неопределённый интеграл $\int (7x-5)^9 dx$.

Решение. Воспользуемся формулой 2 таблицы интегралов.

Так как $d(7x-5)=(7x-5)'dx=7dx$, то $dx=\frac{1}{7}d(7x-5)$. Тогда

$$\int (7x-5)^9 dx=\frac{1}{7}\int (7x-5)^9 d(7x-5)=\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x-5)^{10}}{10}+C=\frac{1}{70}(7x-5)^{10}+C.$$

Пример 6.10. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3xdx}{8-x^2}$.

Решение. Сделаем замену переменной, ориентируясь на формулу 2 таблицы интегралов.

$$\int \frac{3xdx}{8-x^2} = \left\| \begin{array}{l} u = 8-x^2 \\ du = \left(8-x^2\right)' dx \\ du = -2xdx \\ x\,dx = \dfrac{du}{-2} \end{array} \right\| = \int \frac{3 \cdot \dfrac{du}{-2}}{u} = -\frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{3}{2}\ln|u| + C\Big|_{u=8-x^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|8-x^2\right| + C.$$

Пример 6.11. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{7-3x}{\sqrt{5x^2+8}}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\int \frac{7-3x}{\sqrt{5x^2+8}}dx = \int \frac{7dx}{\sqrt{5x^2+8}} - \int \frac{3x\,dx}{\sqrt{5x^2+8}}.$$

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

$$1)\int \frac{7dx}{\sqrt{5x^2+8}} = \left\| \begin{array}{l} u^2 = 5x^2 \\ u = \sqrt{5}x \\ du = \left(\sqrt{5}x\right)' dx \\ du = \sqrt{5}dx \\ dx = \dfrac{du}{\sqrt{5}} \end{array} \right| \begin{array}{l} a^2 = 8 \end{array} \Bigg\| = \int \frac{7 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{5}} ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C\Big|_{u=\sqrt{5}x,\ a^2=8} = \frac{7}{\sqrt{5}} ln\left|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+8}\right| + C;$$

$$2)\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{5x^2+8}} = \left\| \begin{array}{l} v = 5x^2+8 \\ dv = \left(5x^2+8\right)' dx \\ dv = 10xdx \\ x\,dx = \dfrac{dv}{10} \end{array} \right\| = \int \frac{3 \cdot \dfrac{dv}{10}}{\sqrt{v}} = \frac{3}{10}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{3}{10} \cdot 2\sqrt{v} + C\Big|_{v=5x^2+8} =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8} + C.$$

Тогда исходный интеграл будет равен:

$$\int \frac{7-3x}{\sqrt{5x^2+8}}\,dx = \frac{7}{\sqrt{5}}\,ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+8}\right| - \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8}+C.$$

Пример 6.12. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+5}\,dx$, выполнив подстановку $t=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+5\right)'$.

Решение. Пусть $t=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+5\right)'=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2$. Выполним соответствующую замену переменной.

$$\int \frac{2x+5}{x^2-4x+5}\,dx = \left\| \begin{array}{l} t=x-2 \\ x=t+2 \\ dx=(t+2)'\,dt \\ dx=dt \end{array} \right\| = \int \frac{2(t+2)+5}{(t+2)^2-4(t+2)+5}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t+4+5}{t^2+4t+4-4t-8+5}\,dt = \int \frac{2t+9}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{9}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{для 1 интеграла} \\ u=t^2+1 \\ du=\left(t^2+1\right)'dt \\ du=2t\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{du}{u} + 9\int \frac{dt}{t^2+1^2} = \ln|u| + 9\operatorname{arctg}\frac{t}{1}+C\Big|_{u=t^2+1} =$$

$$= \ln\left(t^2+1\right)+9\operatorname{arctg}t+C\Big|_{t=x-2} = \ln\left(x^2-4x+5\right)+9\operatorname{arctg}(x-2)+C.$$

Замечание. Замена $t=\frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'$ упрощает интегралы, содержащие квадратные трехчлены ax^2+bx+c.

Интегралы типа тех, что рассмотрены в примерах 6.8 и 6.9 можно также находить с использованием замены переменной.

Пример 6.13. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{2x-3}$.

Решение. Сделаем замену переменной.

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \left\| \begin{matrix} u = 2x-3 \\ du = 2dx \\ dx = \frac{du}{2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C\Big|_{u=2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C.$$

Пример 6.14. Найти $\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$.

Решение. Для упрощения подынтегральной функции сделаем замену переменной.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3} = \left\| \begin{matrix} x = t^2 \to t = \sqrt{x} \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\| = \int \frac{2tdt}{t-3} = 2\int \frac{(t-3)+3}{t-3}dt = 2\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right)dt =$$

$$= 2\int dt + 6\int \frac{dt}{t-3} = 2t + 6\int \frac{d(t-3)}{t-3} = 2t + 6\ln|t-3| + C\Big|_{t=\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 6\ln\left|\sqrt{x}-3\right| + C.$$

Пример 6.15. Найти $\int \frac{5dx}{\cos^2 3x\left(\mathrm{tg}^2 3x + 8\right)}$.

Решение. Заметим, что $\left(\mathrm{tg}3x\right)' = \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} = \frac{3}{\cos^2 3x}$ – это выражение уже есть под знаком интеграла.

Сделаем замену переменной.

$$\int \frac{5dx}{\cos^2 3x\left(\mathrm{tg}^2 3x + 8\right)} = \left\| \begin{matrix} u = \mathrm{tg}3x \\ du = \frac{3}{\cos^2 3x}dx \\ \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{du}{3} \end{matrix} \right\| = \int \frac{5 \cdot \frac{du}{3}}{u^2 + 8} = \frac{5}{3}\int \frac{du}{u^2 + 8} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{arctg}\frac{u}{2\sqrt{2}} + C\Big|_{u=\mathrm{tg}3x} = \frac{5}{6\sqrt{2}} \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}3x}{2\sqrt{2}} + C.$$

Метод интегрирования по частям

Теорема. Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедлива ***формула интегрирования по частям***:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du\,. \qquad (6.1)$$

Перечислим основные типы интегралов, которые находят методом интегрирования по частям:

1. $\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix}\right\} dx\,,$

где $P_n(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0$ – многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами.

В этом случае обозначим $u = P_n(x)$, $dv = \left\{\begin{matrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix}\right\} dx$, а формулу (6.1) интегрирования по частям применим n раз.

2. $\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} \log_a kx \\ \arcsin mx \\ \arccos mx \\ \operatorname{arctg} mx \\ \operatorname{arcctg} mx \end{matrix}\right\} dx\,,$

где $P_n(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0$ – многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами.

В этом случае $u = \left\{\begin{matrix} \log_a kx \\ \arcsin mx \\ \arccos mx \\ \operatorname{arctg} mx \\ \operatorname{arcctg} mx \end{matrix}\right\}$, $dv = P_n(x)dx$, а формулу (6.1) интегрирования по частям применим 1 раз.

3. Интегралы вида $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int \sin(\ln\alpha x)dx$, $\int \cos(\ln\alpha x)dx$, $\int \ln(\sin\alpha x)dx$, $\int \ln(\cos\alpha x)dx$.

При нахождении интегралов третьего типа формулу (6.1) интегрирования по частям применяют дважды до получения линейного уравнения относительно искомого интеграла. При её первом применении безразлично, что выбрать в качестве u, а при втором её применении в качестве u следует выбрать функцию, родственную той, что была выбрана в первый раз.

Пример 6.16. Найти $\int(7-x)\cos 2x\,dx$.

Решение. Данный интеграл первого типа, следовательно,

$$\int(7-x)\cos 2x\,dx=\left\|\begin{matrix}u=7-x \quad \to\ du=-dx\\ dv=\cos 2x\,dx\to v=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,d(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right\|=$$

$$=(7-x)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot(-dx)=\frac{(7-x)}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{(7-x)}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\sin 2x\,d(2x)=\frac{(7-x)}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Замечание. При нахождении v произвольную постоянную C полагают равной нулю, то есть в качестве v берут только одну из первообразных.

Пример 6.17. Найти $\int\left(x^2-2x+5\right)\ln x\,dx$.

Решение. Данный интеграл второго типа, следовательно,

$$\int\left(x^2-2x+5\right)\ln x\,dx=\left\|\begin{matrix}u=\ln x \quad\to\quad du=(\ln x)'\,dx=\frac{1}{x}dx\\ dv=\left(x^2-2x+5\right)dx\to v=\int\left(x^2-2x+5\right)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+5x\end{matrix}\right\|=$$

$$=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)-\int\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)-$$

$$-\int\left(\frac{x^2}{3}-x+5\right)dx=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-5x+C.$$

Пример 6.18. Найти $\int x\ln^2 x dx$.

Решение. Данный интеграл второго типа, так как интеграл $\int \ln^2 x dx$ отсутствует в таблице интегралов.

$$\int x\ln^2 x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad \to \; du = \left(\ln^2 x\right)' dx = 2\ln x \cdot \left(\ln x\right)' dx = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x dx \quad \to \quad v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int x \ln x \, dx =$$

Применим второй раз формулу интегрирования по частям

$$= \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \quad \to \; du = \left(\ln x\right)' dx = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x dx \to v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{2} \int x dx = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 6.19. Найти $\int \dfrac{2x dx}{\sin^2 7x}$.

Решение. Данный интеграл можно отнести к первому типу, так как без x в числителе мы будем иметь табличный интеграл. Следовательно:

$$\int \frac{2x dx}{\sin^2 7x} = \left\| \begin{array}{l} u = 2x \quad \to \; du = \left(2x\right)' dx = 2dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 7x} \to v = \int \dfrac{dx}{\sin^2 7x} = \dfrac{1}{7} \int \dfrac{d\left(7x\right)}{\sin^2 7x} = -\dfrac{1}{7} \operatorname{ctg} 7x \end{array} \right\| =$$

$$= 2x \cdot \left(-\frac{1}{7} \operatorname{ctg} 7x \right) - \int \left(-\frac{1}{7} \operatorname{ctg} 7x \right) \cdot 2dx = -\frac{2x}{7} \operatorname{ctg} 7x + \frac{2}{7} \int \operatorname{ctg} 7x dx =$$

$$= -\frac{2x}{7} \operatorname{ctg} 7x + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} \int \operatorname{ctg} 7x d\left(7x\right) = -\frac{2x}{7} \operatorname{ctg} 7x + \frac{2}{49} \ln \left|\sin 7x\right| + C.$$

Пример 6.20. Найти $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

Решение. Данный интеграл третьего типа. Обозначим исходный интеграл символом I и применим к нему формулу (6.1):

$$I=\int e^{2x}\sin x\,dx=\left\|\begin{matrix}u=e^{2x} & \to & du=\left(e^{2x}\right)'dx=2e^{2x}dx\\ dv=\sin x\,dx\to v=\int\sin x\,dx=-\cos x\end{matrix}\right\|=$$

Применим второй раз формулу интегрирования по частям

$$=e^{2x}\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot 2e^{2x}\,dx=-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x\,dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix}u=e^{2x} & \to & du=2e^{2x}dx\\ dv=\cos x\,dx\to v=\int\cos x\,dx=\sin x\end{matrix}\right\|=-e^{2x}\cos x+$$

$$+2\left(e^{2x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x}dx\right)=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x-4\int e^{2x}\sin x\,dx.$$

Тогда $I=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x-4I$.

Выразим из полученного равенства искомый интеграл I:

$$I+4I=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x,$$

$$5I=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x,$$

$$I=-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+\frac{2}{5}e^{2x}\sin x+C.$$

Пример 6.21. Найти $\int\left(x^2-1\right)\cdot e^{-7x}dx$.

Решение. Данный интеграл первого типа, следовательно,

$$\int\left(x^2-1\right)\cdot e^{-7x}dx=\left\|\begin{matrix}u=x^2-1 & \to & du=2xdx\\ dv=e^{-7x}dx\to v=\int e^{-7x}dx=-\frac{1}{7}\int e^{-7x}d(-7x)=-\frac{1}{7}e^{-7x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left(x^2-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)-\int\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)\cdot 2xdx=-\frac{x^2-1}{7}e^{-7x}+\frac{2}{7}\int x\cdot e^{-7x}dx=$$

Применим второй раз формулу интегрирования по частям

$$=\left\|\begin{matrix}u=x & \to & du=dx\\ dv=e^{-7x}dx & \to v=\int e^{-7x}dx=-\frac{1}{7}e^{-7x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{x^2-1}{7}e^{-7x}+\frac{2}{7}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)-\int\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)dx\right)=-\frac{x^2-1}{7}e^{-7x}+$$

$$+\frac{2}{7}\left(-\frac{x}{7}e^{-7x}+\frac{1}{7}\int e^{-7x}dx\right)=\frac{1-x^2}{7}e^{-7x}-\frac{2x}{49}e^{-7x}-\frac{2}{343}e^{-7x}+C.$$

Пример 6.22. Найти $\int \operatorname{arctg}\sqrt{18x-1}\,dx$.

Решение. Данный интеграл второго типа, так как интеграл $\int \operatorname{arctg}\sqrt{18x-1}\,dx$ отсутствует в таблице интегралов. Тогда

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{18x-1}\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg}\sqrt{18x-1} & \to \quad du = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{18x-1}\right)^2}\cdot\dfrac{18}{2\sqrt{18x-1}}dx = \\ dv = dx \quad \to v = x & \qquad\qquad = \dfrac{dx}{2x\sqrt{18x-1}} \end{array} \right\| =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{18x-1} - \int \frac{xdx}{2x\sqrt{18x-1}} = x\operatorname{arctg}\sqrt{18x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{18x-1}} =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{18x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18}\int \frac{d(18x-1)}{\sqrt{18x-1}} == x\operatorname{arctg}\sqrt{18x-1} - \frac{1}{18}\sqrt{18x-1} + C.$$

6.4 Понятие определённого интеграла и его свойства

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$ действительной оси. ***Криволинейной трапецией*** называют часть плоскости, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, осью OX $(y = 0)$ и графиком функции $y = f(x)$ (рисунок 6.1).

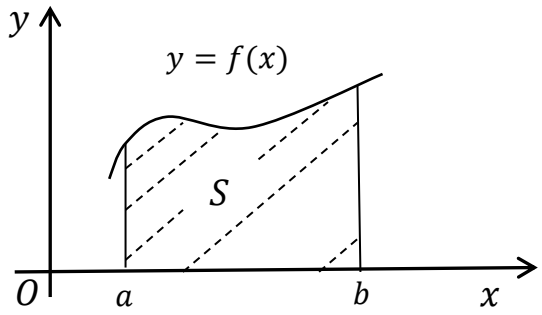


Рисунок 6.1 − Криволинейная трапеция

Найдём площадь криволинейной трапеции.

Разобьём отрезок $[a;b]$ на n частей точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (рисунок 6.2). Длины полученных частичных отрезков обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (длина отрезка разбиения $[x_{i-1}; x_i]$), где $i = \overline{1,n}$. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и вычислим значения функции в выбранных точках: $f(\xi_i)$, $i = \overline{1,n}$.

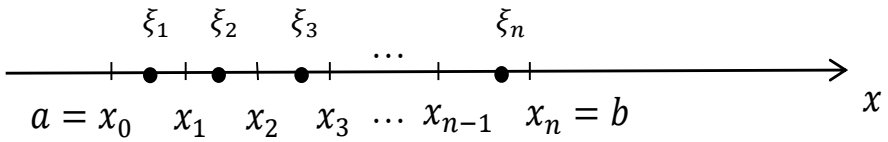


Рисунок 6.2 – Разбиение отрезка

На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, как на основании, построим прямоугольники с высотой $f(\xi_i)$, $i = \overline{1,n}$. (рисунок 6.3).

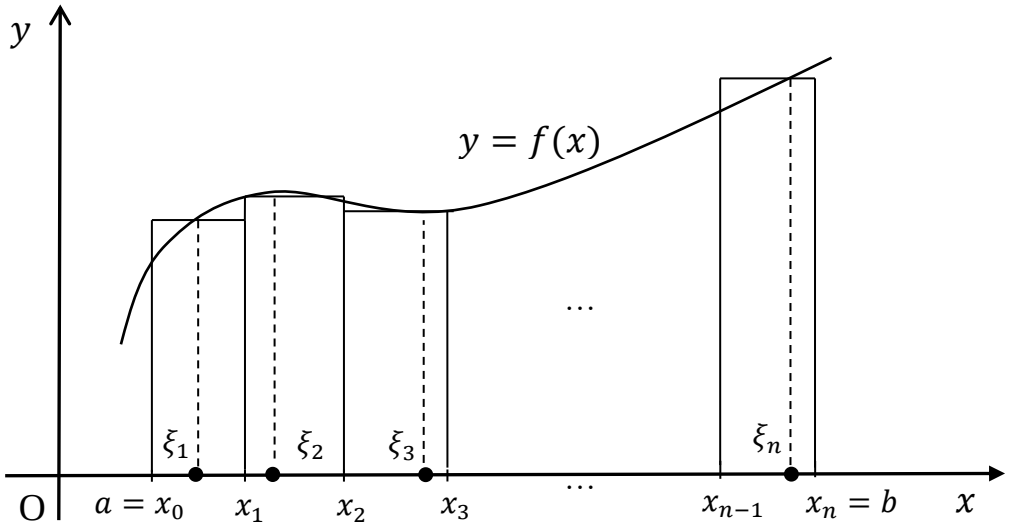


Рисунок 6.3 – Разбиение криволинейной трапеции

Площадь всей криволинейной трапеции приблизительно равна площади, построенной «ступенчатой» фигуры. Площадь каждого прямоугольника с номером i равна $S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$, тогда площадь криволинейной трапеции приближённо равна $S_{\text{кр.тр.}} \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Причём, данное равенство тем точнее, чем «мельче» разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки.

Разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки измельчается неограниченно, если построена последовательность описанных разбиений такая, что наибольшая из длин частичных отрезков $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{\Delta x_i\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда площадь криволинейной трапеции будет

$$S_{\text{кр.тр.}} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right). \qquad (6.2)$$

Определение определённого интеграла, как предела интегральных сумм

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y=f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n отрезков точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$.

На каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и обозначим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ (длина отрезка разбиения $[x_{i-1};x_i]$), где $i=\overline{1,n}$ (рисунок 6.2).

Сумму вида

$$S_n=f(\zeta_1)\Delta x_1+f(\zeta_2)\Delta x_2+\ldots+f(\zeta_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (6.3)$$

называют ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, построенную по данному разбиению отрезка и выбранным точкам ξ_i.

Интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка $[a;b]$, так и от выбора точек ξ_i, $i=\overline{1,n}$. Обозначим $\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta x_i\}$.

Функция $f(x)$ ***интегрируема*** (по Риману) на отрезке $[a;b]$, если предел интегральной суммы (6.3), при $\lambda\to 0$ существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные ни от способа выбора точек ξ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то определённым интегралом от этой функции по отрезку $[a;b]$ называют предел интегральных сумм (6.3) при $\lambda\to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right). \qquad (6.4)$$

При этом a называется нижним пределом интегрирования,

b – верхним пределом интегрирования,

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Теорема. Достаточное условие существования определённого интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. При решении задачи о площади криволинейной трапеции мы получили, что её площадь может быть найдена по формуле (6.2). Сравнивая правую часть этой формулы с определением определённого интеграла, получаем:

$$S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.5)$$

Это означает, что определённый интеграл от неотрицательной подынтегральной функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$.

Свойства определённого интеграла

Доказательства нижеследующих свойств следуют из свойств сумм и пределов при условии, что все упоминаемые интегралы, существуют.

Пусть $b > a$, тогда:

1. $\int_a^b dx = b-a$.

2. Если поменять местами пределы интегрирования, то определённый интеграл сменит знак на противоположный, то есть $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. Для любого $c \in [a;b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, то есть $\int_a^b k\ f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где $k = const$.

5. Определённый интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от слагаемых, то есть

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\le g(x)\ \ \forall x\in[a;b]$, то и $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$.

Следствие свойства 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\ge 0\ \ \forall x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$.

7. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $m\le f(x)\le M\ \ \forall x\in[a;b]$, то $m\cdot(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)$.

8. ***Теорема о среднем***. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда найдется точка $c\in[a;b]$, такая что $\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $m\le f(x)\le M\ \ \forall x\in[a;b]$.

Тогда (по свойству 6): $\int\limits_a^b m\,dx\le\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b M\,dx$.

$\int\limits_a^b k\,dx=(\text{по свойству 4})=k\int\limits_a^b dx=(\text{по свойству 1})=k(b-a)$, тогда

$$\int\limits_a^b m\,dx\le\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b M\,dx\quad\Leftrightarrow\quad m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

или $m\le\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\le M$.

Так как функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она принимает все значения, заключенные между своими наименьшим m и наибольшим M значениями. То есть найдётся точка $c\in[a;b]$ такая, что

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\quad\Leftrightarrow\quad\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a).$$

Замечание. Число $f(c)$ называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

9. ***Интегрирование чётных и нечётных функций на симметричном отрезке.***

***Теорема* 1.** Если функция $f(x)$ нечётная (то есть $f(-x)=-f(x)$) и непрерывная на отрезке $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0.$

***Теорема* 2.** Если функция $f(x)$ чётная (то есть $f(-x)=f(x)$) и непрерывная на отрезке $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$

10. ***Интегрирование периодических функций на отрезке, кратном периоду.***

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** с периодом T, если для всех x из области определения функции справедливо $f(x\pm T)=f(x)$. При этом периодом называется наименьшее число $T>0$, удовлетворяющее последнему равенству.

Теорема. Если функция $f(x)$ – периодическая и непрерывная на отрезке $[0;T]$, то $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx=\int\limits_{0}^{T} f(x)dx$, где T – период функции $f(x)$.

6.5 Формула Ньютона-Лейбница

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(t)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда она интегрируема на произвольном отрезке $[a;x]$, где $x\in(a;b]$.

Функция аргумента x вида $\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема Барроу. Для любой интегрируемой на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ является первообразной для этой функции на интервале $(a;b)$.

Доказательство. По определению производной: $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}$, где $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt$.

Если $a<x<x+\Delta x$, то по свойству 3 определенных интегралов $\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \;\Rightarrow\; \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ или $\Delta\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

По теореме о среднем найдётся точка $c\in[x;x+\Delta x]$ такая, что $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\cdot(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x$. Точку c в этом случае можно представить в виде $c=x+\theta\cdot\Delta x$ при $\theta\in(0;1)$. Тогда

$\Delta\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x$, где $\theta\in(0;1)$. Следовательно

$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\cdot\Delta x)=f(x)$. Это значит, что функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Формула Ньютона-Лейбница

Из теоремы Барроу и теоремы об общем виде первообразной следует, что если $F(x)$ ещё одна первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то найдется такая константа C, что $\Phi(x)-F(x)=C \;\Rightarrow\; \Phi(x)=F(x)+C$ или $\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C$. Причём последнее равенство верно для всех $x\in[a;b]$.

Пусть $x=a \;\Rightarrow\; \int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C$. Тогда, по свойству 1 определённого интеграла, получаем $0=F(a)+C \;\Rightarrow\; C=-F(a)$.

Пусть $x=b \;\Rightarrow\; \int\limits_a^b f(t)dt=F(b)+C=F(b)-F(a)$ или

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). \qquad (6.6)$$

Формулу (6.6) называется формулой Ньютона-Лейбница, которую на практике часто записывают в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a), \qquad (6.7)$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$.

Пример 6.23. Вычислить определённый интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение. Вычислим интеграл, для того применим таблицу неопределенных интегралов и формулу Ньютона-Лейбница (6.7)

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1-0 = 1.$$

Пример 6.24. Вычислить определённый интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Используем таблицу неопределённых интегралов, затем по формуле Ньютона-Лейбница получим

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1) = \operatorname{arctg}1 + \operatorname{arctg}1 = 2\operatorname{arctg}1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

6.6 Методы вычисления определённых интегралов

Учитывая формулу Ньютона-Лейбница можно сделать вывод, что все методы нахождения неопределённых интегралов применимы и для вычисления определённых интегралов.

Метод замены переменной (метод подстановки)

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива ***формула замены переменных в определённом интеграле***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Замечание. При вычислении определённого интеграла с помощью замены переменной не нужно возвращаться к старой переменной, но обязательно следует пересчитать пределы интегрирования:

x	t
b	α
a	β

Пример 6.25. Вычислить $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Сделаем замену переменной.

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left\| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right\| \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t=\sqrt{x} \\ \hline 4 & \sqrt{4}=2 \\ \hline 0 & \sqrt{0}=0 \\ \hline \end{array} \quad \| = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\left(\int\limits_0^2 \frac{1+t}{1+t}dt - \int\limits_0^2 \frac{1}{1+t}dt \right) = 2\left(\int\limits_0^2 dt - \int\limits_0^2 \frac{1}{1+t}dt \right) = 2\Big(t-\ln|1+t|\Big)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\big[(2-\ln 3)-(0-\ln 1)\big] = 4-2\ln 3 = 4-\ln 9.$$

Пример 6.26. Вычислить $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\left(8-x^2\right)^2}$.

Решение. Сделаем замену переменной.

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(8-x^2\right)^2} = \left\| \begin{array}{l} u=8-x^2 \\ du=-2xdx \\ xdx=\dfrac{1}{-2}du \end{array} \right\| \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & u=8-x^2 \\ \hline 1 & 8-1^2=7 \\ \hline 0 & 8-0^2=8 \\ \hline \end{array} \quad \| = \int\limits_8^7 \frac{\frac{1}{-2}du}{u^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_8^7 \frac{du}{u^2} =$$

$$(\text{свойство 2}) = \frac{1}{2}\int\limits_7^8 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int\limits_7^8 u^{-2}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{112}.$$

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Теорема. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют непрерывные производные на интервале $(a;b)$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям для определенных интегралов:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \qquad (6.8)$$

Пример 6.27. Вычислить $\int\limits_1^3 (x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Применим формулу (6.8) интегрирования по частям для определённого интеграла, учитывая, что интеграл первого типа:

$$\left\| \begin{array}{l} u = x+1 \quad \to \; du = dx \\ dv = e^{3x}dx \to v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\|, \text{ тогда}$$

$$\int\limits_1^3 (x+1)e^{3x}dx = \frac{x+1}{3}e^{3x}\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\int\limits_1^3 e^{3x}dx = \left(\frac{4}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^3\right) - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_1^3 = \frac{4}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^3 -$$

$$-\frac{1}{9}\left(e^9 - e^3\right) = \frac{4}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^9 + \frac{1}{9}e^3 = \frac{11}{9}e^9 - \frac{5}{9}e^3 = \frac{e^3}{9}\left(11e^6 - 5\right).$$

Пример 6.28. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \; dx$.

Решение. Применим формулу (6.8) интегрирования по частям для определённого интеграла, учитывая, что интеграл второго типа:

$$\left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \quad \to \; du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\|, \text{ тогда } \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} \overset{(=)}{}$$

Вспомним, что $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$.

$$\overset{(=)}{} \left(1 \cdot arctg1 - 0\right) - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

6.7 Численность популяции

Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v = v(t)$. В «старых» установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно стремиться к нулю. Но если популяция молода, её взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют

внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например, сознательное вмешательство человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T. В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от численности популяции $N(t)$ в момент t, и, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$. Поэтому

$$N(T)-N(t_0)=\int_{t_0}^{T} v(t)dt. \qquad (6.9)$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, то есть $v(t)=ae^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Применяя формулу (6.9), в этом случае получаем

$$N(t)=N(t_0)+a\int_{t_0}^{T} e^{kt}\,dt=N(t_0)+\frac{a}{k}e^{kt}\Big|_{t_0}^{T}=N(t_0)+\frac{a}{k}\left(e^{kT}-e^{kt_0}\right). \qquad (6.10)$$

По формуле, подобной (6.10), подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневелых грибков, выделяющих пенициллин.

6.8 Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции

Вспомним, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$ $(\text{при } f(x)\ge 0)$, слева и справа прямыми $x=a,\ x=b$, снизу отрезком $[a;\ b]$ оси OX вычисляется по формуле (6.5)

$$S_{\text{кр.тр.}}=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Пример 6.29. Вычислить площадь, образованную одной аркой синусоиды и осью OX.

Решение. Рассматриваемая область имеет вид представленный на рисунке 6.4.

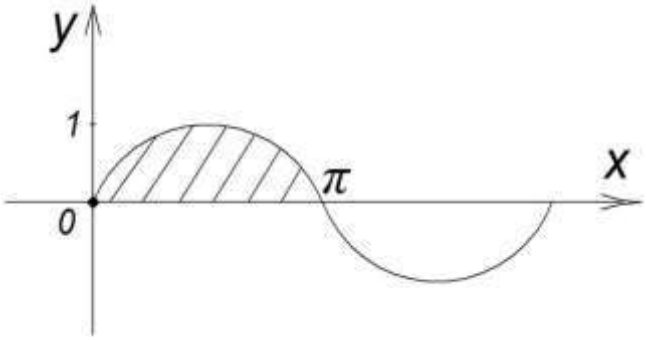


Рисунок 6.4 – Область, ограниченная одной аркой синусоиды и осью OX

Площадь одной арки вычислим по формуле (6.5).

$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$, тогда

$$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Площадь области, ограниченной линиями, заданными в декартовых координатах

Если функции $y = y_н(x)$ и $y = y_в(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a; b]$, причём $y_н(x) \le y_в(x)$ $\forall x \in [a; b]$, то площадь области P, заключенной между графиками функций $y = y_н(x)$, $y = y_в(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рисунок 6.5) равна

$$S = \int\limits_a^b [y_в(x) - y_н(x)]dx. \qquad (6.11)$$

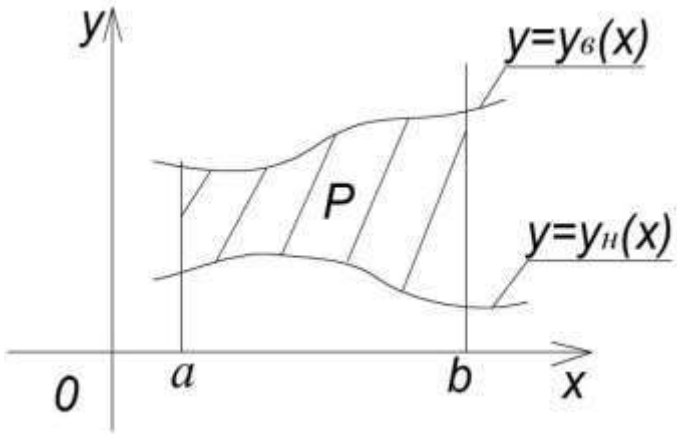


Рисунок 6.5 – Область P, заключенная между графиками функций $y = y_н(x)$ и $y = y_в(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$

Пример 6.30. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2 - 2$.

Решение. Строим искомую фигуру (рисунок 6.6).

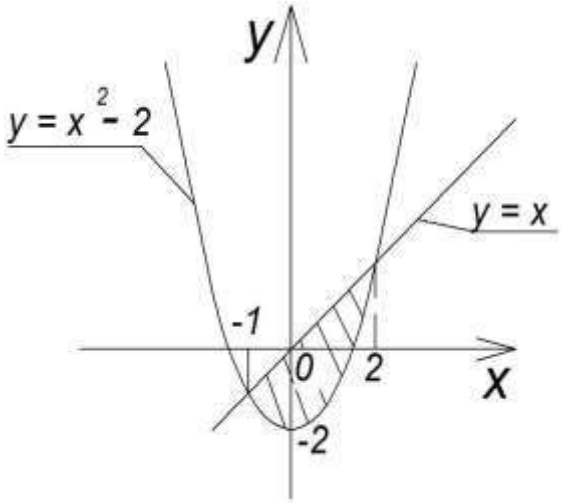


Рисунок 6.6 – Область, ограниченная линиями $y = x$ и $y = x^2 - 2$

Воспользуемся формулой (6.11)

$S = \int\limits_a^b [y_в(x) - y_н(x)]dx$, где $y_в = x$, $y_н = x^2 - 2$.

Для определения пределов интегрирования a и b найдем точки пересечения заданных параболы и прямой. Приравняем их ординаты:

$x^2 - 2 = x \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$. То есть $a = -1,\ b = 2$.

Тогда $S = \int\limits_{-1}^{2} \left[x - \left(x^2 - 2\right)\right]dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$

$= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1) \right) = \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) =$

$= \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = 6 + 1{,}5 - 3 = 4{,}5.$

Пример 6.31. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x,\ x = 3y,\ x = 10 - 2y$.

Решение. Построим искомую фигуру (рисунок 6.7).

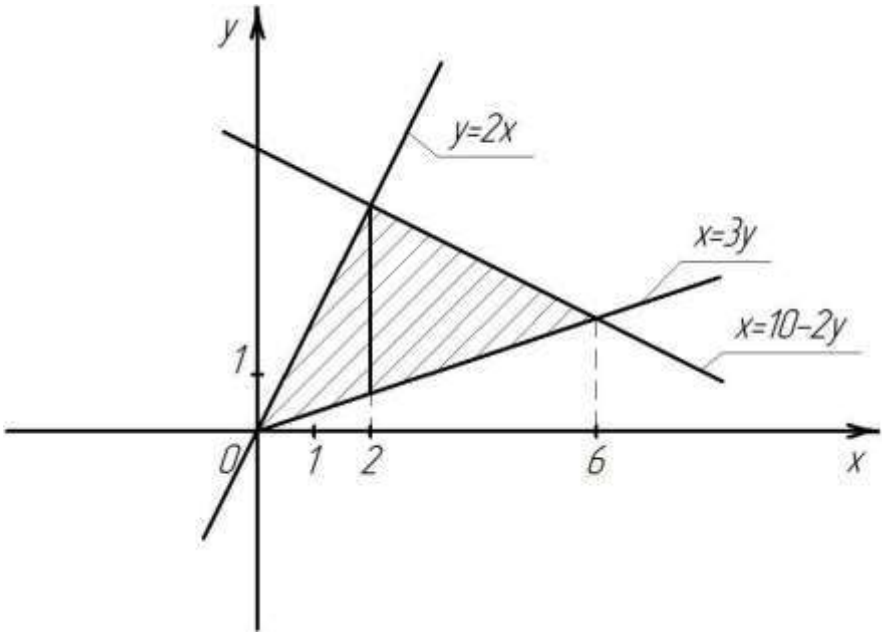


Рисунок 6.7 – Область, ограниченная линиями $y = 2x,\ x = 3y,\ x = 10 - 2y$

Найдём абсциссы точек пересечения данных линий:

а) $\begin{cases} y = 2x \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \ x_1 = 0;$

б) $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \ x_2 = 6;$

в) $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \ x_3 = 2.$

Для вычисления площади данной фигуры необходимо разбить её на две части вертикальной прямой $x = 2$ и посчитать как сумму площадей полученных фигур:

$S = S_1 + S_2$, где по формуле (6.11):

$$S_1 = \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{3}x\right) dx = \left(x^2 - \frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{4}{6} = \frac{12-2}{3} = \frac{10}{3};$$

$$S_2=\int_2^6\left(5-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)dx=\int_2^6\left(5-\frac{5x}{6}\right)dx=\left(5x-\frac{5x^2}{12}\right)\Bigg|_2^6=\left(5\cdot6-\frac{5\cdot36}{12}\right)-\left(5\cdot2-\frac{5\cdot4}{12}\right)=$$

$$=30-15-10+\frac{5}{3}=\frac{20}{3}.$$

Тогда $S=\frac{10}{3}+\frac{20}{3}=\frac{30}{3}=10$.

Пример 6.32. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2-2$, $y=10-2x$, $y=-2$.

Решение. Строим искомую фигуру (рисунок 6.8).

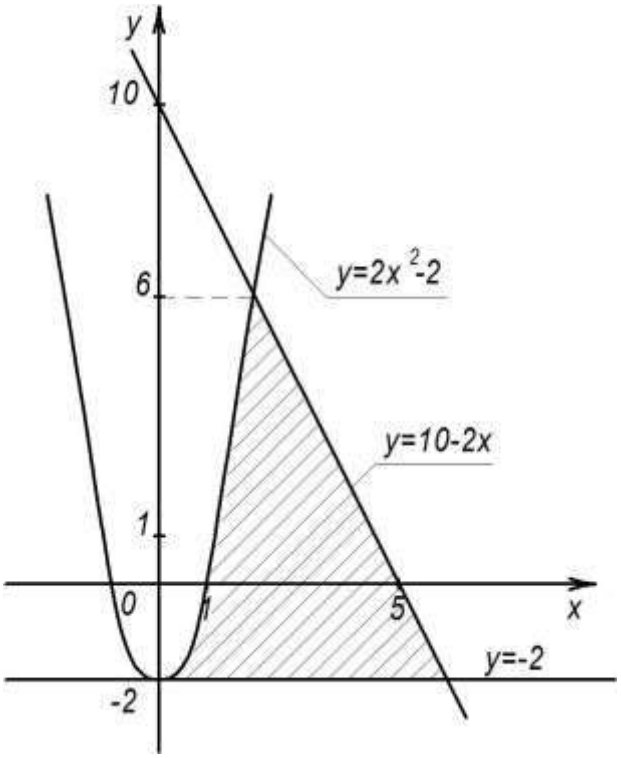


Рисунок 6.8 – Область, ограниченная линиями
$y=2x^2-2$, $y=10-2x$, $y=-2$

Для вычисления площади данной фигуры целесообразно воспользоваться следующей формулой:

$$S=\int_c^d\left[\varphi_n(y)-\varphi_л(y)\right]dy, \qquad (6.12)$$

где $\varphi_n(y)\geq\varphi_л(y)$ на отрезке $[c;d]$.

В нашем случае $y=2x^2-2$ или $x=\sqrt{\frac{y+2}{2}}$, следовательно, $\varphi_л(y)=\sqrt{\frac{y+2}{2}}$;

$y=10-2x$ или $x=\dfrac{10-y}{2}$, следовательно, $\varphi_n(y)=\dfrac{10-y}{2}$; $c=-2$; $d=6$.

Тогда $S=\int\limits_{-2}^{6}\left(\dfrac{10-y}{2}-\sqrt{\dfrac{y+2}{2}}\right)dy=5\int\limits_{-2}^{6}dy-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{6}y\,dy-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-2}^{6}(y+2)^{\frac{1}{2}}d(y+2)=$

$$=5y\Big|_{-2}^{6}-\frac{1}{4}\cdot y^2\Big|_{-2}^{6}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(y+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-2}^{6}=5(6+2)-\frac{1}{4}(36-4)-\frac{\sqrt{2}}{3}(y+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{6}=$$

$$=40-8-\frac{\sqrt{2}}{3}\left(8^{\frac{3}{2}}-0\right)=32-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot16\sqrt{2}=\frac{96-32}{3}=\frac{64}{3}.$$

Вычисление длин кривых

Пусть задана некоторая кривая L. Разобьем эту кривую на части точками $M_0, M_1, M_2, .., M_n$ и впишем в эту кривую ломанную с точками излома $M_0, M_1, M_2, .., M_n$. Каждому такому разбиению поставим в соответствие длину этой ломанной $\ell_n=\sum\limits_{k=1}^{n}M_{k-1}M_k$ (рисунок 6.9).

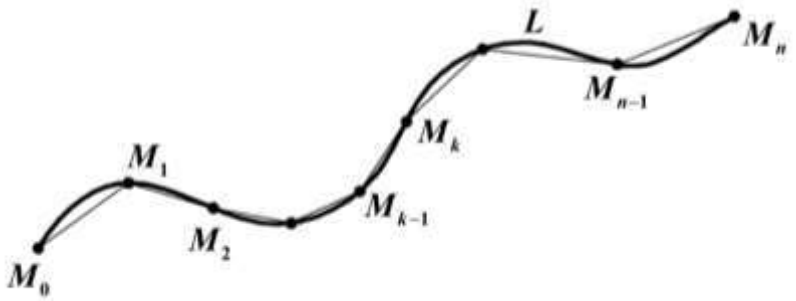


Рисунок 6.9 – Разбиение кривой L

Разбиение неограниченно измельчается, если $\lambda=\max\limits_{k=1,n}\{M_{k-1}M_k\}\to0$.

Кривая L спрямляема (имеет длину), если существует предел $\ell=\lim\limits_{\lambda\to0}\ell_n$, не зависящий от способа выбора последовательности разбиений кривой. При этом её длиной называют число ℓ.

Предположим, что спрямляемая кривая L задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}\quad t\in[t_0;\,t_1].$

Часть длины кривой L, соединяющей точки $M_0(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$ и $M(x(t); y(t); z(t))$, будем рассматривать, как функцию аргумента t и обозначать $\ell(t)$.

Теорема. Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ дифференцируемы в точке t, то и функция $\ell(t)$ также дифференцируема и при этом имеет место формула $d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$.

Из теоремы вытекают следующие формулы для дифференциала длины дуги плоской кривой:

1. Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_0; t_1]$, то $d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$.

2. Если кривая является графиком функции $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$, где функция $f(x)$ дифференцируема, то $d\ell = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

3. Если кривая является графиком функции $x = \varphi(y)$ при $y \in [c; d]$, где функция $\varphi(y)$ дифференцируема, то $d\ell = \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\,dy$.

Для длины дуги кривой выполняется равенство $\ell = \int d\ell$, следовательно, можно записать формулы для вычисления длин дуг кривых:

1. Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} t \in [t_0; t_1]$, то

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt. \qquad (6.13)$$

2. Если плоская кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_0; t_1]$, то

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (6.14)$$

3. Если кривая является графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$, то

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (6.15)$$

4. Если кривая является графиком дифференцируемой функции $x = \varphi(y)$ при $y \in [c; d]$, то

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\, dy. \qquad (6.16)$$

Пример 6.33. Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y = x^{3/2}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение. Длину дуги вычислим по формуле (6.15) $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$, где $a = 0$, $b = 5$.

Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим: $f'(x) = y' = \frac{3}{2} x^{1/2} \Rightarrow$

$[f'(x)]^2 = \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2 = \frac{9x}{4}$, тогда

$$\ell = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9x}{4} \\ dt = \frac{9}{4} dx \\ dx = \frac{4}{9} dt \end{array} \right\| \begin{array}{|c|c|} \hline x & t = 1 + \frac{9x}{4} \\ \hline 5 & 1 + \frac{9 \cdot 5}{4} = \frac{49}{4} \\ \hline 0 & 1 + \frac{9 \cdot 0}{4} = 1 \\ \hline \end{array} \| = \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{t} \cdot \frac{4}{9} dt = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{49}{4}} t^{\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^{\frac{49}{4}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Bigg|_1^{\frac{49}{4}} = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3} - \sqrt{(1)^3} \right) = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1 \right) =$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \frac{335}{8} = \frac{335}{27}.$$

Пример 6.34. Вычислить длину части арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ при $0 \le t \le \pi$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.15) $\ell = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$, где $t_0 = 0$, $t_1 = \pi$, $x' = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t)$, $y' = (a(1 - \cos t))' = a \sin t$, тогда

$$\ell = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2}\, dt = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin t^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2 \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin t^2\right)}\, dt = a \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + 1}\, dt = a \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= a \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = a\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = a\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \int\limits_0^{\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 2a \cdot 2 \int\limits_0^{\pi} \sin \frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = -4a \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -4a(0 - 1) = 4a.$$

Здесь мы воспользовались формулой $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.

Объём тела вращения

Пусть на отрезке $[a; b]$ оси OX определена непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$.

Представим себе, что криволинейная трапеция, ограниченную линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси OX, как вокруг линии симметрии. В результате точки криволинейной трапеции «заметают» часть пространства, называемую телом вращения (рисунок 6.10). При этом каждая точка поверхности тела вращения лежит на окружности радиуса $f(x)$ с центром в точке оси OX. Это означает, что площадь перпендикулярного сечения тела вращения может быть найдена по формуле $S(x) = \pi f^2(x)$, где x – абсцисса любой точки перпендикулярного сечения.

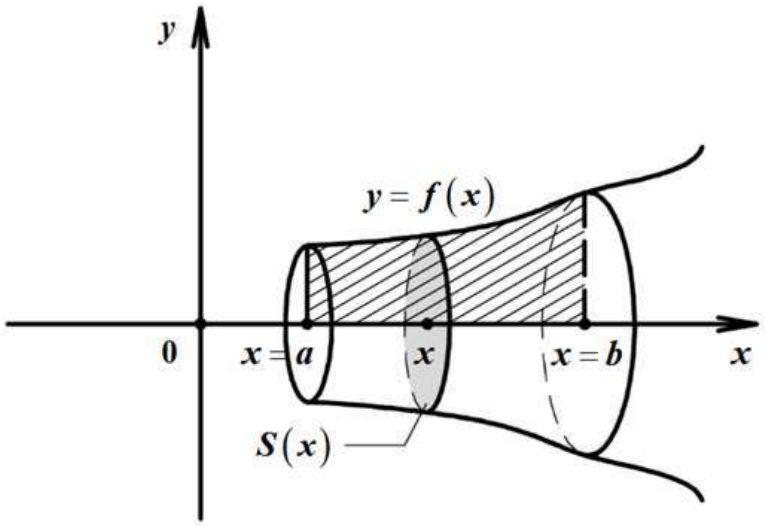


Рисунок 6.10 – Объём тела вращения вокруг оси *OX*

Объём тела, образованного вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x),\ x = a,\ \ x = b,\ y = 0$, определяется формулой

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (6.17)$$

Аналогичным образом определяется объём тела, образованного вращением вокруг оси *OY* криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = \varphi(y),\ y = c,\ \ y = d,\ x = 0$:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (6.18)$$

Пример 6.35. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси *OY* криволинейной трапеции, ограниченной дугой параболы $x = \sqrt{y+4}$ и осями координат.

Решение. Изобразим плоскую фигуру, ограниченную заданными линиями (рисунок 6.11).

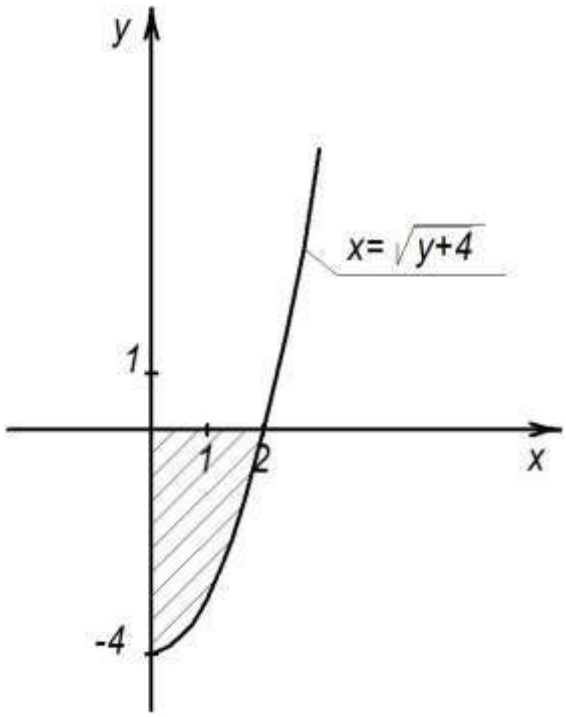


Рисунок 6.11 – Фигура, ограниченная дугой параболы $x=\sqrt{y+4}$ и осями координат

Воспользуемся формулой (6.18). В нашем случае $\varphi(y)=\sqrt{y+4}$, $c=-4$, $d=0$. Тогда

$$V_y=\pi\int\limits_{-4}^{0}\left(\sqrt{y+4}\right)^2dy=\pi\int\limits_{-4}^{0}(y+4)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}+4y\right)\Bigg|_{-4}^{0}=-\pi\left(\frac{16}{2}-16\right)=8\pi\,.$$

Пример 6.36. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной линиями $y=3x$, $y=0$, $y=4-x^2$.

Решение. Строим искомую фигуру (рисунок 6.12).

Для вычисления данного объёма нужно разбить плоскую фигуру на две части вертикальной прямой $x=1$ и найти сумму объёмов получившихся тел $V_x=V_1+V_2$, где V_1 и V_2 найдём по формуле (6.17).

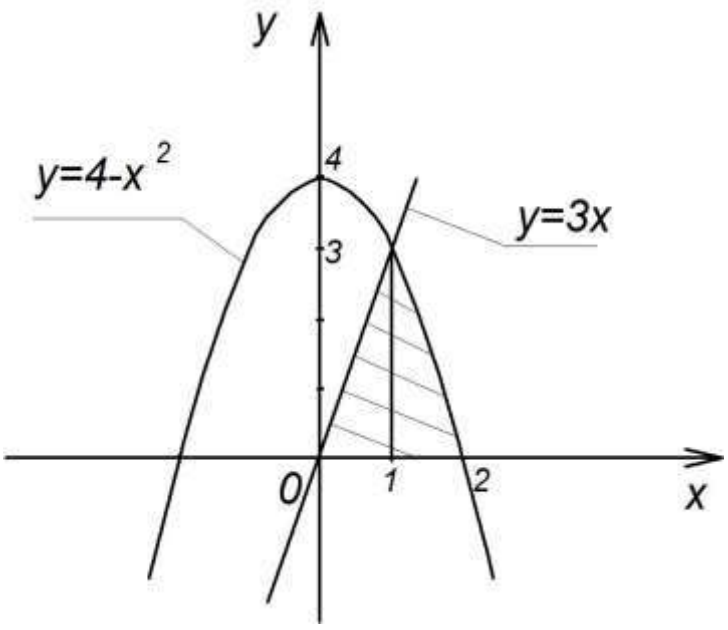


Рисунок 6.12 – Фигура, ограниченная линиями

$$y = 3x,\ y = 0,\ y = 4 - x^2$$

$V_1 = \pi \int\limits_{a_1}^{b_1} f_1^2(x)dx$, где $a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ f_1(x) = 3x$, тогда

$$V_1 = \pi\int\limits_0^1 (3x)^2\,dx = \pi\int\limits_0^1 9x^2\,dx = \pi\cdot 3x^3\Big|_0^1 = 3\pi\left(1^3 - 0^3\right) = 3\pi.$$

$V_2 = \pi \int\limits_{a_2}^{b_2} f_2^2(x)dx$, где $a_2 = 1,\ b_2 = 2,\ f_2(x) = 4 - x^2$, тогда

$$V_2 = \pi\int\limits_1^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx = \pi\int\limits_1^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right)dx = \pi\left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi\left[\left(16\cdot 2 - \frac{8\cdot 2^3}{3} + \frac{2^5}{5}\right) - \left(16\cdot 1 - \frac{8\cdot 1^3}{3} + \frac{1^5}{5}\right)\right] = \pi\left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \left(16 - \frac{8}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] =$$

$$= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} - 16 + \frac{8}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi\left(16 - \frac{56}{3} + \frac{31}{5}\right) = \frac{53\pi}{15}.$$

Окончательно получим $V_x = 3\pi + \frac{53\pi}{15} = \frac{98\pi}{15}$.

Пример 6.37. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OY* плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 0$, $y + 2x = 4$.

Решение. Строим искомую фигуру (рисунок 6.13).

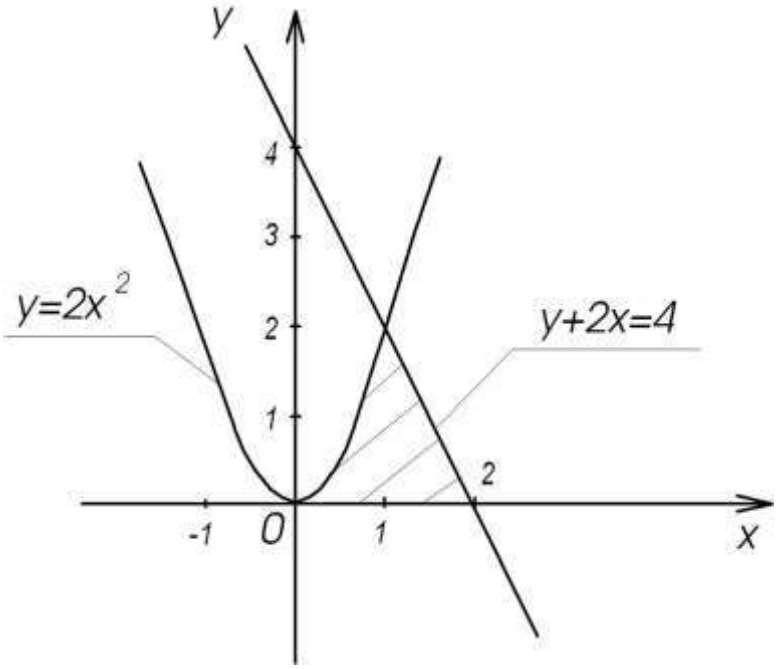


Рисунок 6.13 – Фигура, ограниченная линиями $y = 2x^2$, $y = 0$, $y + 2x = 4$

Для вычисления данного объёма нужно найти разность объёмов тел $V_y = V_1 - V_2$, где V_1 и V_2 найдём по формуле (6.18) $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$, при этом границы интегрирования c и d будут одинаковыми для V_1 и V_2: $c = 0$, $d = 2$.

$V_1 = \pi \int_c^d \varphi_1^2(y)dy$, где $\varphi_1(y)$ найдём из уравнения $y + 2x = 4$:

$x = \dfrac{4-y}{2} = 2 - \dfrac{y}{2} = \varphi_1(y)$, тогда

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int_0^2 \left(4 - 2y + \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \left(4y - y^2 + \frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \left[\left(4 \cdot 2 - 2^2 + \frac{2^3}{12}\right) - 0\right] = \pi \left(8 - 4 + \frac{2}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}.$$

$V_2 = \pi \int\limits_c^d \varphi_2^2(y)dy$, где $\varphi_2(y)$ найдём из уравнения $y = 2x^2$: $x^2 = \dfrac{y}{2} = \varphi_2^2(y)$,

тогда $V_1 = \pi \int\limits_0^2 \dfrac{y}{2}dy = \pi \cdot \dfrac{y^2}{4}\Bigg|_0^2 = \pi\left(\dfrac{2^2}{4} - 0\right) = \pi$.

Окончательно получим $V_y = \dfrac{14\pi}{3} - \pi = \dfrac{11\pi}{3}$.

6.9 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; +\infty)$, интегрируема на любом отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и существует (конечный) предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, то его называют ***несобственным интегралом первого рода*** и обозначают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (6.19)$$

В этом случае говорят также, что несобственный интеграл ***сходится*** на промежутке $[a; +\infty)$, а функция $f(x)$ называется интегрируемой (в несобственном смысле) на промежутке $[a; +\infty)$. Если же предел не существует, то говорят, что интеграл ***расходится***.

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (6.20)$$

Для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ положим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx \qquad (6.21)$$

и будем говорить, что он ***сходится***, если сходятся оба интеграла в правой части формулы (6.21).

Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***расходится***.

При этом выбор точки c не влияет на сходимость и значение (если оно определено) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Несобственный интеграл первого рода называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Пример 6.38. Выяснить сходится ли интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По формуле (6.20)

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg}b - \operatorname{arctg}0) =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg}b - 0) = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}b = \frac{\pi}{2}$. Полученный предел конечный.

Таким образом, интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится.

Пример 6.39. Проверить сходится ли интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x\,dx$.

Решение. По формуле (6.20)

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - 0) =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$.

Полученный предел не существует, поэтому несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x\,dx$ расходится.

Пример 6.40. Выяснить сходится ли интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$.

Решение. По формуле (6.22), а затем, по формулам (6.20) и (6.22) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - e^0\right) = \left(1 - e^{-\infty}\right) + \left(e^{+\infty} - 1\right) = 1 - e^{-\infty} + e^{+\infty} - 1 =$$

$$= -\frac{1}{e^{+\infty}} + e^{+\infty} = -\frac{1}{\infty} + \infty = 0 + \infty = \infty.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ расходится.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать определение первообразной.
2. Каковы основные свойства неопределённого интеграла?
3. Перечислить этапы решения интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x-2x^2}}$.
4. Записать формулу интегрирования по частям.
5. Указать целесообразные подстановки для отыскания интегралов:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx,\quad \int e^{\cos x}\sin x\,dx,\quad \int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx,\quad \int \sin x\cos x\,dx,\quad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

6. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;b]$?
7. Дать определение определённого интеграла.
8. Каков геометрический смысл определённого интеграла от заданной функции?
9. Перечислить основные свойства определённого интеграла.
10. Записать формулу Ньютона-Лейбница.
11. В чем состоит способ подстановки для вычисления определённого интеграла?
12. Как выглядит формула интегрирования по частям для определённого интеграла?
13. Записать формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых координатах.
14. Записать формулу для вычисления объёма тела вращения.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Неопределённые интегралы

Используя приём непосредственного интегрирования, метод подстановки или подведение под знак дифференциала, найти следующие интегралы:

398. $\int\left(3x^2-2x+4\right)dx$.

399. $\int\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}\right)dx$.

400. $\int\frac{5x^3-2x}{x^2}dx$.

401. $\int x(2x+1)^2dx$.

402. $\int(x+7)^8dx$.

403. $\int\cos(x-8)dx$.

404. $\int\frac{dx}{2x-5}$.

405. $\int ctg(5x+6)dx$.

406. $\int\left(2^{5x}-\sqrt{x}\right)dx$.

407. $\int(3x+\cos 4x)dx$.

408. $\int\frac{2xdx}{\sin\left(3x^2-1\right)}$.

409. $\int xe^{x^2+3}dx$.

410. $\int x^2\sin\left(2x^3+5\right)dx$.

411. $\int\frac{2xdx}{\sqrt{3x^2-4}}$.

412. $\int\frac{3x}{5x^2-4}dx$.

413. $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx$.

414. $\int(4-\cos x)^6\sin x\,dx$.

415. $\int\frac{7x^2}{2x^3+11}dx$.

416. $\int\frac{3x^3}{\sqrt{2-x^4}}dx$.

417. $\int x^2\left(5-3x^3\right)^5dx$.

418. $\int\frac{e^{tg3x+1}}{\cos^2 3x}dx$.

419. $\int\frac{(3-2\ln x)^5}{x}dx$.

420. $\int\frac{dx}{4-x^2}$.

421. $\int\frac{4x^2-1}{x^2-7}dx$.

422. $\int\frac{3dx}{9x^2-1}$.

423. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-3}}$.

424. $\int\frac{2}{2x^2+5}dx$.

425. $\int\frac{4dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

426. $\int\frac{x^2dx}{2x^6-9}$.

427. $\int\frac{2x}{\sqrt{9-x^4}}dx$.

428. $\int\frac{\sin 2xdx}{\cos^2 2x+5}$.

429. $\int\frac{3x-7}{4x^2-9}dx$.

430. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{4-9x^2}}dx$.

431. $\int\frac{3-5x}{3x^2+7}dx$.

432. $\int\frac{3+tg^4x}{\cos^2 x}dx$.

433. $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{2+3e^{2x}}}$.

434. $\int\cos 2x\cdot 3^{1-\sin 2x}dx$

435. $\int\frac{x-\sqrt{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$.

436. $\int\frac{x^5-3\ln x}{x}dx$.

437д. $\int\left(4x^3-2+5x^4\right)dx$.

438д. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-7\right)dx$.

439д. $\int\frac{x^4+6x}{x^3}dx$.

440д. $\int x\left(3x^2+5x-2\right)dx$. 441д. $\int e^{x-2}dx$. 442д. $\int ctg\left(x+8\right)dx$.

443д. $\int \sin\left(3x-1\right)dx$. 444д. $\int \frac{2}{\sqrt{4x+5}}dx$. 445д. $\int xtg\left(x^2-1\right)dx$.

446д. $\int \frac{xdx}{x^2+6}$. 447д. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+7}}dx$. 448д. $\int \frac{x^2+2}{x^2+5}dx$.

449д. $\int \frac{4dx}{\sqrt{4-2x^2}}$. 450д. $\int \frac{dx}{5-3x^2}$. 451д. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+8}}$.

452д. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}}$. 453д. $\int \frac{7-2x}{\sqrt{x^2-3}}dx$ 454д. $\int \frac{3x+4}{2-3x^2}dx$.

455д. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$. 456д. $\int e^{5x}ctg\left(2-3e^{5x}\right)dx$. 457д. $\int \frac{\sqrt{e^{5x}}-1}{e^{2x}}dx$.

Используя метод интегрирования квадратного трёхчлена, найти следующие интегралы:

458. $\int \frac{dx}{x^2+4x+1}$. 459. $\int \frac{dx}{3x^2+2x+2}$.

460. $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$. 461. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-7}}$.

462д. $\int \frac{3dx}{x^2-2x+10}$. 463д. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+8}}$.

464д. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$. 465д. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+7}}$.

Используя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

466. $\int x\sin 2xdx$. 467. $\int \left(3x+2\right)\cos 3xdx$. 468. $\int \left(x-3\right)e^{2x}dx$.

469. $\int x^2e^x dx$. 470. $\int arcctg\,2xdx$. 471. $\int \ln 2xdx$.

472. $\int \arcsin xdx$. 473. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. 474. $\int xarctgxdx$.

475. $\int x^3\ln xdx$. 476. $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$. 477. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

478д. $\int \left(2x+3\right)\sin xdx$. 479д. $\int \left(1-x\right)\cos 2xdx$. 480д. $\int xe^{-x}dx$.

481д. $\int \arccos xdx$. 482д. $\int arctg\,3xdx$. 483д. $\int \left(2x-1\right)\ln x\,dx$.

Определённые интегралы

Вычислить следующие определенные интегралы:

484. $\int_1^2 \left(3x^2 + \frac{2}{x^3}\right)dx$.

485. $\int_{-1}^1 \left(x^2 + 1\right)dx$.

486. $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$.

487. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx$.

488. $\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}dx$.

489. $\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos 4x dx}{\sin^3 4x}$.

490. $\int_1^e \frac{(2-\ln x)^2}{x}dx$.

491. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{3tg\,2x+1}}{\cos^2 2x}dx$.

492. $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} tg\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$.

493д. $\int_2^3 \left(4x^3 - 2x + 1\right)dx$.

494д. $\int_1^2 x(2-x)^2 dx$.

495д. $\int_{-3}^1 e^{-x}dx$.

496д. $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}dx$.

497д. $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

498д. $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

499д. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

500д. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.

501д. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(3\ln x+1)}$.

Используя метод интегрирования по частям, вычислить следующие определенные интегралы:

502. $\int_0^1 xarctgxdx$.

503. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

504. $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

505. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

506д. $\int_{-2}^0 (x+2)e^{\frac{x}{2}}dx$.

507д. $\int_1^8 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Вычислить площадь фигур, ограниченных указанными линиями:

508. $y = x^2,\ y = 3 - 2x^2$.

509. $y = x^3,\ y = 1,\ x = 0$.

510. $x = 1 - y^2,\ x = y - 1$.

511. $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$.

512. $y = x^3,\ y = 12 - 2x,\ y = 0$.

513. $y = e^x,\ y = 1 - x,\ x = -1,\ y = 0$.

514. $y = \ln x,\ x = e^2$, ось OX.

515д. $y = -x^2,\ x + y + 2 = 0$.

516д. $y=5-x^2,\ y=x^2-3.$ 517д. $x=4-2y^2,\ 2y+x=0.$

518д. $y=x^2,\ x+y=2,\ x=0.$ 519д. $y=2x-x^2,\ y=-2x^2+4x.$

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси координат фигуры, ограниченной заданными линиями:

520. $y=x^2,\ y=4;\ OY.$ 521. $y=x^2,\ x=y^2;\ OX.$

522. $y=1-\frac{x^2}{2},\ y+x=1;\ OY.$ 523. $y=x^3,\ y=1,\ x=0;\ OX;\ OY.$

524. $y=x^2,\ x+y=6,\ y=0;\ OX;\ OY.$

525д. $y^2=4-x,\ x=0;\ OY.$ 526д. $y=x,\ y=3x,\ x=3;\ OX.$

527д. $y=2x^2,\ y+2x=12,\ y=0;\ OX;\ OY.$

Вычислить длину дуги следующих кривых:

528. $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}},\ x\in[0;3].$ 529. $y=\ln\sin x,\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right].$

530. $y=x\sqrt{x},\ x\in[0;1].$ 531. $y=1-ln\left(x^2-1\right),\ x\in[3;4].$

532. $x=2\cos 6t,\ y=2\sin 6t,\ z=5t,\ t\in\left[0;\frac{\pi}{12}\right].$

533. $x=\frac{4}{3}\sqrt{t^3},\ y=3-t,\ t\in[0;2].$

534д. $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x},\ x\in[0;3].$ 535д. $y=\ln\cos x,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right].$

536д. $x=\cos 3t,\ y=\sin 3t,\ t\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right].$ 537д. $x=\frac{1}{3}t^3-t,\ y=t^2+2,\ t\in[0;6].$

Несобственные интегралы

Вычислить следующие несобственные интегралы (или установить их расходимость):

538. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}.$ 539. $\int\limits_{-\infty}^{0}x^2e^{x^3}dx.$ 540. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{3+4x}.$

541. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}.$ 542. $\int\limits_{-4}^{2}\frac{dx}{x+4}.$ 543. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt[3]{\cos 2x-1}}.$

544д. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. 545д. $\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx$. 546д. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-6}}$.

7 Теория вероятностей

7.1 Случайные события. Понятие вероятности

Случайным событием называется результат опыта (испытания), который заранее предсказать нельзя. Вместе со случайными событиями в теории вероятностей рассматривается также пара неслучайных (обусловленных) событий. Событие, которое обязательно произойдет в результате опыта, называется ***достоверным*** и обозначается ***U***. Событие, которое в данном опыте не может произойти называется ***невозможным*** и обозначается *V*.

Каждому случайному событию A можно поставить в соответствие его ***вероятность*** – это некоторое число $P(A)$, удовлетворяющее условию

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (7.1)$$

Это число описывает степень «осуществимости» случайного события, (у разных случайных событий разные «шансы» на осуществление). Вероятность события может быть определена по-разному.

Рассмотрим три способа определения вероятности.

Классическое определение вероятности

События называются ***несовместными***, если в результате проведения опыта появление одного из них исключает появление других.

События называются ***равновозможными***, если нет никаких оснований считать, что одно из этих событий имеет больше шансов на осуществление, чем другие.

Рассмотрим некоторый набор событий, связанных с проводимым опытом. Этот набор событий называется ***полной группой***, если в результате проведения опыта произойдет хотя бы одно из событий этого набора.

Элементарными событиями или исходами называют несовместные, равновозможные события, образующие полную группу.

Исход называется ***благоприятным*** данному событию, если его появление влечёт за собой наступление такого события.

Рассмотрим такой опыт, что найдётся n равновероятных попарно несовместных событий, образующих полную группу. И m из них благоприятствуют событию A.

Вероятностью события A называется отношение числа исходов (случаев), благоприятных событию A, к числу всех возможных исходов опыта.

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{7.2}$$

где m – число исходов, благоприятных событию A,

n – число всех возможных исходов опыта.

Пример 7.1. Пусть из колоды карт (36 листов), наудачу выбирают одну карту. Какова вероятность того, что это валет или дама.

Решение. Пусть событие A – извлечение карты с изображением валета или дамы.

Так как задача сводится к «схеме случаев», то применим формулу (7.2):

$P(A)=\frac{m}{n}$, где $n=36$ (соответствует общему количеству карт),

$m=8$ (соответствует суммарному количеству карт с изображением валета или дамы).

Тогда $P(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

Элементы комбинаторного анализа

На практике часто встречаются задачи, где необходимо подсчитать число всех возможных способов размещения некоторых предметов конечного множества или число всех возможных способов выполнения определенного действия из конечного множества таких действий. Задачи такого типа называются ***комбинаторными***, а методы их решения − ***методами комбинаторного анализа***.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов, которые отличаются только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n=n!, \tag{7.3}$$

где $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ называется факториалом числа n (читается n-факториал). Причём: $0!=1; 1!=1; 2!=1\cdot2=2; 3!=2!\cdot3=6; 4!=3!\cdot4=24\ldots$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^k = \frac{n!}{k!}. \tag{7.4}$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом (то есть отличаются только составом). Число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}. \tag{7.5}$$

Формулы (7.3)-(7.5) применимы, когда все n рассматриваемых элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае ***комбинации с повторениями*** вычисляют по другим формулам.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и так далее, то ***число перестановок с повторениями***

$$P_n(\textit{с повторениями}) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots}, \tag{7.6}$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

Число размещений с повторениями (среди k элементов сколько угодно может содержаться одинаковых)

$$A_n^k(\textit{с повторениями}) = n^k. \tag{7.7}$$

Пусть имеются n элементов и из них составляется набор, содержащий k элементов, отличающиеся составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называют ***сочетаниями с повторениями***, а их общее число определяется формулой

$$C_n^k(\textit{с повторениями}) = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}. \tag{7.8}$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $n+m$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $n \cdot m$ способами.

Пример 7.2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в число только один раз.

Решение. Количество трехзначных чисел, составленных из трех различных цифр – это число перестановок (7..) из трех элементов: $P_3 = 3! = 6$.

Пример 7.3. Дано множество $A = \{1, 3, 5\}$. Найти число размещений из элементов множества A по два, когда а) элементы не повторяются; б) элементы могут повторяться.

Решение.

а) Число размещений без повторений вычисляется по формуле (7.4):

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} = 6.$$

б) Число размещений с повторениями вычисляется по формуле (7.7): $A_3^2(\textit{с повторениями}) = 3^2 = 9$.

Пример 7.4. Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта?

Решение. Количество наборов – это число сочетаний с повторениями, вычисляемое по формуле (7.8):

$$C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Пример 7.5. В поставке из 20 кустов роз имеются 15 белых роз, остальные – розовые. Найти вероятность того, что среди купленных наудачу четырех кустов будут три белых розовых куста.

Решение. Обозначим событие A – из четырех кустов будут три белых розовых куста.

Так как задача сводится к «схеме случаев», то применим формулу (7.2):

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – число всех возможных исходов опыта –число сочетаний из 20 по 4:

$$n = C_{20}^{4} = \frac{20!}{4!\cdot(20-4)!} = \frac{16!\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 16!} = 4845.$$

m – число исходов, благоприятных событию A найдём по правилу произведения:

$$m = C_{15}^{3}\cdot C_{5}^{1} = \frac{15!}{3!\cdot(15-3)!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = \frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 12!}\cdot\frac{4!\cdot 5}{1\cdot 4!} = 2275.$$

Тогда $P(A) = \frac{2275}{4845} \approx 0{,}47.$

Пример 7.6. Из коробки, содержащей 6 красных и 4 белых кубика, выбирают два. Найти вероятность того, что эти кубики будут одного цвета.

Решение. Пусть событие B – два извлеченных кубика одного цвета.

Так как задача сводится к «схеме случаев», то применим формулу (7.2):

$$P(B) = \frac{m}{n},$$

где n – число всех возможных исходов опыта – число сочетаний из 10 (сколько всего кубиков) по 2 (сколько кубиков выбирают):

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 8!} = 45.$$

m – число исходов, благоприятных событию A, найдём по правилу суммы (либо оба кубика красные, либо оба кубика белые):

$$m = C_{6}^{2} + C_{4}^{2} = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} + \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 4!} + \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 1\cdot 2} = 15 + 6 = 21.$$

Тогда $P(B) = \frac{21}{45} \approx 0{,}47.$

Статистическое определение вероятности

Опыт называется ***воспроизводимым***, если в любой момент времени его условия могут быть воспроизведены.

Предположим, что проводится серия из n воспроизводимых опытов, в которой интересующее нас событие появляется m раз.

Относительной частотой события A называется отношение числа испытаний, в которых появилось событие A, к числу всех проведённых испытаний.

$$w(A)=\frac{m}{n}, \tag{7.9}$$

где m – число появлений события A,

n – общее число проведённых испытаний.

Статистической вероятностью события называется предел относительных частот при неограниченном удлинении серии.

Приведенные выше определения вероятности события применимы не всегда. Классическое определение вероятности неприменимо к событиям с бесконечным числом исходов, а в случае статистического определения вероятности возникают затруднения с вычислением предела относительных частот. В связи с этим дадим ещё одно определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности

Предположим, что рассматривается такой опыт, что достоверное событие, связанное с этим опытом, можно отождествить с некоторым геометрическим объектом конечной меры (длины, площади, объема). Будем также считать, что интересующее нас событие есть подмножество этого объекта, для которого также определено понятие меры того же типа.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области g, благоприятной появлению события A, к мере всей области G (с которой отождествляется достоверное событие в рассматриваемом опыте).

$$P(A)=\frac{мера\ \ g}{мера\ \ G}. \tag{7.10}$$

Пример 7.7. В течение одного часа на остановку прибывает только один автобус. Какова вероятность того, что пассажир, пришедший в начале часа, будет ожидать автобус не более 10 минут?

Решение. Рассмотрим событие A – пассажир будет ожидать автобус не более 10 минут (1/6 часа).

Множество всех возможных исходов для события A можно представить в виде отрезка $[0;1]$, длина которого $L=1$; а множество исходов благоприятных событию A – в виде отрезка $[0;1/6]$, длина которого $l=1/6$.

Тогда по формуле (7.10): $P(A)=\frac{l}{L}=\frac{1}{6}$.

Пример 7.8. ***Задача о встрече.*** Коля и Петя договорились встретиться на остановке автобуса между 10 и 11 часами. Каждый, придя на остановку, ждёт другого 15 минут, а потом уходит. Найти вероятность встречи Коли и Пети, если каждый из них наудачу выбирает момент своего прихода.

Решение. Рассмотрим событие A – встреча Коли и Пети состоится.

Пусть x – время прихода Коли, y – время прихода Пети.

Введём прямоугольную систему координат OXY с единичным масштабом, равным одному часу.

По условию встреча должна произойти в течение одного часа. Значит $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$, тогда множество всех возможных исходов будет представлять собой квадрат со стороной, равной единице. Обозначим эту область G, её площадь $S_G = 1$.

Для того чтобы произошло событие A необходимо и достаточно, чтобы выполнилось неравенство $|x - y| \le \frac{1}{4}$.

Значит, множество всех исходов, благоприятных событию A должно удовлетворять неравенству $|x - y| \le \frac{1}{4}$. Геометрически такое неравенство – это множество точек квадрата G, которые расположены между прямыми $x - y = \frac{1}{4}$ и $y - x = \frac{1}{4}$. Эту область обозначим g (рисунок 7.1).

Её площадь: $S_g = 1 - 2S_{\Delta} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$.

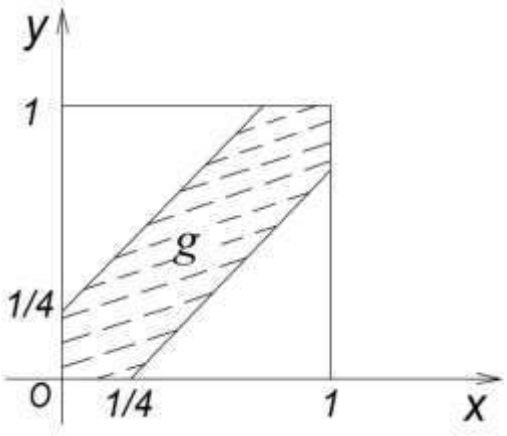


Рисунок 7.1 – Задача о встрече

Тогда $P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{7}{16}$.

7.2 Теоремы сложения и умножения

Суммой двух событий A и B называется событие ***A + B***, состоящее в том, что при проведении опыта произойдет событие A или событие B, или оба эти события.

Произведением двух событий A и B называется событие ***A · B***, состоящее в том, что при проведении опыта произойдут оба события A и B.

Теорема. Вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (7.11)$$

Формула вероятности суммы событий может быть распространена на любое число слагаемых, например,

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)-P(ABC).$$

Следствие. Вероятность суммы двух несовместных событий определяется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (7.12)$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (7.13)$$

Если попарно несовместные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \qquad (7.14)$$

В частности,

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \qquad (7.15)$$

где $\overline{A}$ – событие, состоящее в ненаступлении события A – ***противоположное событию*** A.

Пример 7.9. Из колоды карт (36 листов) наудачу извлекают 1 карту. Найти вероятность того, что это – либо шестёрка, либо трефовая масть.

Решение. Обозначим события:

A – появление либо дамы либо трефовой масти,

A_1 – появление дамы,

A_2 – появление трефовой масти.

Так как $A=A_1+A_2$, то по формуле (7.11):

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)$,

где $P(A_1)=\frac{4}{36}$, $P(A_2)=\frac{9}{36}$.

Событие $A_1 \cdot A_2$ – появление трефовой шестёрки $\Rightarrow$ $P(A_1 \cdot A_2)=\frac{1}{36}$.

Тогда $P(A)=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$.

Пример 7.10. Из колоды карт (36 листов) наудачу извлекают 1 карту. Найти вероятность того, что извлечённая карта окажется шестёркой или семёркой.

Решение. Обозначим события:

A – извлечённая карта окажется шестёркой или семёркой,

A_1 – извлечённая карта окажется шестёркой,

A_2 – извлечённая карта окажется семёркой.

Так как $A=A_1+A_2$ и события A_1 и A_2 – несовместные, то по формуле (7.12): $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$,

где $P(A_1)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P(A_2)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Тогда $P(A)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$.

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A при условии B называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло. Аналогичным образом вводится вероятность $P(B/A)$.

Теорема. Вероятность произведения двух событий есть произведение вероятности одного из этих событий на условную вероятность второго при условии, что первое уже произошло:

$$P(A \cdot B)=P(A)\cdot P(B/A) \text{ или}$$

$$P(A \cdot B)=P(B)\cdot P(A/B). \qquad (7.16)$$

Замечание 1. Формально формулы (7.16) равноправны, но в некоторых ситуациях события A и B разнесены во времени, поэтому применима только одна из формул. Это определяется физическими соображениями, присущими данному опыту.

Замечание 2. Формулы для вероятности произведения событий могут быть распространены на любое количество множителей. Например,

$$P(A \cdot B \cdot C)=P(A \cdot B)\cdot P(C/AB)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB). \qquad (7.17)$$

Если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого, то такие события называются ***независимыми***. ***Если события независимы***, то

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B), \tag{7.18}$$

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \tag{7.19}$$

Пример 7.11. В коробке содержится 7 синих, 8 зеленых и 5 фиолетовых кубиков. Из коробки трижды вынимают наудачу по одному кубику, не возвращая их в коробку. Найти вероятность того, что кубики будут вынуты в следующем порядке: первый – синий, второй – зеленый, а третий – фиолетовый.

Решение. Обозначим события:

A – кубики будут вынуты в следующем порядке: первый – синий, второй – зеленый, а третий – фиолетовый.

A_1 – первый из вынутых кубиков синий;

A_2 – второй из вынутых кубиков зеленый;

A_3 – третий из вынутых кубиков фиолетовый.

Так как $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, то по формуле (7.17):

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2),$$

где $P(A_1)=\frac{7}{20}$, $P(A_2/A_1)=\frac{8}{19}$, $P(A_3/A_1A_2)=\frac{5}{18}$.

Тогда $P(A)=\frac{7}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{5}{18}=\frac{7}{171}$.

Пример 7.12. Имеется 2 коробки, содержащих по 20 тарелок одного диаметра. В первой коробке 12 белых тарелок, а во второй 9. Из каждой коробки наудачу вынимают по одной тарелке. Найти вероятность того, что хотя бы одна тарелка будет белой.

Решение. Обозначим событие A – вынута хотя бы одна белая тарелка. Задачи на нахождение ***вероятности хотя бы одного события*** целесообразно решать, используя формулу для вероятности противоположного события.

Введём следующие события:

$\overline{A}$ – вынуты две не белые тарелки. Тогда по формуле (7.15)

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

$\overline{A}_1$ – из первой коробки вынули не белую тарелку;

$\overline{A}_2$ – из второй коробки вынули не белую тарелку.

Так как $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$ и события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ – независимые, то по формуле (7.18): $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2)$,

где $P(\overline{A}_1) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, $P(\overline{A}_2) = \frac{9}{20}$.

Тогда $P(\overline{A}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{20} = 0{,}27 \Rightarrow P(A) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$.

7.3 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. События $H_1, H_2, ..., H_n$ называют гипотезами по отношению к A. Тогда вероятность события A может быть вычислена по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i). \qquad (7.20)$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности.***

Пример 7.13. На склад доставляется однородная продукция с трех заводов-изготовителей в следующих количествах: первый завод поставляет 35% продукции, второй – 20%, третий – 45%. Известно, что в среднем на первом заводе изготавливается 3% нестандартных изделий, на втором заводе – 4%, на третьем – 3,5%. Какова вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие окажется нестандартным?

Решение. Обозначим событие A – наудачу взятое со склада изделие окажется нестандартным.

Событие A может произойти только вместе с одним из событий (гипотез):

H_1 – изделие изготовлено первым заводом;

H_2 – изделие изготовлено вторым заводом;

H_3 – изделие изготовлено третьим заводом.

Гипотезы H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий, тогда по формуле (7.20):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3),$$

где $P(H_1) = 0{,}35$; $P(H_2) = 0{,}2$; $P(H_3) = 0{,}45$;

$P(A / H_1) = 0{,}03$; $P(A / H_2) = 0{,}04$; $P(A / H_3) = 0{,}035$.

Тогда $P(A) = 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}035 = 0{,}03425$.

Иногда на практике после осуществления события A требуется узнать, какая именно из гипотез вероятнее всего реализовалась при осуществлении события. Так в примере 7.13, после извлечения нестандартного изделия со склада, потребитель непременно заинтересуется, где же вероятнее всего его изготовили. Ответ на этот вопрос можно получить при помощи ***формулы Байеса***.

Пусть, как и в формуле полной вероятности, событие A можно осуществить лишь с гипотезами $H_1, H_2, ..., H_n$, тогда

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)},\ k = 1, 2, ..., n. \qquad (7.21)$$

Пример 7.14. Пусть в условиях предыдущего примера со склада извлечено нестандартное изделие. Где вероятнее всего это изделие изготовлено?

Решение. Воспользуемся обозначениями примера 7.13, тогда

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}03}{0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}035} =$$

$$= \frac{0{,}0105}{0{,}03425} \approx 0{,}307;$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}04}{0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}035} =$$

$$= \frac{0{,}008}{0{,}03425} \approx 0{,}234;$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}035}{0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}035} =$$

$$= \frac{0{,}01575}{0{,}03425} \approx 0.46.$$

Приведенные расчёты показывают, что вероятнее всего нестандартное изделие, извлеченное со склада, изготовлено на третьем заводе.

7.4 Схема повторных испытаний. Наивероятнейшее число наступлений события

Формула Бернулли

Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, а вероятность его не появления равна $q = 1 - p$.

Тогда ***вероятность того, что событие A появится ровно*** k ***раз*** вычисляется по ***формуле Бернулли:***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{7.22}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 7.15. Вероятность того, что билет лотереи является выигрышным, равна 0,49. Какова вероятность того, что из пяти лотерейных билетов выиграют три билета?

Решение. Рассмотрим событие A – билет окажется выигрышным. Проводится серия из пяти испытаний (пять билетов), в каждом из которых вероятность события A постоянна и равна $P(A) = 0{,}49$. Нужно найти вероятность ровно трех появлений события A. По формуле (7.22):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $n = 5$, $k = 3$, $p = P(A) = 0{,}49$, $q = 1 - p = 0{,}51$.

Тогда $P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0{,}49^3 \cdot 0{,}51^2 \approx 0{,}31$.

Значение $k = k_0$, при котором вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение, называется ***наивероятнейшим числом появления события A в n испытаниях*** и определяется из неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p. \tag{7.23}$$

Если этому неравенству удовлетворяет два целых значения k_0, то и имеется два наивероятнейших числа.

Пример 7.16. Заявки на получение запасных частей поступают на оптовую базу от семи автомагазинов ежедневно и независимо друг от дуга. Вероятность получения заявки от каждого магазина равна 0,6. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

Решение. По условию $n = 7,\ p = 0{,}6,\ q = 1 - p = 0{,}4$.

Тогда по формуле (7.23): $n \cdot p - q \le k_0 \le n \cdot p + q$,

$$7 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 \le 7 \cdot 0{,}6 + 0{,}6,$$

$$3{,}8 \le k_0 \le 4{,}8.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $k_0 = 4$.

Вероятность четырёх заявок из семи вычислим по формуле (7.22):

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}174.$$

Замечание 1. Иногда событие, состоящее в осуществлении события A, называют успехом. В связи с этим вероятность $P_n(k)$ называется вероятностью k успехов в серии из n испытаний (опытов).

Замечание 2. Формулой Бернулли удобно пользоваться при вычислениях вероятностей, связанных со сравнительно короткими сериями. При длинных сериях её использование связано с вычислительными трудностями.

Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится ровно k раз в n испытаниях приближённо равна

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}. \qquad (7.24)$$

Формула (7.24) называется ***формулой Пуассона*** – формула для числа успехов редких событий в длинных сериях. Это название связано с тем, что формула Пуассона дает точные результаты в тех случаях, когда вероятность p достаточно мала (настолько мала, что величина np мало меняется с ростом n).

Замечание. Иногда удобно как редкое рассматривать не само событие A, а противоположное к нему. При этом следует учитывать, что вероятность k успехов есть вероятность $n-k$ неуспехов. И, в этом случае, малой величиной должна быть вероятность $q=1-p$.

Пример 7.17. Вероятность сбоя в течение суток при работе трансформатора с программным управлением 0,0003. Найти вероятность того, что количество сбоев в течение 1000 суток не превысит одного.

Решение. Рассмотрим событие A – произойдёт сбой в течение суток.

По условию задачи: $n=1000$, $p=P(A)=0{,}0003$, $np=0{,}3$. Следовательно, нужно воспользоваться формулой Пуассона (7.24):

$$P_n(k)=\frac{(np)^k}{k!}\cdot e^{-np},\ \text{где}\ k\le 1.$$

Тогда $P_{1000}(k\le 1)=P_{1000}(0)+P_{1000}(1)\approx\frac{0{,}3^0}{0!}\cdot e^{-0{,}3}+\frac{0{,}3^1}{1!}\cdot e^{-0{,}3}\approx 0{,}963$.

Подсчет клеток под микроскопом. Предположим, что n клеток определенного типа распределены случайным образом по площади предметного стекла, которое разбито квадратной решеткой на 900 (30×30) равных участков. Вероятность того, что конкретная клетка лежит в данном участке решетки, есть $p=\frac{1}{900}$. Процесс размещения n клеток на предметном стекле можно рассматривать как n повторных испытаний, где «успех» определяется как попадание клетки в конкретный участок решетки. Если n велико, то для вычисления вероятности того, что конкретный участок решетки содержит k клеток, можно воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{(np)^k}{k!}\cdot e^{-np}=\left(\frac{n}{900}\right)^k\frac{e^{-\frac{n}{900}}}{k!},\ k=0,1,2,\ldots$$

Величина $P_n(k)$ даёт долю тех из 900 участков, в которых содержится по k клеток. Общее число участков, содержащих по k клеток, $900\,P_n(k)$. Например, ожидается, что в среднем $900e^{-\frac{n}{900}}$ участков не содержат ни одной клетки.

Это дает нам метод оценки общего числа имеющихся клеток путем определения числа тех участков квадратной решетки, которые не содержат этих клеток. Если, например, мы видим, что клеток нет в 75 участках квадратной решетки, то $75=900e^{-\frac{n}{900}}$.

Отсюда $n = 900 \ln\left(\frac{900}{75}\right) = 900 \ln 12 \approx 2240$.

Основное допущение, сделанное нами, состоит в том, что n клеток распределены по площади стекла случайно. Если это допущение справедливо, то формула Пуассона дает весьма эффективное средство оценки числа клеток на стекле.

Локальная формула Лапласа

Если вероятность p события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится ровно k раз в n испытаниях, приближённо равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (7.25)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Имеется таблица, в которой приведены значения функции $\varphi(x)$, соответствующие значениям $x \in [0; 4]$ (приложение 1). Для $x > 4$ полагают $\varphi(x) \approx 0$. Значения функции $\varphi(x)$ для $x < 0$ находят по той же таблице, учитывая, что $\varphi(x)$ – чётная функция, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Замечание. Локальная формула Лапласа может применяться практически всегда. Однако в тех случаях, когда либо p, либо $q = 1 - p$ очень малы, погрешность этой формулы больше, чем формулы Пуассона, используемой в нужной интерпретации.

Пример 7.18. Монету бросают 200 раз. Какова вероятность того, что решка выпадет 120 раз?

Решение. Рассмотрим событие A – выпадение решки при одном бросании монеты. Проводится серия из 200 испытаний (монету бросают 200 раз), при этом $P(A) = 0{,}5$, $k = 120$. Следовательно, нужно воспользоваться локальной формулой Лапласа (7.25):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $n = 200$, $k = 120$, $p = P(A) = 0{,}5$, $q = 1 - p = 0{,}5$.

Тогда $x = \dfrac{120 - 200 \cdot 0{,}5}{\sqrt{200 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \dfrac{20}{\sqrt{50}} \approx 2{,}83.$

$$P_{200}(120) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot \varphi(2{,}83) \approx \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot 0{,}0073 \approx 0{,}001.$$

Интегральная формула Лапласа

Анализ локальной формулы Лапласа показывает, что в длинных сериях вероятность $P_n(k)$ практически равна нулю при фиксированном k. С другой стороны, на практике, как правило, интересуются не столько именно вероятностью $P_n(k)$, сколько вероятностью того, что число успехов будет принимать значения на некотором интервале числовой оси. Например, используя 1000 ламп, интересуются вероятностью того, чтобы число перегоревших ламп (в течение определённо времени) будет не более определённого числа (плана).

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз (при этом n достаточно велико), приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{7.26}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Имеется таблица, в которой приведены значения функции $\Phi(x)$, соответствующие $x \in [0; 5]$ (приложение 2). Для $x > 5$ полагают $\Phi(x) \approx 0{,}5$. Значения функции $\Phi(x)$ для $x < 0$ находят, учитывая, что $\Phi(x)$ – нечётная функция, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 7.19. Укоренение саженцев липы составляет 91%. Какова вероятность того, что из 600 высаженных саженцев липы укоренятся не менее 530?

Решение. Рассмотрим событие A – один саженец липы укоренится. Проводится серия из 600 испытаний (600 высаженных саженцев липы), при этом $P(A) = 0{,}91$, $k \geq 530$. Следовательно, нужно воспользоваться интегральной формулой Лапласа (7.26):

$$P_n(k_1,\ k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $n = 600$, $k_1 = 530$, $k_2 = 600$,

$p = P(A) = 0{,}91$, $q = 1 - p = 0{,}09$.

Тогда $x_1 = \dfrac{530 - 600 \cdot 0{,}91}{\sqrt{600 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}09}} = \dfrac{-16}{\sqrt{49{,}14}} \approx -2{,}28$,

$$x_2 = \frac{600 - 600 \cdot 0{,}91}{\sqrt{600 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}09}} = \frac{54}{\sqrt{49{,}14}} \approx 7{,}70,$$

$$P_{600}(530,\ 600) \approx \Phi(7{,}70) - \Phi(-2{,}28) = \Phi(7{,}70) + \Phi(2{,}28) = 0{,}5 + 0{,}4887 = 0{,}9887$$

7.5 Случайные величины и их классификация

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта (испытания) может принять определённое, заранее неизвестное числовое значение.

По-другому, случайную величину можно определить как функцию. Если S – множество всевозможных исходов некоторого опыта, то ***случайной величиной называется функция***, определенная на множестве S исходов опыта и принимающая значения на множестве действительных чисел: $f(s) \in \mathbb{R}$.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая принимает конечное или счётное число значений, то есть значения дискретной случайной величины можно пронумеровать.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x). \qquad (7.27)$$

Свойства функции распределения $F(x)$:

1) $0 \le F(x) \le 1$.

2) $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$.

3) функция $F(x)$ неубывающая.

4) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$.

Случайная величина называется непрерывной, если её функция распределения непрерывна. При этом непрерывная случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Например.

1. Случайная величина X – число очков, выпавших при одном бросании игральной кости. Её возможные значения $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_6 = 6$.

2. Случайная величина Y – продолжительность жизни домашней кошки. Её возможные значения принадлежат некоторому промежутку $0 \le y < 25$.

7.6 Дискретные случайные величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения можно задать таблично, аналитически и графически.

Пусть X – дискретная случайная величина,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – её возможные значения,

$p_i = P(X = x_i)$ – вероятность появления значения x_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таблица

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

является законом распределения дискретной случайной величины и называется ***ряд распределения***.

Так как в рассматриваемом испытании случайная величина X обязательно принимает одно из своих n возможных значений, то события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, следовательно, сумма их вероятностей равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графическое изображение закона распределения называется ***многоугольником (полигоном) распределения*** (рисунок 7.2) – это ломаная, соединяющая точки $(x_i; p_i)$.

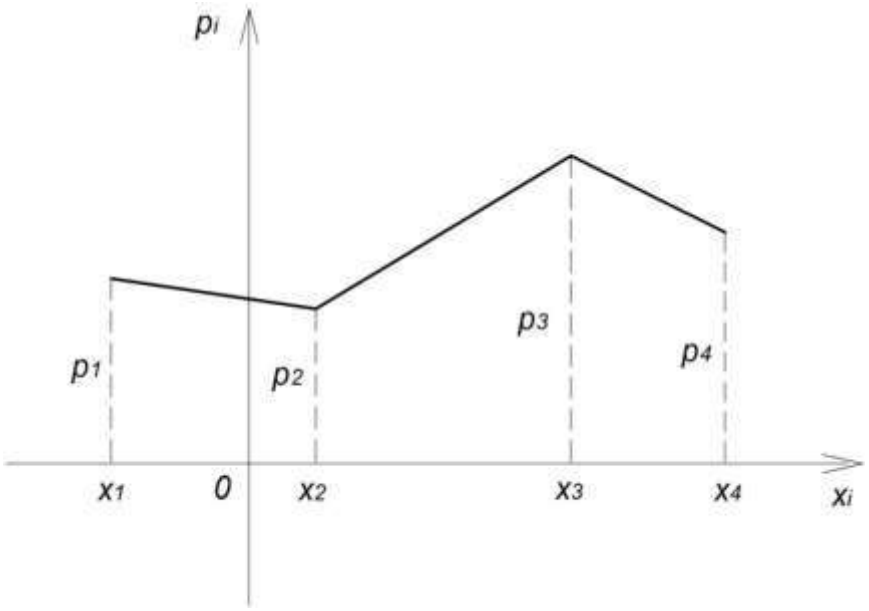


Рисунок 7.2 – Полигон распределения

По определению функция распределения случайной величины есть вероятность того, что случайная величина примет значение меньше аргумента, поэтому

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le x_1,\\ p_1 & \text{при } x_1 < x \le x_2,\\ p_1+p_2 & \text{при } x_2 < x \le x_3,\\ p_1+p_2+p_3 & \text{при } x_3 < x \le x_4,\\ \quad\ldots & \\ 1 & \text{при } x > x_n.\end{cases} \tag{7.28}$$

Построим график функции распределения дискретной случайной величины (рисунок 7.3).

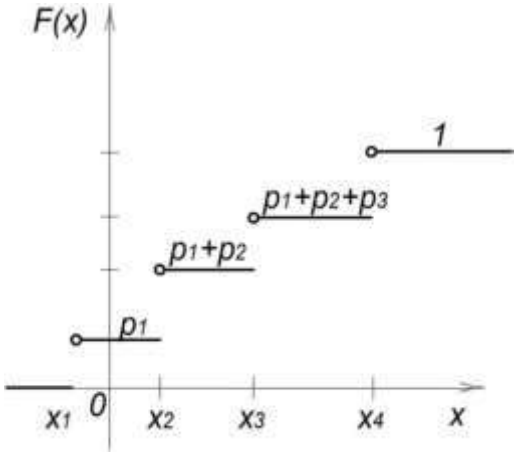


Рисунок 7.3 – График функции распределения
дискретной случайной величины

Пример 7.20. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение. Обозначим X – число отказавших элементов в одном опыте. Возможные значения этой случайной величины: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому вероятности возможных значений рассматриваемой случайной величины вычисляются по формуле Бернулли:

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n = 3$; $p = 0{,}1$; $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$; $k = 0, 1, 2, 3$.

Тогда $P(X = 0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = 1 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}729$;

$$P(X = 1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P(X = 2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}027;$$

$$P(X = 3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}001.$$

Контроль: $0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1$.

Запишем искомый закон распределения X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Пусть дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (7.29)$$

Математическое ожидание случайной величины есть некоторое среднее, вокруг которого группируются значения, принимаемые СВ.

Если ряд, определяющий математическое ожидание расходится, то говорят, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Свойства математического ожидания

1. $M(C)=C$, где $C=const$.
2. $M(C\cdot X)=C\cdot M(X)$.
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.
4. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если при любых i, j события $(X=x_1)$ и $(Y=y_1)$являются независимыми.

Отклонением случайной величины от её математического ожидания называется разность $X-M(X)$. Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M[X-M(X)]=0$.

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2. \qquad (7.30)$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния случайной величины вокруг её математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем сильнее разбросаны возможные значения от среднего; чем меньше дисперсия, тем ближе к среднему группируются возможные значения.

Если в формуле (7.30) раскрыть скобки и применить свойства математического ожидания, то получим формулу, которую чаще используют для вычисления дисперсии:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X), \qquad (7.31)$$

где $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$ – математическое ожидание квадрата случайной величины X,

$M^2(X)=[M(X)]^2$ – квадрат математического ожидания случайной величины X.

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$, где $C=const$.
2. $D(CX)=C^2\cdot D(X)$.
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому вместо неё часто рассматривают характеристику, имеющую размерность самой случайной величины.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{7.32}$$

Пример 7.21. Найти числовые характеристики случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	-3	-2	1	4
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Решение.

1. Найдем математическое ожидание $M(X)$ по формуле (7.29):

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=-3\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}2=0{,}3.$$

2. Найдём дисперсию $D(X)$ по формуле (7.31): $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$,

где $M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 p_i=(-3)^2\cdot 0{,}1+(-2)^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}4+4^2\cdot 0{,}2=$

$$=0{,}9+1{,}2+0{,}4+3{,}2=5{,}7,$$

$$M^2(X)=[M(X)]^2=(0{,}3)^2=0{,}09.$$

Тогда дисперсия равна $D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=5{,}7-0{,}09=5{,}61,$

а среднее квадратическое отклонение по формуле (7.32):

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{5{,}61}\approx 2{,}369.$$

Начальные и центральные моменты

Кроме математического ожидания и дисперсии, применяют ещё ряд числовых оценок.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k

$$\nu_к = M\left(X^k\right) \tag{7.33}$$

В частности $\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M\left(X^2\right)$. Тогда формулу для дисперсии можно переписать в виде

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \nu_2 - \nu_1{}^2.$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $\left[X - M(X)\right]^k$

$$\mu_к = M\left[X - M(X)\right]^k. \tag{7.34}$$

В частности: $\mu_1 = M\left[X - M(X)\right] = 0$, $\mu_2 = M\left[X - M(X)\right]^2 = D(X)$.

7.7 Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется непрерывной, если её функция распределения $F(x)$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке множества действительных чисел, то есть при всех $x \in \mathbb{R}$. При этом $F(x)$ называют ещё интегральной функцией.

Из определения и свойств функции распределения следует вид графика функции распределения непрерывной случайной величины (рисунок 7.4).

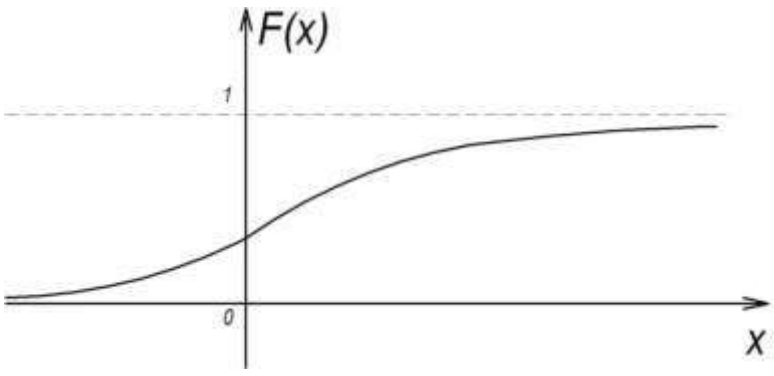


Рисунок 7.4 – График функции распределения
непрерывной случайной величины

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X ***в интервал*** $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{7.35}$$

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция

$$f(x) = F'(x). \tag{7.36}$$

Функция распределения $F(x)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком плотности распределения на промежутке $(-\infty, x]$.

Свойства плотности распределения $f(x)$

1. $f(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

График плотности распределения называется ***кривой распределения***. Функцию плотности распределения называют еще ***дифференциальной функцией***.

Функцию распределения $F(x)$ можно найти через плотность распределения по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{7.37}$$

Пример 7.22. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; 2)$ и функцию распределения по данной плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 1; \\ \dfrac{x}{4} \text{ при } 1 < x \leq 3; \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Построить график найденной функции.

Решение. 1. Воспользуемся формулой (7.37): $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Если $x\le 1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$.

Если $1<x\le 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dt+\int\limits_{1}^{x}\frac{t}{4}dt=0+\left.\frac{t^2}{8}\right|_1^x=$

$$=\frac{x^2}{8}-\frac{1^2}{8}=\frac{x^2-1}{8}.$$

Если $x>3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dt+\int\limits_{1}^{3}\frac{t}{4}dt+\int\limits_{3}^{x} 0\,dt=0+\left.\frac{t^2}{8}\right|_1^3+0=$

$$=\frac{3^2}{8}-\frac{1^2}{8}=\frac{9-1}{8}=1.$$

Итак, искомая функция распределения $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1;\\ \dfrac{x^2-1}{8} \text{ при } 1<x\le 3;\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$

Построим график этой функции (рисунок 7.5).

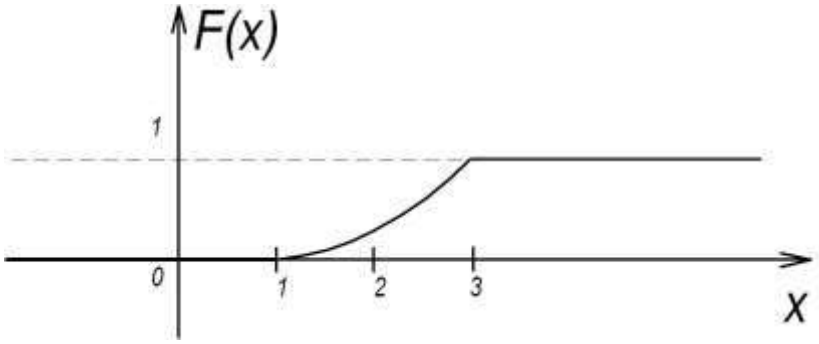


Рисунок 7.5 – График функции распределения
к примеру 7.22

2. Вероятность $P(0<X<2)$ найдём по формуле (7.35):

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{2^2-1}{8}-0=\frac{3}{8}.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

математическое ожидание

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx; \qquad (7.38)$$

дисперсия

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X); \qquad (7.39)$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример 7.23. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1;\\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{6} \text{ при } -1<x\le 5;\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятностей случайной величины X;

б) математическое ожидание случайной величины X;

в) дисперсию случайной величины X.

Решение. а) Плотность распределения вероятностей случайной величины X найдем по формуле (7.36):

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1;\\ \dfrac{1}{6} \text{ при } -1<x\le 5;\\ 0 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

б) Математическое ожидание случайной величины X находим по формуле (7.38):

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{-1}^{5} x\cdot\frac{1}{6}dx=\frac{x^2}{12}\Bigg|_{-1}^{5}=\frac{5^2}{12}-\frac{(-1)^2}{12}=\frac{25}{12}-\frac{1}{12}=2.$$

в) Дисперсию случайной величины X находим по формуле (7.39):

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int\limits_{-1}^{5} x^2\cdot\frac{1}{6}dx-2^2=\frac{x^3}{18}\Bigg|_{-1}^{5}-4=\frac{5^3}{18}-\frac{(-1)^3}{18}-4=$$

$$=\frac{125}{18}+\frac{1}{18}-4=3.$$

7.8 Некоторые стандартные распределения

Биноминальное распределение

Дискретная случайная величина X распределена по биноминальному закону, если её возможные значения $0, 1, 2, ..., n$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n$, $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$.

При этом ряд распределения имеет вид:

X	0	1	…	k	…	n
P	q^n	npq^n	…	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	…	p^n

Биноминальное распределение определяется двумя параметрами n и p. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение биноминально распределённой случайной величины имеют вид:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}. \tag{7.40}$$

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если её возможные значения $1, 2, ..., n, ...$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}, \tag{7.41}$$

где $k = 1, 2, ..., n, ...$, $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$.

При этом ряд распределения имеет вид:

X	1	2	3	…	n	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

Геометрическое распределение определяется двумя параметрами n и p. При этом математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение находят по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{1}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{p}. \tag{7.42}$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если её возможные значения $0, 1, 2, ..., n, ...$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n, ...,\ p \in (0, 1),\ q = 1 - p$.

При этом ряд распределения имеет вид:

X	0	1	2	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	…

Распределение Пуассона определяется одним параметром $\lambda > 0$. При этом математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение находят по формулам:

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda; \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{7.43}$$

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке $[a, b]$, если плотность её распределения постоянна на этом отрезке и равна нулю вне него, то есть:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{7.44}$$

Равномерное распределение определяется двумя параметрами a и b. При этом математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение находят по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{7.45}$$

Функция распределения для равномерно распределённой случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } x\in[a,b],\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases} \tag{7.46}$$

Если какой-либо отрезок $[\alpha;\beta]$ целиком содержится в $[a;b]$, то вероятность попадания в него равномерно распределённой случайной величины X равна:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}\ . \tag{7.47}$$

Показательное распределение

Непрерывная случайная величина называется распределенной по показательному закону, если её плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases} \tag{7.48}$$

где $\lambda>0.$

Показательное распределение определяется одним параметром λ. При этом математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение находят по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \tag{7.49}$$

Функция распределения для показательно распределённой случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases} \tag{7.50}$$

Ели $a\ge 0$ и $b>0$, то вероятность попадания в интервал $(a\,;b)$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, равна

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \tag{7.51}$$

Показательное распределение широко применяется в приложениях, в частности, в теории надежности.

Отметим связь между экспоненциальным и пуассоновским законами распределений, если число появления события A (например, число отказов) распределено по закону Пуассона, то интервалы времени между моментами появления событий подчиняются экспоненциальному закону.

Пример 7.24. Монета подбрасывается 8 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа появлений герба.

Решение. Так как случайная величина X – числа появлений герба имеет биноминальное распределение, то её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение можно найти по формулам (7.40):

$$M(X)=np;\quad D(X)=npq;\quad \sigma(X)=\sqrt{npq},$$

где $n=8;\ p=0{,}5;\ q=1-p=0{,}5$.

Тогда $M(X)=8\cdot 0{,}5=4;\quad D(X)=8\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=2;\quad \sigma(X)=\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

Пример 7.25. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02.

Решение. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность распределения равномерного распределения

$$f(x)=\frac{1}{b-a},$$

где $(b-a)$ − длина интервала, в котором заключены возможные значения X; за пределами этого интервала $f(x)=0$.

В нашем случае длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,1, поэтому

$$f(x)=\frac{1}{0{,}1}=10.$$

Ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале $(0{,}02;\ 0{,}08)$. По 3-му свойству функции плотности распределения получим

$$P(0{,}02<X<0{,}08)=\int_{0{,}02}^{0{,}08}10\,dx=10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08}=0{,}8-0{,}2=0{,}6.$$

7.9 Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется распределённой по ***нормальному закону*** (***по закону Гаусса***) с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (7.52)$$

где $a\in\mathbb{R}$, $\sigma\in\mathbb{R}$ и $\sigma>0$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. При этом a есть математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины. То есть

$$M(X)=a, \qquad D(X)=\sigma^2, \qquad \sigma(X)=\sigma. \qquad (7.53)$$

Пользуясь методами дифференциального исчисления можно показать, что график функции (7.52) имеет максимум: $x_{\max}=a$, $y_{\max}=y(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, точки перегиба: $x_{\text{т.п}}=a\pm\sigma$, $y_{\text{т.п}}=y(a\pm\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ и горизонтальную асимптоту $y=0$.

Тогда ***нормальная кривая*** (***кривая Гаусса***) имеет вид, представленный на рисунке 7.6.

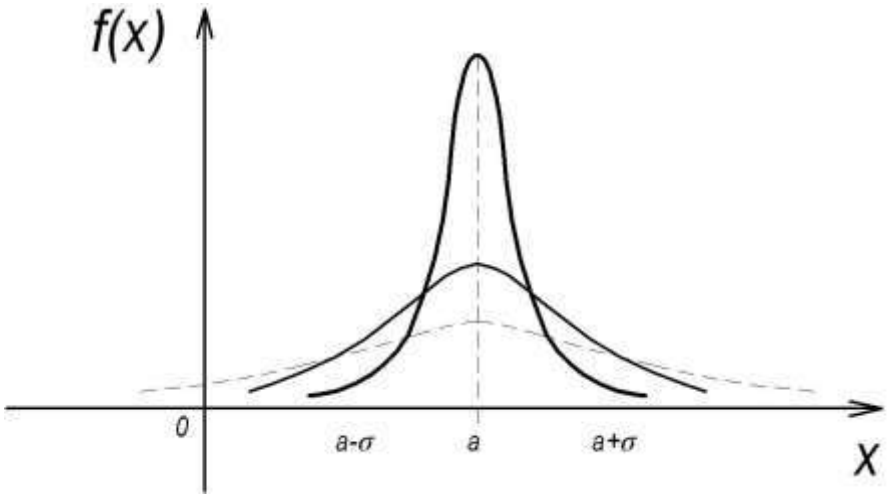


Рисунок 7.6 – Нормальная кривая (кривая Гаусса)

Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой

Изменение величины параметра a (математического ожидание) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к её сдвигу вдоль оси абсцисс: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает.

Так как $y_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, то с возрастанием σ максимальная ордината кривой уменьшается, а сама кривая становится более «пологой»; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси ординат.

Так же при любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью абсцисс равна 1.

Замечание. При $a = 0$ и $\sigma = 1$ нормальная кривая задается формулой $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и называется нормированной.

Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал. Правило 3σ

Вероятность того, что нормально распределённая случайная величина X попадёт в интервал $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{7.54}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt -$ функция Лапласа.

Вероятность того, что нормально распределённая случайная величина X отклонится от математического ожидания $M(X) = a$ по абсолютной величине не более чем на $\varepsilon > 0$, вычисляется по формуле

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{7.55}$$

В частности, имеет место следующее утверждение, называемое ***правилом*** 3σ: практически наверняка (с вероятностью 0,998) нормально распределённая случайная величина принимает свои значения на интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. На практике правило 3σ применяют следующим образом:

если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, то есть основание полагать, что изучаемая величина распределена нормально.

Пример 7.26. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 45 и 6. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (42; 54).

Решение. Воспользуемся формулой (7.54):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

По условию $a = 45,\ \sigma = 6,\ \alpha = 42,\ \beta = 54$. Следовательно,

$$P(42; 54) = \Phi\left(\frac{54 - 45}{6}\right) - \Phi\left(\frac{42 - 45}{6}\right) = \Phi(1{,}5) + \Phi(0{,}5) = 0{,}4332 + 0{,}1915 = 0{,}6247.$$

Предельные теоремы теории вероятностей

Приведём некоторые обобщения закона больших чисел в форме Бернулли.

Теорема Чебышева. Пусть случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно независимы и имеют ограниченные в совокупности дисперсии $D(X_i) \le C$, $i = \overline{1, n}$, тогда каково бы ни было $n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

В частности, следующая теорема описывает один из случаев.

Теорема Бернулли. Пусть случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ имеют одинаковое распределение, тогда среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к их математическому ожиданию, то есть

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} X_k - a\right| \le \varepsilon\right) = 1, \text{ где } a = M(X_k) \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

Условия, при которых возникает нормальный закон, устанавливается в различных формах центральной предельной теоремы. Одна из наиболее общих форм этой теоремы доказана выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым в 1900 году.

Центральная предельная теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то случайная величина X имеет распределение, близкое к нормальному.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое перестановка, размещение, сочетание?
2. Запишите формулу для вычисления сочетаний.
3. Сформулируйте классическое определение вероятности события.
4. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Дайте определение полной группы событий.
6. Какие события называются несовместными, независимыми?
7. Зависимы ли:

а) несовместные события;

б) события, образующие полную группу?

8. Какую формулу применяют для вычисления числа успехов редких событий в длинных сериях?
9. В каких случаях применяют локальную и интегральную формулы Лапласа?
10. Какие случайные величины называются дискретными (непрерывными)?
11. Каковы свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины?
12. Запишите формулы для вычисления дисперсии дискретной (непрерывной) случайной величины.
13. Как связаны функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины?
14. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
15. Какая случайная величина называется нормально распределенной?
16. Что такое «правило 3σ »?

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Элементы комбинаторного анализа

547. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться?
548. Сколькими способами могут быть распределены три первых места среди 20 соревнующихся?
548. В цветочном киоске 6 видов цветов. Сколькими разными способами можно составить букет, содержащий 3 цветка?
550. Сколько разных чисел (трехзначных) можно получить из цифр 1, 7, 9?
551. Студенты сдают 4 экзамена, из них 2 экзамена связаны с биологией. Сколькими способами можно распределить экзамены, но так, чтобы экзамены, связанные с биологией, следовали один за другим?
552д. Если подбросить одновременно три игральные кости, то сколько имеется различных возможных комбинаций выброшенных очков?
553д. Сколько имеется четырехзначных чисел, все цифры у которых различны?
554д. Сколькими способами можно выбрать 3 яблока из корзины с 12 яблоками?
555д. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (три вертикальные полосы), если имеется материал 6 различных цветов?
556д. В комнате имеется 6 стульев. Сколькими способами можно разместить на них: а) 6 гостей; б) 3 гостей?

Случайные события. Понятие вероятности

557. В урне 9 белых и 6 синих шаров. Какова вероятность, что наудачу вынутый шар окажется белым?
558. Из урны, в которой имеется 5 белых, 7 синих и 3 красных шара, наудачу берут один шар. Чему равна вероятность, что вынутый шар окажется: а) синим; б) не белым; в) белым; г) чёрным?
559. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков: а) равна 7; б) не более 5-и; в) кратна 4?
560. Какова вероятность, что наудачу выбранное двузначное число состоит из одинаковых цифр?
561. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера, которые потом тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

562. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 8, а во втором – с номерами от 9 до 15. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: а) не менее 21; б) равна 20; в) не более 13?

563. В ящике 20 деталей, 6 из них окрашены. Наудачу извлекают 4 детали. Какова вероятность того, что три из них окрашены, а одна нет?

564. В экзаменационный билет входит 3 вопроса программы, насчитывающей 40 вопросов. Студент не знает 15 вопросов программы. Какова вероятность, что он ответит на все вопросы взятого наудачу билета?

565. Из коробки, содержащей 6 пронумерованных жетонов, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку (по убыванию).

566. Из 450 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 12 нестандартных. Определите частоту появления нестандартных деталей.

567. Какова статистическая вероятность прорастания семян, если из 1000 посаженных семян проросло 745?

568. Внутрь круга радиуса 6 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника. (Предполагается, что вероятность попадания в треугольник пропорциональна площади треугольника и не зависит от его расположения внутри круга).

569. Абонент ждёт телефонного вызова в течение одного часа. Какова вероятность того, что вызов произойдёт в последние 15 минут.

570. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 2-х деталей есть хотя бы одна стандартная.

571. В урне 9 белых шаров и 3 чёрных шара. Найти вероятность того, что среди 4 отобранных наудачу шаров окажется не более одного чёрного шара.

572д. В лототроне 45 шаров с номерами от 1 до 45. Какова вероятность событий: А – номер первого разыгранного шара кратен 4; В – номер первого шара нечётный?

573д. В ящике 16 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 16. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара: а) не превышает 11; б) более 8?

574д. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма очков не превосходит 5; б) произведение числа очков не превосходит 8.

575д. В урне 12 шаров: 5 белых и 7 чёрных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

576д. В партии готовой продукции из 8 изделий имеется 5 изделий высшего качества. Наудачу отбираются 4 изделий. Какова вероятность того, что три из них будут высшего качества?

577д. Произведя 150 выстрелов, стрелок попал в цель 126 раз. Найти частоту попадания данного стрелка в цель.

578д. В круге радиусом 12 см помещён меньший круг радиуса 8 см. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в большой круг точка попадёт также в меньший круг.

579д. В лотерее 30 билетов, из них 5 выигрышных. Найти вероятность того, что из двух взятых билетов хотя бы один выигрышный.

Теоремы сложения и умножения

580. Три орудия ведут огонь по цели. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,5; из второго – 0,7; из третьего – 0,9. Каждое орудие стреляет один раз. Найти вероятность того, что два орудия попадут в цель.

581. Из колоды карт (36 штук) наудачу взяты три карты. Найти вероятность того, что все они окажутся черной масти.

582. В одном ящике – 12 деталей, из них 10 стандартных, в другом – 20 деталей, из них 15 стандартных. Взяли по одной детали из каждого ящика. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется стандартной.

583. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,7; второе – 0,95; третье – 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) все три устройства.

584. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из костей выпадет 3 очка.

585. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из костей выпадет 4 очка?

586. Партия семян, состоящая из 8 мешков, подлежит приёмке, если при проверке наугад выбранных двух мешков окажется, что содержащиеся в них семена удовлетворяют стандарту. Найти вероятность приёмки партии, содержащей в 2 мешках нестандартные семена.

587. В первом ящике 3 белых, 2 красных и 5 синих шара; во втором ящике 7 белых, 6 красных, 2 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

588. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,2. Приобретено

три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

589. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,15; на втором – 0,25; на третьем – 0,4. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) хотя бы на одном предприятии.

590. В урне 8 красных, 3 зелёных и 5 чёрных шаров. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут: а) одного цвета; б) разных цветов.

591. Первый студент из 30 вопросов программы выучил 22, второй – 18. Каждому студенту задают по одному вопросу (вопросы могут повторяться). Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.

592д. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,15, для второго – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены только один станок выйдет из строя.

593д. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости появится нечетное число очков, а на второй – четыре очка.

594д. В первом ящике 8 белых и 10 чёрных шаров. Во втором ящике 12 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика наудачу вынули по одному шару. Какова вероятность того, что шары разного цвета?

595д. В магазин вошли 3 покупателя. Вероятность покупки для каждого из них равна 0,4. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки; г) хотя бы один купит товар.

596д. На базу поступило 60 ящиков овощей, из них 48 первого сорта, остальные второго. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность того, что: а) оба содержат овощи первого сорта; б) разного сорта; в) одного сорта?

Формула полной вероятности. Формула Байеса

597. В урну, содержащую 2 шара, опущен черный шар. После чего из неё наудачу извлечён 1 шар. Найти вероятность того, что извлечённый шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету: белый, чёрный).

598. В группе 20 студентов, из них 2 отличника, 6 хорошистов, 3 двоечника, остальные учатся удовлетворительно. Вероятность сдачи экзамена от-

личником 0,98; хорошистом – 0,8; двоечником – 0,2; троечником – 0,65. Какова вероятность того, что произвольно взятый студент сдаст экзамен?

599. На конвейер сбрасывают одинаковые детали, произведённые двумя автоматами. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго автомата. Первый автомат производит 70% деталей отличного качества, второй – 90%. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

600. При исследовании жирности молока коров всё стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй – 20% и в третьей – 10% всех коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы соответственно равна 0,6; 0,35 и 0,1. Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4%.

601. Имеются две урны. В первой – 5 красных шаров и 3 чёрных, во второй – 2 красных и 6 чёрных. Из первой урны переложили во вторую 1 шар, затем, перемешав шары, из второй урны извлекли 1 шар. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из второй урны, окажется красным.

602. Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы. Причём 40% всех семян 1-го сорта, 20% – 2-го сорта, 30% – 3-го сорта и 10% – 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зёрен, для первого сорта − 0,5; для второго − 0,3; для третьего − 0,2; для четвёртого – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зёрен.

603. На ёлочный базар поступают ёлки с трёх лесхозов, причём 1-й лесхоз поставил 40% ёлок, 2-й – 35%, 3-й – 25%. Среди ёлок 1-го лесхоза 12% голубых, 2-го – 18%, 3-го – 24%. Куплена одна ёлка. Она оказалась голубой. Какова вероятность, что она поставлена 2-м лесхозом?

604. В комнату с мышеловкой поместили 8 белых и 12 серых мышей. Вероятность того, что в мышеловку попадется белая мышь, равна 0,7, серая – 0,9. Мышь попалась в мышеловку. Какова вероятность того, что в мышеловке белая мышь?

605д. В группе учащихся из 25 человек имеется 16 юношей, а остальные девушки. Половина юношей и треть девушек живут в общежитии. Найти вероятность того, что случайно выбранный учащийся группы живёт в общежитии.

606д. Сборщик получил 4 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9, а завода № 2 – 0,75. Сборщик

наудачу извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечённая деталь стандартна.

607д. Перед посевом 80% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями для растений из обработанных семян равна 0,08; для растений из необработанных семян – 0,45. Какова вероятность того, что растение, выращенное из взятого наудачу семени, будет поражено вредителями?

608д. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, 2 нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,7; а из не пристрелянной − 0,4. Какова вероятность того, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадёт в цель при одном выстреле?

609д. Два колбасных цеха производят одинаковые колбасные изделия, которые поступают в продажу. Производительность первого цеха вдвое больше второго. Первый цех производит 75% колбасных изделий отличного качества, а второй 90%. Наудачу взятое колбасное изделие оказалось отличного качества. Найти вероятность того, что это изделие произведено вторым колбасным цехом.

610д. В канцелярии работают два секретаря, которые обрабатывают 40 и 60% исходящих документов за одно и то же время. Вероятность неверной адресации документов секретарями равны соответственно 0,02 и 0,04. Найти вероятность того, что один из документов, оказавшийся неверно адресованным, отправлен первым секретарём.

Схема повторных испытаний. Наивероятнейшее число наступлений события

611. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) два раза; б) не менее двух раз.

612. Произведено 4 независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A появится не менее трёх раз.

613. Вероятность того, что в течение данного времени ёлочная гирлянда перегорит, равна 1/9. Найти вероятность того, что в течение данного времени из 4 ёлочных гирлянд 2 перегорят.

614. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 волокон длинных окажется менее двух.

615. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 82%. Найти наивероятнейшее число всхожих семян в партии из 15 семян.

616. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

617. Вероятность положительного результата при химическом анализе равна 0,8. Найти вероятность получения 86 положительных исходов при 100 анализах.

618. Вероятность появления события А в каждом из 300 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие А появится не менее 210 раз и не более 225 раз.

619. Всхожесть зерна, хранящегося на складе, равна 80%. Какова вероятность того, что среди 100 зёрен взойдет от 68 до 90 штук.

620. Магазин получил 3000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно 3; б) хотя бы одну.

621. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий останется не более 2-х бактерий.

622д. Орудие сделало 6 выстрелов по цели. Вероятность попадания по цели при каждом выстреле равна 2/3. Найти вероятность 5 попаданий.

623д. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдёт не более 3.

624д. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,15. Найти вероятность того, что среди 400 обследованных кустов винограда будет 360 неповреждённых.

625д. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 200 веточек роз 104 веточки окажутся красными розами, если в общей корзине красных – 60%.

626д. Баскетболист забрасывает мяч в корзину в среднем в 8 случаях из 10. Найти вероятность того, что будет не менее 112 и не более 118 попаданий, если выполнено 150 бросков.

627д. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,006. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность 5 «сбоев».

628д. Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 3 сорняка.

Дискретные случайные величины

629. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения вероятностей числа появления тройки.

630. В урне 4 белых и 12 чёрных шаров. Вынули два шара. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения случайной величины X.

631. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон её распределения:

x_i	7	5	2
p_i	0,4	0,1	0,5

632. Вероятность отказа детали за время испытания на надёжность равна 0,15. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20 деталей.

633. Случайная величина задана рядом распределения. С какой вероятностью случайная величина примет значение, равное единице? Вычислить ее математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

x_i	-1	1	2	3
p_i	0,1	p_2	0,3	0,2

634. Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 10 билетов, причём вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1.

635. Проводятся три независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,01. Найти числовые характеристики случайной величины X – числа ошибок, допущенных в измерениях.

636. Две независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения:

x_i	-2	1	2	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

y_i	2	6
p_i	0,7	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 3X - 2Y$.

637. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3Y - 5X$, если $D(X) = 4$, а $D(Y) = 3$.

638д. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трёх независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании постоянна и равна 0,7.

639д. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,4; вторым – 0,8. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.

640д. Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-2	1	4
p_i	0,1	0,5	0,4

Найти её математическое ожидание.

641д. Найти числовые характеристики случайной величины, зная закон её распределения:

x_i	-3	-2	0	2
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2

642д. Найти среднее квадратическое отклонение числа появления «5» при 10 бросках игральной кости.

643д. Две независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения:

x_i	-4	-1	0	2
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

y_i	1	4
p_i	0,8	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - 4Y$.

644д. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны -3 и 6 соответственно. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины: а) $7X - 5$; б) $2X + 11$.

Непрерывные случайные величины

645. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0; \\ x^3 & при\ 0 < x \le 1; \\ 1 & при\ x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) математическое ожидание; в) дисперсию.

646. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 2, \\ \dfrac{x^3 - 8}{19} & при\ \ 2 < x \le 3, \\ 1 & при\ \ x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

647. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при\quad x \le 1, \\ x - 0{,}5 & при\quad 1 < x \le 2, \\ 0 & при\quad x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

648. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<-1,\\ \frac{2}{9}(x+1) & при \quad -1\le x\le 2,\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) математическое ожидание; в) вероятность попадания СВ X на отрезок [1; 2].

649д. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 1;\\ x-1 & при\ 1<x\le 2;\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал (1,2; 2,5); б) плотность распределения; в) математическое ожидание случайной величины X; г) дисперсию случайной величины X.

650д. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1,\\ \frac{x^2}{8}-\frac{1}{8} & при \quad 1<x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3.\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины X; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2).

651д. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<-1,\\ \frac{1}{2} & при \quad -1\le x\le 1,\\ 0 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) математическое ожидание; в) вероятность попадания СВ X на отрезок $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Некоторые стандартные распределения

652. Степан ожидает телефонный звонок между 18.00 и 19.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина X, имеющая равномерное распределение на отрезке [18; 19]. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 18 часов 17 минут до 18 часов 29 минут.

653. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределённой равномерно в интервале (-2; 6).

654. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая 0,04.

655. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(t)=\begin{cases}0{,}25\cdot e^{-0{,}25t} & при \quad t\ge 0,\\ 0 & при \quad t<0.\end{cases}$$

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины T; б) вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 4 часов работы.

656. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}6$. Найти дифференциальную и интегральную функции распределения, а также вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (0,5; 5).

657. Случайная величина подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $\lambda = 3$. Найти вероятность того, что данная СВ примет положительное значение.

658д. Все значения равномерно распределённой СВ X лежат на отрезке [2; 8]. Найти вероятность попадания СВ X в промежуток (3; 5).

659д. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X, распределённой равномерно в интервале (2; 10).

660д. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0{,}04\cdot e^{-0{,}04x} & при \quad x\ge 0,\\ 0 & при \quad x<0.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (1; 2).

661д. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x)=8e^{-8x}$ $(x\geq 0)$.

Нормальный закон распределения

662. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 5 и 2,5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале (4; 7).

663. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 160 мм, среднее квадратическое отклонение равно 0,4. Стандартными считаются детали, размер которых заключён между 159,4 мм и 160,6 мм. Найти процент годных деталей.

664. Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами: a=50 ц/га, σ=10 ц/га. Определить: а) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га; б) процент участков с урожайностью от 45 до 60 ц/га.

665. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределённая случайная величина X, имеющая математическое ожидание m=60 кг и среднее квадратическое отклонение σ=1,5 кг. Найти симметричный относительно m интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина X.

666д. Для исследования продуктивности определённой породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что: а) диаметр взятого наудачу яйца будет заключён в границах от 4,7 до 6,2 см; б) отклонение диаметра от среднего не превзойдёт по абсолютной величине 0,6 см.

667д. Урожайность овощей по участкам является нормально распределённой случайной величиной с математическим ожиданием 300 ц/га и средним квадратическим отклонением 30 ц/га. С вероятностью 0,9544 определить симметричные относительно математического ожидания границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

8 Математическая статистика

8.1 Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

Одной из задач математической статистики является указание способов сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или экспериментов. На практике сплошное исследование (каждого объекта из интересующей нас совокупности) проводят крайне редко. Обычно из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их исследованию. При этом ***выборкой*** называют совокупность случайно отобранных объектов, ***генеральной совокупностью*** называют совокупность объектов, из которых производится выборка. Объёмом совокупности называют число объектов этой совокупности.

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n. Причём значение x_1 исследуемого признака наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, x_k – n_k раз. Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют ***вариантами***; n_i – ***частотами*** (сумма всех частот равна объёму выборки n); $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ – ***относительными частотами*** (сумма всех относительных частот равна единице). Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называют ***вариационным рядом***.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i или относительных частот w_i. Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Пример 8.1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	6	10	14
n_i	1	3	5	1

Найти распределение относительных частот.

Решение. Найдем объём выборки: $n = 1 + 3 + 5 + 1 = 10$.

Найдем относительные частоты:

$$w_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1;\ w_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3;\ w_3 = \frac{5}{10} = 0{,}5;\ w_4 = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Тогда искомое распределение относительных частот будет иметь вид:

x_i	4	6	10	14
w_i	0,1	0,3	0,5	0,1

Контроль: $0{,}1+0{,}3+0{,}5+0{,}1=1$.

Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения определяется по статистическому распределению выборки по аналогии с функцией распределения дискретной случайной величины.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объём выборки.

Свойства эмпирической функции распределения

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0;1]$.
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3. Если x_1 – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, то $F^*(x)=0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x)=1$ при $x > x_k$.

Эмпирическая функция служит для оценки теоретической функции распределения.

Пример 8.2. Найти эмпирическую фукцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Решение. Найдем объём выборки: $n=12+18+30=60$.

Наименьшая варианта $x_1=2$, следовательно, $F^*(x)=0$ при $x \le 2$.

Значение $x<6$, а именно $x_1=2$, наблюдалось 12 раз, следовательно, $F^*(x)=\frac{12}{60}=0{,}2$ при $2<x\le 6$.

Значение $x<10$, а именно $x_1=2$ и $x_2=6$, наблюдались $12+18=30$ раз, следовательно, $F^*(x)=\dfrac{30}{60}=0{,}5$ при $6<x\le 10$.

Так как $x_3=10$ – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x>10$.

Таким образом, искомая эмпирическая функция распределения:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 2,\\ 0{,}2 & при \quad 2<x\le 6,\\ 0{,}5 & при \quad 6<x\le 10,\\ 1 & при \quad x>10. \end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке 8.1.

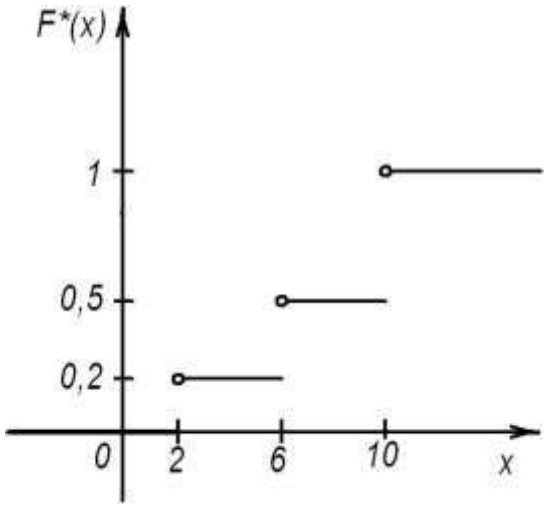


Рисунок 8.1 – Эмпирическая функция распределения

Модой M_0 называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медианной m_e называется варианта, которая делит пополам вариационный ряд на две части с одинаковым числом вариант в каждой.

Размахом варьирования называется разность между максимальной и минимальной вариантами или длина интервала, которому принадлежат все варианты выборки: $R=x_{\max}-x_{\min}$.

Если таблица – распределение частот очень велика, то мы переходим к ***интервальному ряду***.

Для этого:

1) совокупность всех наблюдаемых значений разбивается на частичные интервалы $(C_0;C_1),(C_1;C_2),\ldots,(C_{k-1};C_k)$ равной длины h.

При этом число интервалов k выбирают небольшим по сравнению с объемом выборки n:

$50 < n < 100$	$k = 1 + 3{,}2 \lg n \left(или\ k = \sqrt{n}\right)$
$100 < n < 200$	$k = 15 \div 18$
$n=200$	$k = 18 \div 20$
$n=400$	$k = 25 \div 30$
$n=1000$	$k = 35 \div 40$

Длину h каждого интервала получают, округляя в сторону увеличения число $h' = \dfrac{R}{k}$.

2) подсчитывается частота n_i, то есть число вариант, попавших в i-ый интервал.

Результат заносится в таблицу, которая называется ***интервальным статистическим распределением выборки***:

$(C_{i-1};\ C_i)$	n_i
$(C_0;\ C_1)$	n_1
$(C_1;\ C_2)$	n_2
…	…
$(C_{k-1};\ C_k)$	n_k

Пример 8.3. В результате лабораторного опыта определили массу 1000 зёрен пшеницы в 60 пробах:

20,818	23,875	25,484	26,401	27,687	28,587
21,261	24,005	25,495	26,414	27,801	28,784
21,937	24,315	25,558	26,574	28,032	28,813
22,858	24,520	25,583	26,614	28,273	28,992
23,025	24,776	25,662	26,653	28,301	29,196
23,358	24,859	26,067	26,707	28,483	29,433
23,384	24,895	26,090	26,713	28,500	31,421
23,619	25,167	26,108	27,068	28,543	31,498
23,807	25,411	26,220	27,223	28,559	31,569
23,808	25,426	26,335	27,624	28,580	32,132

Составить интервальное распределение выборки.

Решение. 1. Найдём число интервалов $k \approx 1+3{,}2\lg n = 1+3{,}2\lg 60 \approx 6{,}69$. Принимаем $k = 7$.

Тогда $h' = \dfrac{R}{k} = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \dfrac{32{,}132 - 20{,}818}{7} \approx 1{,}61629$. Берём длину интервала $h = 1{,}617$.

2. Найдём концы интервалов: начало первого интервала C_0 совпадает с $x_{\min} = 20{,}818$, далее $C_1 = C_0 + h = 20{,}818 + 1{,}617 = 22{,}435$ и так далее.

3. Подсчитаем частоты n_i – число вариант, попавших в i-ый интервал. Результат заносим в таблицу

№	Интервалы $(C_{i-1};\ C_i)$	Частоты n_i
1	20,818; 22,435	3
2	22,435; 24,052	9
3	24,052; 25,669	13
4	25,669; 27,286	14
5	27,286; 28,903	14
6	28,903; 30,520	3
7	30,520; 32,137	4
∑	——	60

8.2 Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот (***относительных частот***) называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_i; n_i)((x_i; w_i))$.

Пример 8.4. Построить полигон относительных частот заданного распределения частот:

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	5	10	20	15

Решение. Найдём объем выборки: $n = \sum n_i = 50$.

Тогда распределение относительных частот будет иметь вид

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
w_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Построим полигон относительных частот (рисунок 8.2).

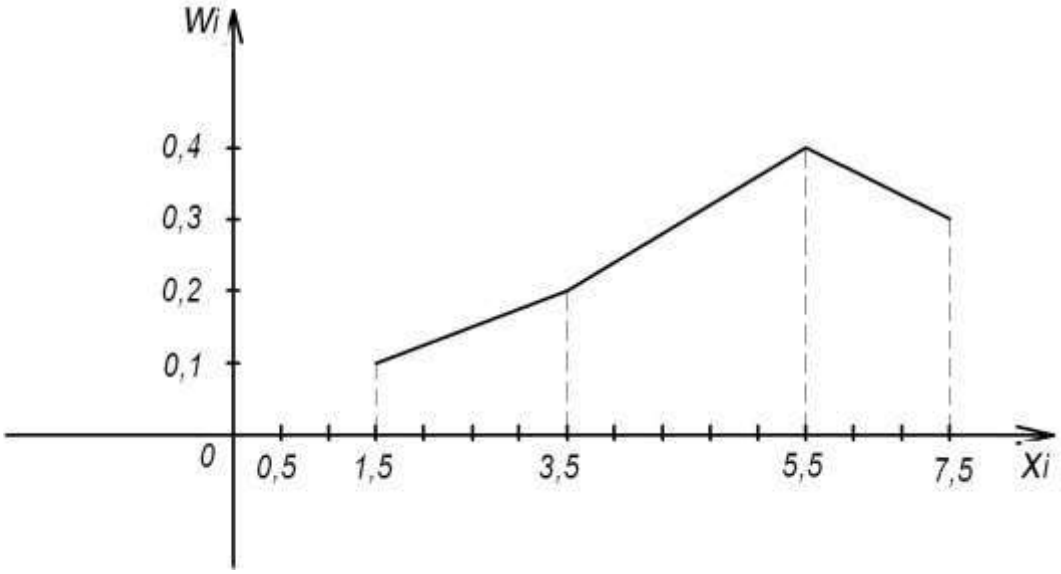


Рисунок 8.2 – Полигон относительных частот

Гистограммой частот (***относительных частот***) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинной h, а высоты равны ***плотности частоты*** $\frac{n_i}{h}$ (***плотности относительной частоты*** $\frac{w_i}{h}$).

Пример 8.4. Построить гистограмму частот по данному интервальному распределению

Интервалы $(C_{i-1};\ C_i)$	Частоты n_i
(5; 10)	4
(10; 15)	6
(15; 20)	16
(20; 25)	36
(25; 30)	24
(30; 35)	10
(35; 40)	4

Решение: Длина частичных интервалов $h = 5$. Найдём плотность частоты $\frac{n_i}{h}$ и заполним третий столбец таблицы.

Интервалы $(C_{i-1};\ C_i)$	Частоты n_i	$\frac{n_i}{h}$
(5; 10)	4	0,8
(10; 15)	6	1,2
(15; 20)	16	3,2
(20; 25)	36	7,2
(25; 30)	24	4,8
(30; 35)	10	2,0
(35; 40)	4	0,8

Построим гистограмму частот (рисунок 8.3).

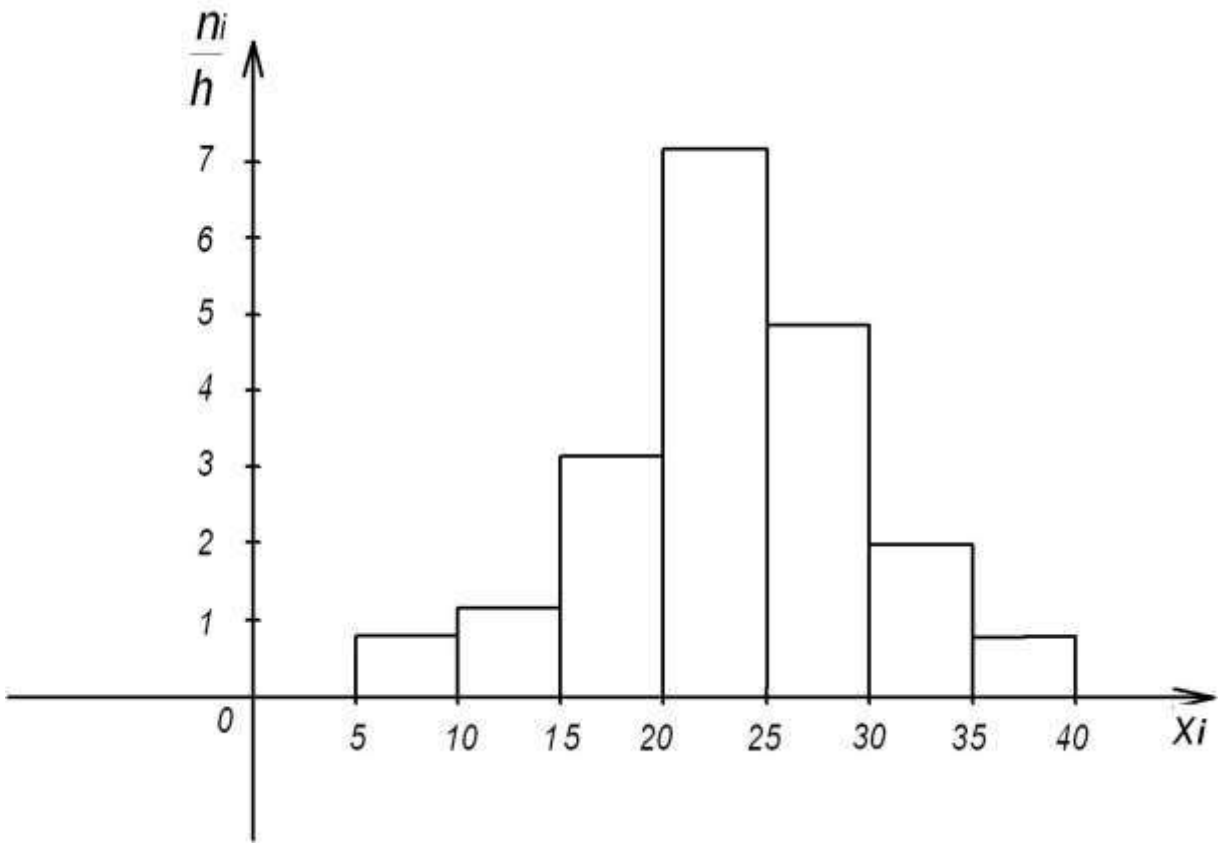


Рисунок 8.3 – Гистограмма частот

8.3 Точечные оценки параметров распределения

Если из каких-то соображений мы определим, какое распределение имеет изучаемая случайная величина, то возникает задача оценки числовых характеристик этого распределения. ***Точечной*** называют статистическую оценку, которая определяется одним числом.

Точечными оценками математического ожидания и дисперсии являются выборочная средняя $\bar{x}_в$ и выборочная дисперсия $D_в$, которые определяются по аналогии с числовыми характеристиками дискретно случайной величины.

Выборочной средней $\bar{x}_в$ называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объёма n различны, то

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2. \tag{8.1}$$

Если значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ признака имеют частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, то

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i, \quad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i, \tag{8.2}$$

где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Для вычисления $D_в$ используют более удобные формулы, аналогичные дисперсии случайной величины:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 \text{ или } D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot {x_i}^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2. \tag{8.3}$$

Замечание. Формулы (8.3) дают большую погрешность при вычислении дисперсии, чем формулы (8.1) и (8.2).

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Несмещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки. В частности, выборочная средняя является несмещённой оценкой математического ожидания.

Смещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру. Так, выборочные дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются смещенными оценками соответственно дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Несмещённой оценкой дисперсии служит ***исправленная выборочная дисперсия***

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в . \tag{8.4}$$

Несмещённой оценкой среднего квадратического отклонения служит ***исправленное среднее квадратическое отклонение***

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_в . \tag{8.5}$$

Пример 8.5. Выборка задана таблицей распределения частот:

x_i	1	2	3	5
n_i	15	20	10	5

Найти выборочные характеристики: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение: 1. Найдём объём выборки $n = 15 + 20 + 10 + 5 = 50$;

2. Выборочную среднюю найдём по формуле (8.2):

$$\bar{x}_в = \frac{1}{50}\left(1 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 5\right) = 2{,}2;$$

3. Выборочную дисперсию найдём по формуле (8.3):

$$D_в = \frac{1}{50}\left(1^2 \cdot 15 + 2^2 \cdot 20 + 3^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 5\right) - \left(2{,}2\right)^2 = 6{,}2 - 4{,}84 = 1{,}36 .$$

4. Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{1{,}36} \approx 1{,}166$.

В случае большого объёма выборки будем переходить от интервального распределения к ***распределению вариант***.

В качестве вариант x_i^* выберем значения, равные серединам интервалов: $x_i^* = \frac{C_{i-1} + C_i}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^* \cdot n_i , \tag{8.6}$$

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i^* - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i . \tag{8.7}$$

Пример 8.6. Найти выборочные среднюю и дисперсию признака X по интервальному распределению выборки из примера 8.3:

№	Интервалы $(C_{i-1};\ C_i)$	Частоты n_i
1	20,818; 22,435	3
2	22,435; 24,052	9
3	24,052; 25,669	13
4	25,669; 27,286	14
5	27,286; 28,903	14
6	28,903; 30,520	3
7	30,520; 32,137	4
∑	——	60

Решение. Составим новую таблицу, где найдём все слагаемые для формул (8.6)-(8.7) (это достаточно легко сделать в любой электронной таблице).

№	Интервалы $(C_{i-1}; C_i)$	Частоты n_i	Середины интервалов $x_i^* = \frac{C_{i-1}+C_i}{2}$	$x_i^* \cdot n_i$	$\left(x_i^* - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i$
1	20,818; 22,435	3	21,6265	64,8795	64,4608
2	22,435; 24,052	9	23,2435	209,1915	81,99665
3	24,052; 25,669	13	24,8605	323,1865	25,53099
4	25,669; 27,286	14	26,4775	370,685	0,650767
5	27,286; 28,903	14	28,0945	393,323	47,01792
6	28,903; 30,520	3	29,7115	89,1345	35,69922
7	30,520; 32,137	4	31,3285	125,314	102,6817
∑	–	60	–	1575,714	358,0381

Используя сумму пятого столбца таблицы, найдём выборочную среднюю по формуле (8.6):

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* \cdot n_i = \frac{1}{60}\cdot 1575{,}714 \approx 26{,}262.$$

Далее заполняем последний столбец таблицы и используем сумму всех его элементов для вычисления выборочной дисперсии по формуле (8.7):

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^* - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i = \frac{1}{60}\cdot 358{,}0381 \approx 5{,}967 .$$

8.4 Интервальные оценки параметров распределения

При большом объеме выборки точечная оценка, как правило, близка к оцениваемому параметру. Если объем выборки достаточно мал, то случайный характер точечной оценки может дать значительные расхождения между оцениваемым параметром и его оценкой. Возникает задача о приближении оцениваемого параметра не одним числом, а целым интервалом.

Пусть Q – неизвестное значение параметра распределения, Q^* – точечная оценка параметра Q.

Доверительной вероятностью γ оценки Q (или ***надежностью оценки***) называется вероятность того, что выполняется неравенство $\left|Q - Q^*\right| < \delta$, то есть $P\left(\left|Q - Q^*\right| < \delta\right) = \gamma$. При этом число δ называется ***точностью оценки***.

Интервал $\left(Q^* - \delta; Q^* + \delta\right)$, в котором с вероятностью γ содержится неизвестный параметр Q, называется ***доверительным интервалом***.

В этом случае говорят, что доверительный интервал покрывает параметр Q с надежностью γ. Если число γ выбрать достаточно большим, например, $\gamma = 0{,}95$ или $\gamma = 0{,}99$, то событие $\left|Q - Q^*\right| < \delta$ можно считать практически достоверным.

С практической точки зрения можно утверждать, что если мы извлечём из генеральной совокупности 100 случайных выборок одинакового объёма и построим по ним соответствующие доверительные интервалы (с одной и той же доверительной вероятностью γ), то следует ожидать, что приблизительно в 100γ случаях (если $\gamma = 0{,}95$, то в 95), эти интервалы будут содержать параметр Q.

Пример 8.7. Точечная оценка математического ожидания равна 15, тогда доверительным интервалом может быть интервал:

1) $(15;15{,}5)$ 2) $(5{,}5;15)$ 3) $(10{,}5;14{,}5)$ 4) $(13{,}6;16{,}4)$

Решение. Доверительным интервалом может быть только интервал, симметричный относительно числа 15. Это интервал $(13{,}6;16{,}4)$, так как $\frac{13{,}6 + 16{,}4}{2} = 15$.

Задачу о построении доверительных интервалов будем рассматривать только в случае нормального распределения. Эту задачу можно решить в двух случаях: когда среднее квадратическое отклонение σ известно и когда σ неизвестно.

• Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a при известном значении среднего квадратического отклонения σ:

$$\bar{x}_в - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{8.8}$$

где n – объем выборки, $\bar{x}_в$ – выборочная средняя, t – аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

При этом точность оценки $\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Последняя формула дает связь между объемом выборки n и точностью оценки δ (считаем, что надежность γ задана). Из этой формулы следует

$$n = t^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\delta^2}. \tag{8.9}$$

Эта формула позволяет определить объем выборки n, который обеспечит с заранее выбранной точностью δ необходимую надежность γ оценки математического ожидания.

• Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a при неизвестном значении среднего квадратического отклонения σ:

$$\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{8.10}$$

где n – объем выборки, $\bar{x}_в$ – выборочная средняя, s – исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ – коэффициент Стьюдента, который находится по данным n и γ из таблицы значений $t_\gamma = t(\gamma; n)$ (приложение 3).

• Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения:

$$s \cdot (1 - q) < \sigma < s \cdot (1 + q), \text{ если } q < 1; \tag{8.11}$$

$$0 \le \sigma < s \cdot (1 + q), \text{ если } q \ge 1, \tag{8.12}$$

где q находят по таблице (приложение 4) по заданным n и γ.

Пример 8.8. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью 0,99 неизвестного математического ожидания *a* нормально распределённого признака *X*, если среднее квадратическое отклонение равно 4, выборочная средняя равна10,2, объём выборки равен 16.

Решение. Для нахождения доверительного интервала для оценки неизвестного математического ожидания *a* нормально распределённого признака *X* воспользуемся формулой (8.8):

$$\bar{x}_в - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $n = 16$, $\bar{x}_в = 10{,}2$, $\sigma = 4$, t – аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Из соотношения $2\Phi(t) = \gamma = 0{,}99$ получим $\Phi(t) = 0{,}495$. По таблице (приложение 2) находим $t \approx 2{,}58$. Тогда

$$10{,}2 - 2{,}58 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} < a < 10{,}2 + 2{,}58 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}},$$

$$7{,}63 < a < 12{,}77.$$

Пример 8.9. Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,986 точность оценки математического ожидания *a* по выборочной средней будет равна $\delta = 0{,}6$, если известно среднее квадратическое отклонение 1,3 нормально распределённой совокупности.

Решение. Воспользуемся формулой (8.9)

$$n = t^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\delta^2},$$

где $\sigma = 1{,}3$, t – аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Из соотношения $2\Phi(t) = \gamma = 0{,}986$ получим $\Phi(t) = 0{,}493$. По таблице (приложение 2) находим $t \approx 2{,}46$. Тогда

$$n = 2{,}46^2 \cdot \frac{1{,}3^2}{0{,}6^2} \approx 28{,}4.$$

Отсюда минимальный объём выборки будет $n = 29$.

Пример 8.10. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания с надёжностью 0,95, если выборочная средняя равна 1,7, исправленная дисперсия – 0,25, объём выборки – 25. Предполагается, что рассматриваемый признак X распределён нормально.

Решение. Так как по условию задачи нам не известно среднее квадратическое отклонение признака, то для нахождения доверительного интервала для оценки неизвестного математического ожидания воспользуемся формулой (8.10)

$$\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $n = 25$, $\bar{x}_в = 1{,}7$, $s = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, t_γ – коэффициент, который находят по данным $n = 25$ и $\gamma = 0{,}95$ из таблицы значений $t_\gamma = t(\gamma; n)$ (приложение 3).

В нашем случае $t_\gamma = t(0{,}95; 25) = 2{,}064$. Тогда

$$1{,}7 - 2{,}064 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{25}} < a < 1{,}7 + 2{,}064 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{25}},$$

$$1{,}49 < a < 1{,}91.$$

Пример 8.11. Найти доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределенного количественного признака X с заданной надёжностью 0,99, если известно исправленное среднее квадратическое отклонение 0,8 и объём выборки 19.

Решение. Воспользуемся формулой (8.11)

$$s \cdot (1 - q) < \sigma < s \cdot (1 + q),$$

где $s = 0{,}8$, $q = q(\gamma; n)$ находят по таблице (приложение 4) по заданным $n = 19$ и $\gamma = 0{,}99$. В нашем случае $q = q(19; 0{,}99) = 0{,}6$. Тогда

$$0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) < \sigma < 0{,}8 \cdot (1 + 0{,}6),$$

$$0{,}32 < \sigma < 1{,}28.$$

8.5 Оценка существенности различий выборочных средних

Пусть с целью исследования влияния двух факторов на урожай проводились полевые опыты из двух серий по n делянок. Получены следующие результаты: средний урожай $\bar{x}_{в_1}$ и $\bar{x}_{в_2}$ (ц/га) и исправленные средние квадратические отклонения s_1 и s_2. Как установить, является ли расхождение $\left|\bar{x}_{в_1} - \bar{x}_{в_2}\right|$ случайным, или оно обусловлено влиянием изучаемых факторов?

В первом случае расхождение $\left|\bar{x}_{в_1} - \bar{x}_{в_2}\right|$ называется несущественным, а во втором различие существенно. Следует иметь в виду, что ответ не может быть строго определённым, он либо будет верен с некоторой вероятностью p либо ошибочен с вероятностью $\alpha = 1 - p$, называемой ***уровнем значимости***.

Составим случайную величину

$$T = \frac{\left|\bar{x}_{в_1} - \bar{x}_{в_2}\right|}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}, \tag{8.13}$$

где $\sigma_d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, $n-$ объём выборки (число делянок в серии). Доказано, что случайная величина T имеет t-распределение Стьюдента, для которого составлены таблицы (приложение 6).

Случайная величина T зависит от числа степеней свободы $k = 2(n-1)$ и уровня значимости α. По заданному α и числу степеней k находится t теоретическое.

По формуле (8.13) находят t практическое:

$$t_{пр} = \frac{\left|\bar{x}_{в_1} - \bar{x}_{в_2}\right|}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}, \tag{8.14}$$

Если $t_{пр} < t_{теор}$, то с вероятностью ошибки, равной α, считают, что расхождение между средними незначимо, и влияние факторов на урожайность существенным признать нельзя. Если $t_{пр} \geq t_{теор}$, то расхождение между выборочными существенно, оно объясняется влиянием изучаемых факторов.

Если объём выборочных совокупностей неодинаков, то используют более сложные формулы.

Пример 8.12. В результате полевых испытаний выращен урожай двух сортов картофеля: «Приекульский ранний» и «Дружба». Отобрано по 25 клубней каждого сорта. Результаты взвешивания таковы: выборочное среднее и исправленное среднее квадратическое отклонение массы одного клубня сорта «Приекульский ранний» равны $\bar{x}_{в_1} = 65$ г, $s_1 = 15$ г, для сорта «Дружба» $\bar{x}_{в_2} = 90$ г, $s_2 = 20$ г. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить существенность различий выборочных средних.

Решение. По формуле (8.14) находим $t_{пр} = \dfrac{\left|\bar{x}_{в_1} - \bar{x}_{в_2}\right|}{\dfrac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}$,

где $\sigma_d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Тогда $t_{пр} = \dfrac{|65 - 90|}{\dfrac{25}{\sqrt{25}}} = 5.$

Число степеней свободы $k = 2(n-1) = 2(25-1) = 48$. Далее получаем $t_{теор} = 2{,}01$, (приложение 6) то есть расхождение существенно. Принимается утверждение, что обе выборки сделаны из разных генеральных совокупностей, то есть влияние сорта значимо.

8.6 Проверка статистических гипотез

В прикладных задачах часто требуется по наблюдениям выборки высказать некоторое суждение (гипотезу) относительно интересующих экспериментатора характеристик генеральной совокупности, из которой эта выборка извлечена.

Статистической называется ***гипотеза***, которая относится либо к виду либо к параметрам распределения и которая может быть проверена статистически.

Правила, согласно которым выясняется, соответствует или нет интересующая нас гипотеза опытным данным, называются ***статистическими критериями*** или просто ***критериями***.

Вместе с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. ***Конкурирующей (альтернативной)*** называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

При проверке гипотезы H_0 могут возникнуть ошибки. О***шибка первого рода*** состоит в том, что верная гипотеза отвергается. Вероятность ошибки первого рода называется ***уровнем значимости*** и обозначается символом α. О***шибка второго рода*** состоит в том, что принята неправильная гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначается символом β.

Пусть по выборке объёма n получен интервальный вариационный ряд:

$(C_{i-1};\ C_i)$	n_i
$(C_0;\ C_1)$	n_1
$(C_1;\ C_2)$	n_2
…	…
$(C_{k-1};\ C)$	n_k

По данным наблюдения выдвигают гипотезу о законе распределения генеральной совокупности. Затем вычисляются ***теоретические частоты*** $n_i^{/}$ (или ***выравнивающие***), исходя из теоретической гипотезы, которые отличаются от наблюдавшихся n_i. Для решения вопроса о случайности расхождения эмпирических и теоретических частот (в этом случае гипотеза верна) или о не случайности расхождения (гипотеза неверна) применяют критерии согласия. Рассмотрим ***критерий согласия*** χ^2 ***– Пирсона***.

Предположим, что на основе распределения частот выдвинута гипотеза H_0: генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить гипотезу, необходимо:

1. Найти наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i - n_i^{/}\right)^2}{n_i^{/}} \qquad (8.15)$$

где n_i – наблюдавшиеся частоты, $n_i^{/}$ – теоретические частоты.

2. Найти число степеней свободы $k = l - 3$.
3. Используя таблицу критических точек распределения χ^2 (приложение 4), в зависимости от заданного уровня значимости α и числа степеней свободы k найти $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$.
4. Сравнить $\chi^2_{\text{набл}}$ и $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$: если $\chi^2_{\text{набл}} \geq \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$, то гипотезу отвергаем; если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$, то гипотеза согласуется с результатами выборки.

Для вычисления теоретических частот необходимо:

1. Найти значения выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ и исправленного среднего квадратического отклонения s.
2. Интервалы, в которых частоты $n_i \leq 5$, объединить с соседними. Получится ряд, содержащий l интервалов.

3. Заменить наименьшее значение x_0 ряда на $-\infty$, а наибольшее значение x_l на $+\infty$.
4. Вычислить вероятности P_i попадания случайной величины (признака) X в i-тый интервал, по формуле

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_в}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_в}{s}\right), i = \overline{1, l}, \qquad (8.16)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

5. Найти теоретические частоты n_i' по формуле $n_i' = n \cdot P_i$, где n – объём выборки.

Замечание. Будем выбирать α = 0,05. В этом случае возможность отвергнуть правильную гипотезу составит 5%.

Пример 8.13. В результате лабораторного опыта определили массу 1000 зёрен пшеницы в 60 пробах (пример 1.1). Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки.

Решение. В примере 8.3 было составлено интервальное распределение выборки. В примере 8.6 мы нашли точечные оценки математического ожидания и дисперсии: $\bar{x}_в \approx 26{,}262$ и $D_в \approx 5{,}967$.

Вычислим теоретические частоты. Для этого:

1) найдём исправленное среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в} = \sqrt{\frac{60}{59} \cdot 5{,}967} \approx 2{,}463;$$

2) объединим интервалы 1 и 2, 6 и 7, так как частоты этих интервалов меньше 5. Получится ряд, содержащий $l = 5$ интервалов. Заменим наименьшее значение ряда на $-\infty$, а наибольшее значение на $+\infty$.

Для удобства вычисления теоретических частот составим таблицу 1.

Далее найдём наблюдаемое значение критерия (сумма последнего столбца таблицы 1).

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'} = 0{,}957.$$

Таблица 8.1 – Расчеты к примеру 8.13

№	$(x_{i-1};\ x_i)$		n_i	$\frac{x_i - \bar{x}_в}{s}$	$\frac{x_{i-1} - \bar{x}_в}{s}$	$\Phi_2 = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_в}{s}\right)$	$\Phi_1 = \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_в}{s}\right)$	$P_i = \Phi_2 - \Phi_1$	$n_i' = n \cdot P_i$	$\frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$
	x_{i-1}	x_i								
1	$-\infty$	24,052	12	−0,90	$-\infty$	−0,3159	−0,5	0,1841	11,046	0,082
2	24,052	25,669	13	−0,24	−0,90	−0,0948	−0,3159	0,2211	13,266	0,005
3	25,669	27,286	14	0,42	−0,24	0,1628	−0,0948	0,2576	15,456	0,137
4	27,286	28,903	14	1,07	0,42	0,3577	0,1628	0,1949	11,694	0,455
5	28,903	$+\infty$	7	$+\infty$	1,07	0,5	0,3577	0,1423	8,538	0,277
∑	—	—	60	—	—	—	—	1	60	0,957

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 5), по уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы $k = l - 3 = 5 - 3 = 2$ найдём $\chi^2_{кр}(\alpha; k) = \chi^2_{кр}(0{,}05; 2) = 6$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(\alpha; k)$, то гипотеза согласуется с результатами выборки. То есть с надёжностью $\alpha - 1 = 0{,}95$ или 95% можно принять гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Вопросы для самопроверки

1. Как вы понимаете понятия выборки, генеральной совокупности?
2. Что такое вариационный ряд?
3. Чему равна сумма частот выборки? Сумма относительных частот?
4. В каком виде задается статистическое распределение выборки?
5. Как определяется эмпирическая функция распределения?
6. Запишите формулы для вычисления точечных оценок математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.
7. Какая оценка называется несмещённой?
8. Какая гипотеза называется статистической?
9. Что такое уровень значимости статистической гипотезы?
10. Что такое доверительная вероятность? Доверительный интервал?
11. Как найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания в случае нормального распределения?

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

668. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	1	4	5	8	13
n_i	2	5	7	4	2

Найти распределение относительных частот.

669д. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 70$:

x_i	4	5	6	7	8
n_i	11	13	19	n_4	10

Найти n_4.

670. Выборка задана в виде распределения относительных частот:

x_i	1,3	1,4	1,6	1.9	2,2	2,5
w_i	0,08	0,21	w_3	0,25	0,18	0,12

Найти w_3.

671. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	3	7	9
n_i	5	4	8	3

672д. По данному распределению выборки найти эмпирическую функцию и построить её график:

x_i	3	5	6	8	11
n_i	20	10	15	25	30

673. Дана некоторая выборка (ранжированная):

7,8	10,7	11,6	13,1	13,8	14,7	15,6	16,3	17	17,2	18,7
7,9	11,2	11,8	13,1	14,2	14,7	15,6	16,5	17,1	17,3	18,7
9,7	11,3	11,9	13,2	14,3	14,8	16	16,6	17,1	17,5	19,5
10,5	11,5	12,7	13,5	14,3	15	16,1	16,6	17,2	17,7	20,7
10,5	11,6	12,8	13,6	14,5	15,1	16,2	16,6	17,2	18,6	20,8

Составить интервальное распределение выборки и построить гистограмму частот.

674. В результате взвешивания отобранных наудачу 50 клубней картофеля получены следующие результаты:

50	93	117	134	142	150	180	188	203	213
53	96	118	135	144	152	180	191	206	216
77	110	120	135	145	156	181	197	206	220
80	111	120	138	145	159	183	200	209	251
81	113	131	140	148	177	185	200	209	253

Составьте интервальное распределение. Число частичных интервалов определите по формуле $k = \sqrt{n}$. Постройте гистограмму частот.

675. Из очень большой партии огурцов извлечена случайная выборка объема 50. Интересующий нас признак X – длины огурцов, измеренные с точностью до 1 см, представлен следующим вариационным рядом:

22	28	32	33	34	36	37	38	40	44
24	28	32	34	35	36	37	40	41	45
26	31	33	34	35	36	37	40	41	45
26	31	33	34	36	37	37	40	43	47
27	31	33	34	36	37	38	40	44	50

Найти статистический интервальный ряд распределения и построить гистограмму относительных частот.

676. Изучалось содержание кальция (мг%) в сыворотке крови больных обезьян. По случайной выборке объема 50:

9	10	8	7	9	10	10	10	8	7
8	7	10	7	8	6	8	10	7	6
8	5	7	8	8	8	8	9	5	9
7	7	7	8	7	7	9	6	11	9
8	8	7	7	5	11	8	6	8	7

найти статистический интервальный ряд распределения и построить гистограмму относительных частот.

677. При измерении длины 50 колосьев некоторого сорта ячменя получены следующие данные:

Длина колосьев, см	6−8	8−10	10−12	12−14	14−16	16−18
Частота	6	12	17	10	4	1

Построить гистограмму частот и найти несмещенные точечные оценки математического ожидания и дисперсии признака X – длины колосьев в генеральной совокупности.

678. Дана выборка:

x_i	0	2	5	8	12	14
n_i	3	6	14	19	7	1

Построить полигон относительных частот выборки.

679. Дано статистическое распределение. Найти $\bar{x}_в$.

x_i	1	3	5	7	9	11
n_i	2	8	15	14	7	4

680. Произведено измерение суммарной длины корешков пяти проростков семян озимой пшеницы (в мм): 27; 27,9; 28,1; 26,8; 27,3. Найти несмещенную оценку математического ожидания случайной величины X – суммарной длины корешков.

681. В таблице приведены результаты исследования возраста у 100 случайно выбранных работников некоторого государственного предприятия.

Возраст, лет	16-25	25-34	34-43	43-52	52-61	61-70
Число работников, чел.	5	19	33	27	12	4

Найти несмещенные точечные оценки математического ожидания и дисперсии признака X – возраста работников в генеральной совокупности.

682. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=15$ и определены значения исследуемого признака

x_i	−3	−1	1	3	4
n_i	1	3	6	4	1

Найти несмещенные точечные оценки математического ожидания и дисперсии.

683. Урожайность двух сортов A и B пшеницы, возделываемых на трех участках с одинаковыми условиями роста и развития, характеризуются следующими таблицами:

сорт A

X, ц	21	22	24
Площадь, га	14	25	16

сорт B

Y, ц	22	25	26
Площадь, га	15	22	13

Найти выборочные дисперсии признака обоих сортов.

684. По данным задачи 2 найдите: 1) выборочную среднюю; 2) выборочную дисперсию и исправленную дисперсию; 3) исправленное среднее квадратическое отклонение.

685. По данным задачи 35д найдите: 1) выборочную среднюю; 2) выборочную дисперсию и исправленную дисперсию; 3) выборочное среднее квадратическое отклонение.

686. По выборке признака X, заданной следующей таблицей:

x_i	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	10	40	20	12	8

найти выборочную среднюю, исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение.

687. Найти выборочную и исправленную дисперсию по данному распределению выборки объемом $n=10$:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

688. Произведено три измерения некоторой случайной величины (в мм): 7; 14; 21. Найти несмещенную оценку дисперсии данной случайной величины.

689. Методом произведений найти выборочные среднее и дисперсию по заданному распределению выборки объемом $n=100$:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

690. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности, если известны частоты n_i, полученные в результате изучения выборки, и теоретические частоты n_i':

n_i	6	10	24	12	8
n_i'	5	12	26	12	5

691. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности, если известны частоты n_i, полученные в результате изучения выборки, и теоретические частоты n_i':

n_i	7	12	28	21	10
n_i'	3	10	33	15	9

692. Проведено взвешивание случайно выбранных 100 коров с фермы одного из хозяйств Южного федерального округа

Вес, кг	390–410	410–430	430–450	450–470	470–490	490–510
Число коров, голов	5	13	28	32	15	7

Проверить гипотезу о нормальном распределении веса коров данного хозяйства при уровне значимости 0,05.

693. Для исследования доходов населения большого города было отобрано случайным образом 100 жителей. Получен следующий интервальный ряд месячных доходов на человека:

Доход, тыс. руб.	3–5	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
Число жителей, человек	8	14	28	30	11	6	3

Проверить гипотезу о нормальном распределении дохода населения данного города при уровне значимости 0,05.

694. Выборка из большой партии электроламп включает 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}99$ доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы применительно ко всей партии, если известно, что случайная величина, равная продолжительности горения лампы, распределена нормально, а дисперсия этой случайной величины равна 1600 ч^2.

695. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равно $\sigma(X)$, выборочная средняя $\bar{x}_в$, объем выборки n. Найдите доверительные интервалы для математического ожидания a с заданной доверительной вероятностью (надежностью) γ. Установите, как изменяется величина интервала в зависимости от величины надежности.

а) $\sigma(X) = 1{,}5;\ \bar{x}_в = 12;\ n = 49;\ \gamma = 0{,}95;$

б) $\sigma(X) = 1{,}5;\ \bar{x}_в = 12;\ n = 49;\ \gamma = 0{,}99.$

696. Найти с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал среднего возраста работников некоторого государственного предприятия по данным примера 9 в предположении, что возраст работников распределен нормально.

697. Проведено взвешивание случайно выбранных 100 коров с фермы одного из хозяйств Южного федерального округа (данные задачи 20). С надежностью 0,99 найти доверительный интервал среднего веса коров данного хозяйства в предположении, что вес коров распределен нормально.

698. При подсчете количества листьев у шести лекарственных растений одного вида были получены следующие результаты: 5, 8, 10, 11, 12, 14. Определить доверительный интервал для среднего числа листьев с доверительной вероятностью 0,95 (предполагается, что показатель распределен по нормальному закону).

699. Наблюдения за дневным удоем восьми коров, случайно отобранных из стада, дали следующие результаты:

Удой x_i, кг	12	13	15	16	18
Число голов n_i	1	1	3	2	1

С вероятностью $\gamma = 0{,}95$ найти доверительный интервал для среднего удоя по стаду, в предположении, что данный признак распределен нормально.

700. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n=10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания с надежностью $\gamma=0{,}95$.

701. В выборке из 25 зерен пшеницы средняя масса зерна составила $\bar{x}_в=0{,}5$ г и $s=0{,}05$ г. Предполагая, что случайная величина X (масса зерна) имеет нормальное распределение, с надежностью $\gamma=0{,}99$ найдите:

а) доверительный интервал для $M(X)$;

б) доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения;

в) доверительный интервал для $M(X)$, если объем выборки равен 50?

702. По данным выборки объема $n=8$ из генеральной совокупности найдена несмещенная оценка среднего квадратического отклонения $s=0{,}76$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,99.

703. При изучении длины листьев садовой земляники сделана выборка. Среднее квадратическое отклонение отдельного измерения $\sigma=0{,}052$ см. С вероятностью 0,95 определить такое минимальное число измерений, чтобы отклонение выборочной средней от математического ожидания не превышало 0,06 см.

704. На двух группах бычков A и B сравнивали влияние на суточный привес (кг) двух видов кормов: льняного жмыха и сои. Данные приведены в следующих таблицах.

Льняной жмых

x_i	1,95	2,05	2,11	2,17	2,24	2,52
n_i	2	2	1	1	1	1

Соя

y_i	1,74	1,77	1,83	1,86	1,92	2,50
n_i	1	2	2	2	1	1

Вычислить разность между выборочными средними и установить при уровне значимости 0,05, значимо или случайно это расхождение.

705д. Группа из 50 коров обследована по числу отелов. Получены следующие данные (число отелов):

7	6	1	2	8	7	5	3	5	4
1	1	10	6	4	5	5	3	2	2
2	2	3	5	5	4	6	9	1	1
4	5	3	5	7	8	2	1	6	7
1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Составьте статистическое распределение. Число частичных интервалов подсчитайте по формуле $k = 1 + 3{,}2 \lg n$, а шаг возьмите с точностью до одного знака после запятой. Постройте гистограмму частот.

706д. Даны результаты (ц) взвешивания 50 коров, отобранных из стада:

2,9	3,1	3,8	4,1	4,2	4,3	4,5	4,6	4,9	5,3
3,0	3,2	3,8	4,1	4,2	4,4	4,5	4,7	5,0	5,3
3,0	3,4	3,8	4,1	4,2	4,4	4,5	4,8	5,1	5,4
3,0	3,5	3,9	4,2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,2	5,5
3,1	3,7	4,0	4,2	4,3	4,5	4,6	4,8	5,2	5,6

Составьте интервальное распределение. Число частичных интервалов определите по формуле $k = \sqrt{n}$. Постройте гистограмму частот.

707д. Изучалось среднее артериальное давление (мм рт. ст.) в начальной стадии шока. По случайной выборке объема 50:

92	98	99	100	102	103	105	107	109	111
95	98	99	100	102	103	105	108	109	112
97	98	100	100	102	103	106	108	110	112
97	98	100	101	102	104	106	108	110	112
98	99	100	101	103	105	107	108	110	113

найти статистический интервальный ряд распределения и построить гистограмму относительных частот.

708д. Дана некоторая выборка:

14	16	20	15	18	12	13	10	17	15	12
17	11	17	13	11	17	16	12	16	13	16
12	19	18	9	7	18	15	11	11	14	13
10	16	15	17	21	13	17	16	13	15	15
18	14	16	14	10	14	8	15	16	16	14

Построить статистическую совокупность выборки с семью интервалами и гистограмму относительных частот.

709д. В результате обследования 70 свиноматок, по количеству родившихся поросят в одном помете, составлено статистическое распределение:

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	3	4	6	11	15	14	8	7	2

Построить полигон частот выборки и найти несмещенные точечные оценки математического ожидания и дисперсии.

710д. Найти выборочную среднюю по заданному распределению выборки объемом $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

711д. Произведено измерение средней длины корешков пяти проростков семян озимой пшеницы (в мм): 11,5; 10,8; 11,3; 10,9; 11,0. Найти несмещенную оценку математического ожидания случайной величины X – суммарной длины корешков.

712д. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$ и определены значения исследуемого признака

x_i	1	4	6	9	10
n_i	9	19	11	7	4

Найти выборочную среднюю и исправленную дисперсию.

713д. По данным задачи 36д найдите: 1) выборочную среднюю; 2) несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности; 3) несмещенную оценку среднего квадратического отклонения.

714д. Сгруппированные значения выборки признака X заданы таблицей:

Интервал	27,5; 29,5	29,5; 31,5	31,5; 33,5	33,5; 35,5	35,5; 37,5
n_i	3	9	23	33	38
Интервал	37,5; 39,5	39,5; 41,5	41,5; 43,5	43,5; 45,5	
n_i	34	21	8	1	

Вычислить выборочную среднюю, исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение.

715д. Произведено три измерения некоторой случайной величины (в мм): 13; 25; 37. Найти несмещенную оценку дисперсии данной случайной величины.

716д. Найти методом произведений выборочную среднюю и исправленную дисперсию по заданному распределению выборки объемом $n=100$:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

717д. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности, если известны частоты n_i, полученные в результате изучения выборки, и теоретические частоты n_i':

n_i	4	9	21	12	8
n_i'	7	10	20	10	7

718д. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности, если известны частоты n_i, полученные в результате изучения выборки, и теоретические частоты n_i':

n_i	2	5	16	8	4
n_i'	4	9	19	10	6

719д. Распределение числового признака X в выборке объема 100 определяется следующим образом:

Интервалы	1,5−2,5	2,5−3,5	3,5−4,5	4,5−5,5	5,5−6,5	6,5−7,5	7,5−8,5
Частоты	3	12	20	27	21	15	2

Проверить гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности при уровне значимости 0,05.

720д. Для определения урожайности произведено взвешивание 100 колосков пшеницы, случайным образом сорванных на большом поле. Результаты взвешивания представлены в таблице

Вес колоска, г	9−11	11−13	13−15	15−17	17−19	19−21
Число колосков, шт.	6	18	22	30	13	11

Проверить гипотезу о нормальном распределении веса колосков при уровне значимости 0,05.

721д. Выборка из большой партии свеклы включает 100 штук. Средний вес свеклы в выборке равен 285 г. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для среднего веса свеклы во всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение веса свеклы для данной партии составляет 35 г, а вес свеклы распределен нормально.

722д. Установите влияние объема n выборки на величину доверительного интервала для неизвестного математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X, если:

а) $\sigma(X)=6;\ \bar{x}_в=20{,}1;\ n=64;\ \gamma=0{,}95;$

б) $\sigma(X)=6;\ \bar{x}_в=20{,}1;\ n=36;\ \gamma=0{,}95;$

в) $\sigma(X)=6;\ \bar{x}_в=20{,}1;\ n=144;\ \gamma=0{,}95.$

723д. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака X генеральной совокупности с надежностью $\gamma=0{,}99$, если объем выборки $n=25$, $\bar{x}_в=16{,}8$ и среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma=5$.

724д. С доверительной вероятностью 0,95 найти доверительный интервал математического ожидания признака X в генеральной совокупности в предположении, что признак X распределен нормально (данные задачи 49д).

725д. С надежностью 0,95 найти доверительный интервал среднего дохода жителя некоторого большого города в предположении, что доход населения распределен нормально (данные задачи 21).

726д. Для определения средней урожайности овса взято наудачу 20 проб на 1 м^2 и для них определено $\bar{x}_в=0{,}125$ кг. Среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}052$. Определить, в каких границах заключена средняя урожайность с 1 м^2 по всему полю, если вывод следует сделать с надежностью 0,9.

727д. При измерении содержания кальция (мг%) в сыворотке крови подопытных животных получили следующие результаты: 14,5; 14,7; 14,8; 14,9; 15,1; 15,3; 15,5; 15,8; 15,9. Определить доверительный интервал для среднего значения содержания кальция с доверительной вероятностью 0,95 (предполагается, что показатель распределен по нормальному закону).

728д. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n=12$:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности, если доверительная вероятность $\gamma=0{,}95$.

729д. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного среднего квадратического отклонения нормально распределенного признака X генеральной совокупности с надежностью γ, если:

а) $n=30;\ s=1{,}4;\ \gamma=0{,}95;$

б) $n=6;\ s=0{,}45;\ \gamma=0{,}99;$

в) $n=16;\ s=1{,}2;\ \gamma=0{,}99.$

730д. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью $\gamma=0{,}95$ точность оценки математического ожидания a была равной $\delta=0{,}2$, если среднее квадратическое отклонение $\sigma=4$.

731д. Даны два распределения случайной величины: X – урожайность свеклы, выращенной с применением микроудобрений и Y – без применения микроудобрений. С надежностью 0,95 установить, значимо или незначимо расхождение между средними значениями. Сделать вывод о влиянии микроудобрений на урожай с учетом данных в следующих таблицах.

x_i	200…210	210…220	220…230	230…240	240…250	250…260
n_i	2	4	7	8	6	3

y_i	190… …200	200… …210	210…2 20	220… …230	230… …240	240… …250	250… …260	260… …270
n_i	1	2	4	8	6	5	3	1

Ответы

1 Элементы линейной и векторной алгебры

1. $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -12 & 15 & -14 \\ 4 & -11 & 33 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 13 & -13 \\ 11 & -16 \\ 10 & -17 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. **7.** −99. **8д.** $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **9д.** $\begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 6 & 13 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$.

10д. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 10 & 13 & -2 \end{pmatrix}$. **11д.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$. **12д.** $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ -26 & 14 \end{pmatrix}$.

13. 4. **14**. 28. **15**. 7. **16**. −1. **17**. 3. **18д**. 12. **19д**. 14. **20д**. 63.

21д. 5. **22**. (3; −4). **23д**. (2; 3). **24**. (1; −1; 2). **25**. (1; 2; 4).

26д. (1; −1; 2). **27д**. (3; −2; −1). **30**. $\overline{BC} = \bar{b} - 2\bar{a}$, $\overline{AP} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$.

31. $\overline{AD} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{AP} = -\frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{MP} = -\frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{PC} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{BD} = \bar{a} + 2\bar{b}$,

$\overline{DM} = -\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{3}{2}\bar{b}$. **32**. $\overline{BA} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{BC} = -\bar{a}$, $\overline{EB} = 2\bar{b}$, $\overline{BD} = -\bar{a} - \bar{b}$,

$\overline{CE} = \bar{a} - 2\bar{b}$. **33**. (−3; 6; 6); (3; −3; 9); (−11; 21; 17). **34**. (2; −2; 1); 3.

35. (4; 0; 1); (3; −1; −3); (−7; 1; 2). **36**. (−1; −1; 3). **37**. (−9; 1; 3). **38**. ±7.

39. $\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}; -\frac{4}{3\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. **40**. $\bar{a} = -4\bar{b}$. **41**. $\alpha = -\frac{8}{3}$; $\beta = \frac{15}{2}$. **42**. $\sqrt{29}$.

44д. $\overline{CM} = -\frac{1}{2}\bar{p}$, $\overline{AM} = \bar{q} - \frac{1}{2}\bar{p}$, $\overline{BM} = \bar{q} - \frac{3}{2}\bar{p}$. **45д**. $\overline{PM} = -\frac{1}{2}\bar{a}$,

$\overline{MB} = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{CB} = \bar{a} - \bar{b}$. **46д**. (5; 11; –9); (3; 4; 5). **47д**. (8; 0; −1);

(10; −6; 6). **48д**. (12; 8; −7). **49д**. (−5; 9; 3); $\sqrt{115}$. **50д**. (−2; 2; 2); $2\sqrt{3}$.

51д. $x = -12{,}5$; $z = 2{,}4$. **52.** 7; 25. **53.** 2; −118. **54.** 112. **55.** $\frac{22}{\sqrt{42}}$.

56. $\frac{46}{\sqrt{17}}$. **57.** $\frac{1}{\sqrt{319}}$. **58.** $\hat{A}=90^0;\ \hat{C}=45^0$. **59.** −4. **60.** нет. **61.** 7.

62. (−9; 3; 12). **63д.** 258. **64д.** $\frac{1}{7}$. **65д.** $\arccos\frac{11}{17}$. **66д.** 105. **67д.** $-\frac{16}{3\sqrt{6}}$.

68д. 6. **69д.** 4. **70д.** (−21; 15; −6). **71.** (18; 6; 6); (90; 30; 30).

72. (15; 44; 17). **73.** $\sqrt{509}$. **74.** $\sqrt{11}$. **75.** $2\sqrt{3}$. **76д.** (−280; −98; −126).

77д. $\sqrt{6}$.

2 Аналитическая геометрия

78. а) $\frac{7}{2}$; б) -3; в) 4; г) $-\frac{2}{5}$. **79.** $x-3y+8=0;\ 3x+y+4=0$. **80.**

$3x+2y-17=0$. **81.** $2x-y-1=0$. **82.** а) $5x+4y+11=0$;

б) $4x-5y-2=0$; в) $2x+5y+1=0$. **83.** $\operatorname{arctg}\frac{17}{7}$. **84.** 4.

85. $x-2y=0;\ \ x-2y-11=0$. **86д.** $2x+9y+55=0;\ \ 9x-2y-50=0$.

87д. $x+5y-17=0$. **88д.** $x-y+2=0;\ \ x+y-10=0$. **89д.** arctg30.

90. Эллипс: $a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{2}$. **91.** Гипербола: $a=3$ – действительная полуось, $b=\sqrt{3}$ – мнимая полуось. **92.** Эллипс: $a=4$, $b=2$.

93. Парабола вида $x^2=2py$, $p=\frac{1}{6}$. **94.** Парабола вида $y^2=-2px$, $p=2$.

95. Гипербола: $a=\sqrt{2}$ – действительная полуось, $b=\sqrt{5}$ – мнимая полуось.

96. Окружность: $R=3$. **97.** Парабола вида $x^2=-2py$, $p=\frac{1}{10}$.

98. Эллипс: $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$. **99.** Эллипс: $a=4$, $b=3$.

3 Ведение в математический анализ

100. а) $\{1,2,4,6\}$; б) $\{-4,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$; в) $\{0,3,5,7\}$;

г) $\{1,2,6,8,10\}$; д) $\{4\}$. **101.** $(-7;-1)$. **102.** а) $\{1,3,6,10\}$; б) $\{-3,-2,-1,0,2\}$; в) $\{6,8,10,15\}$. **103.** а) $\{3,4,5\}$; б) $\{6,7\}$. **104д.** $\{1,3\}$.

105д. $\{2,3,4,5,6,7\}$. **106д.** а) $(-5;4)$; б) Ø; в) $[-2;2)$. **107д.** а) $(-11;2)$;

б) $(-7;-1]$. **108.** $(-2{,}5;3)$. **109.** $[-8;8]$. **110д.** $(2;3)$. **111д.** $\left(0;2\frac{1}{3}\right]$. **112.** $[2;12]$. **113.** $[2;+\infty)$. **114д.** $[-4;8]$. **115д.** $[-6;+\infty)$.

116. $(-1;1)$; $(0;1]$. **117.** $[-0{,}5;+\infty)$; $(-\infty;11]$. **118д.** $[-3;+\infty)$; $[-7;+\infty)$. **119д.** $[-2;2]$; $[0;2]$. **120.** $[-3;2]$. **121.** $[0{,}5;32]$. **122д.** $[0;9]$.

123д. $[-2;1]$. **124.** 9; 1; −9; 2,25. **125.** 9; 7. **126.** −8; 1; 13; −1; −1.

127д. −4; 4; $198\frac{2}{7}$; −11,68. **128д.** 12; 3,5; 5; 10,5. **129.** 0. **130.** ∞.

131. $\frac{4}{3}$. **132.** $\frac{15}{8}$. **133.** $\frac{5}{4}$. **134.** $-\frac{1}{2}$. **135.** 0. **136.** ∞.

137. −3. **138.** $-\frac{2}{5}$. **139.** $\frac{1}{2}$. **140.** −1. **141.** 0. **142.** $\frac{1}{3}$.

143. $\frac{1}{4}$. **144.** $\frac{1}{24}$. **145.** $\frac{3}{8}$. **146.** $\frac{2}{9}$. **147.** $\frac{1}{2}$. **148.** $-\frac{3}{8}$.

149. $\frac{2}{3}$. **150.** 0. **151.** ∞. **152.** $\frac{1}{4}$. **153.** $\frac{3}{4}$. **154.** 3. **155.** $\frac{1}{6}$.

156. $\frac{1}{2}$. **157.** ∞. **158.** 0. **159.** ∞. **160.** 0. **161.** ∞. **162.** $\frac{2}{3}$.

163д. 3. **164д.** $\frac{7}{17}$. **165д.** −3. **166д.** ∞. **167д.** $\frac{3}{4}$. **168д.** $-\frac{1}{4}$.

169д. 0. **170д.** $-\frac{5}{4}$. **171д.** $\frac{1}{2}$. **172д.** -3. **173д.** $\frac{1}{4}$. **174д.** −3.

175д. 0,5. **176д.** $-\frac{4}{3}$. **177д.** 4. **178д.** $\frac{2}{9}$. **179д.** $-\frac{8}{5}$. **180д.** $\frac{5}{16}$.

181д. 0. **182д.** $\frac{1}{4}$. **183д.** ∞. **184д.** $\frac{1}{4}$. **185д.** $-\frac{1}{3}$. **186д.** 0.

187. $x=0$, $y=1$. **188.** $x=0$, $y=x$. **189.** $y=4x$. **190.** $x=3$.

192. $x=-2$, $x=2$, $y=0$. **192.** $y=0$ при $x\to+\infty$.

193д. $x=-1,\ y=x-1.$ **194д.** $x=-1,\ x=1.$ **195д.** $x=-3,\ y=5.$

196д. $y=0.$ **197д.** $x=-1,\ x=1\ \ y=2x.$ **198д.** $x=3,\ y=1.$

4 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

279. −8100. **280д.** 16. **281.** $y=-7x+8;\ \ x-7y+6=0.$

282. $3x-2y+1=0;\ \ 2x+3y-34=0.$ **283.** $y=18x-54;\ \ x+18y-3=0.$

284. $3x-2y+1=0;\ \ 2x+3y-34=0.$ **285.** $y=18x-54;\ \ x+18y-3=0.$

286д. $2x+y+1=0;\ \ x-2y+3=0.$ **287д.** $4x+y+17=0;\ \ x-4y-17=0.$

288. −1. **289.** −3. **290.** $\frac{1}{3}.$ **291.** $-\frac{\sqrt{3}}{6}.$ **292.** $-\frac{2}{9}.$ **293.** 2.

294. 0. **295д.** $\frac{3}{2}.$ **296д.** $\frac{1}{3}.$ **297д.** $\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **298д.** 0. **299д.** $\infty.$

300д. $\frac{2}{\pi}.$ **301д.** 0. **302.** Возрастает на $(-\infty;-3)$ и на $(0;3)$, убывает на $(-3;0)$ и на $(3;+\infty).$ **303.** Возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(3;+\infty)$, убывает на $(-1;3).$ **304.** Возрастает на $(3;+\infty),$ убывает на $(-\infty;3).$

305. Возрастает на $(-\infty;0),$ убывает на $(0;+\infty).$ **306.** Убывает на $(-\infty;-1),$ возрастает на $(-1;+\infty).$ **307.** Возрастает на $(-\infty;1)$, убывает на $(1;+\infty).$

308д. Возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(1;+\infty)$, убывает на $(-1;1).$

309д. Возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(1;+\infty)$, убывает на $(-1;0)$ и на $(0;1).$

310д. Возрастает на $(-\infty;-4)$ и на $(0;+\infty)$, убывает на $(-4;0).$

311д. Возрастает на $(-2;+\infty),$ убывает на $(-\infty;-2).$

312. $y_{\min}=\ =y(5)=-28,\ y_{\max}=y(1)=4.$ **313.** $y_{\min}=y(-2)=-\frac{1}{4},$

$y_{\max}=y(2)=\frac{1}{4}.$ **314.** $y_{\min}=y(-1)=\frac{17}{12},\ y_{\min}=y(3)=-\frac{37}{4},$

$y_{\max}=y(0)=2.$ **315.** $y_{\min}=\ =y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}.$ **316.** $y_{\max}=y\left(\frac{11}{4}\right)=\frac{13}{4}.$

317. $y_{\min}=y(1)=0,\ y_{\max}=y(-7)=-16.$ **318.** $y_{\min}=y(3)=\frac{27}{8}.$

319. Экстремумов нет. **320д.** $y_{\min} = y(1) = -1$. **321д.** $y_{\max} = y(3) = e^8$.

322д. $y_{\min} = y(3) = 12$, $y_{\max} = y(1) = 4$. **323д.** $y_{\min} = y(0) = 0$.

324. $\max\limits_{[-2;\,2]} y = 3$, $\min\limits_{[-2;\,2]} y = -13$. **325.** $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right]} y = -1$, $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right]} y = -\frac{4}{3}$.

326. $\max\limits_{[-5;\,1]} y = 85$, $\min\limits_{[-5;\,1]} y = -15$. **327.** $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{4-\pi}{4}$, $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi-4}{4}$.

328д. $\max\limits_{[-6;\,-3]} y = -23$, $\min\limits_{[-6;\,-3]} y = -43$. **329д.** $\max\limits_{[-3;\,2]} y = 66$, $\min\limits_{[-3;\,2]} y = 2$.

330д. $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\,4\right]} y = 16{,}125$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\,4\right]} y = 6$. **331*.** $\frac{1}{2}$. **332*.** 50.

333д*. У второго лекарства максимальная реакция выше.

334. Вогнута на $(-\infty; 5)$, выпукла на $(5; +\infty)$, точка перегиба $(5; -5)$.

335. Выпукла на $(-\infty; 4)$, вогнута на $(4; +\infty)$, точка перегиба $(4; 20)$.

336. Выпукла на $(-\infty; -1)$ и на $(1; \infty)$, вогнута на $(-1; 1)$, точек перегиба нет.

337. Вогнута на $(-\infty; -2)$ и на $(0; +\infty)$, выпукла на $(-2; 0)$, точка перегиба $(-2; 0)$. **338.** Выпукла на $(-\infty; -2)$, вогнута на $(-2; +\infty)$, точка перегиба $\left(-2; -\frac{2}{e^2}\right)$. **339.** Вогнута на $(0; +\infty)$, точек перегиба нет.

340д. Вогнута на $(-\infty; +\infty)$, точек перегиба нет.

341д. Выпукла на $(-\infty; 0)$, вогнута на $(0; +\infty)$, точек перегиба нет.

342д. Вогнута на $(-\infty; 0)$, выпукла на $(0; +\infty)$, точка перегиба $(0; 0)$.

343д. Вогнута на $(-2; 4)$, выпукла на $(-\infty; -2)$ и на $(4; +\infty)$, точки перегиба $(-2; \ln 18)$ и $(4; \ln 18)$. **344.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Асимптот нет. Функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(3; +\infty)$, убывает на $(1; 3)$, $y_{\min} = y(3) = 0$, $y_{\max} = y(1) = 8$. Кривая выпукла на $(-\infty; 2)$, вогнута на $(2; +\infty)$, точка перегиба $(2; 4)$. **345.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Асимптота $y = 0$. Функция убы-

вает на $(-\infty;-4)$ и на $(4;+\infty)$, возрастает на $(-4;4)$, $y_{\min}=y(-4)=-\frac{1}{8}$, $y_{\max}=y(4)=\frac{1}{8}$. Кривая выпукла на $\left(-\infty;-4\sqrt{3}\right)$ и на $\left(0;4\sqrt{3}\right)$, вогнута на $\left(-4\sqrt{3};0\right)$ и на $\left(4\sqrt{3};+\infty\right)$; точки перегиба $\left(-4\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$, $(0;0)$, $\left(4\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$.

346. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Асимптоты $x=0$, $y=x$. Функция возрастает на $(-\infty;0)$ и на $(2;+\infty)$, убывает на $(0;2)$, $y_{\min}=y(2)=3$. Кривая вогнута на $(-\infty;0)$ и на $(0;+\infty)$, точек перегиба нет.

347. $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. Асимптоты $x=-2$, $x=2$, $y=x$. Функция возрастает на $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$ и на $\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$, убывает на $\left(-2\sqrt{3};-2\right)$, на $(-2;2)$ и на $\left(2;2\sqrt{3}\right)$, $y_{\min}=y\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$, $y_{\max}=y\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$. Кривая выпукла на $(-\infty;-2)$ и на $(0;2)$, вогнута на $(-2;0)$ и на $(2;+\infty)$, точка перегиба $(0;0)$. **348.** $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Асимптоты $x=2$, $y=x+2$. Функция возрастает на $(-\infty;0)$ и на $(4;+\infty)$, убывает на $(0;2)$ и на $(2;4)$, $y_{\min}=y(4)=8$, $y_{\max}=y(0)=0$. Кривая выпукла на $(-\infty;2)$, вогнута на $(2;+\infty)$, точек перегиба нет. **349.** $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$. Асимптоты $x=-3$, $y=1$. Функция возрастает на $(-\infty;-3)$ и на $(3;+\infty)$, убывает на $(-3;3)$, $y_{\min}=y(3)=0$. Кривая вогнута на $(-\infty;-3)$ и на $(-3;6)$, выпукла на $(6;+\infty)$, точка перегиба $\left(6;\frac{1}{9}\right)$. **350д.** $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Асимптота $x=0$. Функция убывает на $(-\infty;0)$ и на $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, возрастает на $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, $y_{\min}= =y\left(\frac{1}{2}\right)=3$. Кривая вогнута на $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ и на $(0;+\infty)$, выпукла на $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}};0\right)$, точка перегиба $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}};0\right)$.

351д. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Асимптоты $x=0$, $y=3$. Функция возрастает

на $(-\infty;0)$ и на $(0;+\infty)$. Кривая вогнута на $(-\infty;0)$, выпукла на $(0;+\infty)$, точек перегиба нет.

352д. $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$. Асимптоты $x=-2$, $y=0$. Функция возрастает на $(-\infty;-4)$ и на $(0;+\infty)$, убывает на $(-4;-2)$ и на $(-2;0)$, $y_{\min}=y(0)=2$, $y_{\max}=y(-4)=-2$. Кривая выпукла на $(-\infty;-2)$, вогнута на $(-2;+\infty)$, точек перегиба нет. **353д.** $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Асимптота $y=1$. Функция возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(1;+\infty)$, убывает на $(-1;1)$, $y_{\min}=y(1)=0$, $y_{\max}=y(-1)=2$. Кривая вогнута на $(-\infty;-\sqrt{3})$ и на $(0;\sqrt{3})$, выпукла на $(-\sqrt{3};0)$ и на $(\sqrt{3};+\infty)$; точки перегиба $\left(-\sqrt{3};1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0;1)$, $\left(\sqrt{3};1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

354. $\frac{\partial z}{\partial x}=15x^2-3y$; $\frac{\partial z}{\partial x}=2-3x$. **355.** $\frac{\partial z}{\partial x}=10xy^3--4y^2+2y-14x$; $\frac{\partial z}{\partial x}=15x^2y^2-8xy+2x$. **356.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

357. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^3}{(x-y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy(2x-y)}{(x-y)^2}$. **358.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}cos\frac{y}{x}$.

359д. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$. **360д.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}-y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=5-x$.

361д. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y+\frac{1}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\cos y-2y$. **362д.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\ln y-\frac{1}{1+x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=$

$=\frac{x}{y}+e^{2z}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2ye^{2z}$. **363д.** $\frac{\partial u}{\partial x}=2xyz-\sin(yz)+e^{yz}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2z-xz\cos(yz)+xze^{yz}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x^2y-xy\cos(yz)+xye^{yz}$.

366. $dz=(\sin y+e^x y^3)dx+(x\cos y+3e^x y^2)dy$.

367. $dz = \dfrac{9y^2}{\cos^2(9x-4)}dx + 2ytg(9x-4)dy$. **368.** $dz = 8dx + 2dy$.

369д. $dz = 15\left(5x+y^4\right)^3 dx + 12y^3\left(5x+y^4\right)^2 dy$.

370д. $dz = 2x\ln(\sin y)dx + \left(3y^2 + x^2 ctgy\right)dy$. **371д.** $dz = 3dx - 32dy$.

372. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} + 2\ln y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{2x}{y} + 3y^3$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x^2}{y^2} + 6xy$.

373. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16\cos 4y$.

374. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2y-2x^2}{\left(x^2+y\right)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = = -\dfrac{2x}{\left(x^2+y\right)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)^2}$.

375. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{16xy}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = = \dfrac{2y^2-8x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{4xy}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$.

376. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 49y^2 e^{7xy+5}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \ = 49x^2 e^{7xy+5}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 7e^{7xy+5} + 49xye^{7xy+5}$.

377д. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 \sin(6y-1)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -36\left(x^5+3\right)\sin(6y-1)$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 30x^4 \cos(6y-1)$. **378д.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 e^y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 e^y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 e^y$.

379д. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y^3 + 30x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12xy^2 - 7 - 8y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^2 y - 8x$.

381. $(-17;16)$. **382.** $(-0{,}3;0{,}3)$. **383.** $(6;-9)$. **384.** $\left(\dfrac{5}{6};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$.

385д. $(18;-5)$. **386д.** $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right)$. **387д.** $(27;-5)$. **388д.** $(12;-11;-8)$.

389. $z_{\max} = z(2;-2) = 8$. **390.** $z_{\min} = z(-4;1) = -1$.

391. Экстремумов нет. **392*.** $z_{\min} = z(2;2) = -8$.

393д. Экстремумов нет. **394д.** $z_{\max} = z(0;3) = 9$.

395. $y = 0{,}992x - 0{,}909.$ **396.** $y = 3{,}023x - 1{,}08.$ **397д.** $y = 0{,}42x + 1{,}69.$

6 Интегральное исчисление функции одной переменной

398. $x^3 - x^2 + 4x + C.$ **399.** $\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x} - \frac{3}{x} + C.$ **400.** $\frac{5x^2}{2} - 2\ln|x| + C.$

401. $x^4 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$ **402.** $\frac{(x+7)^9}{9} + C.$ **403.** $\sin(x-8) + C.$

404. $\frac{1}{2}\ln|2x-5| + C.$ **405.** $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x+6)| + C.$ **406.** $\frac{2^{5x}}{5\ln 2} - -\frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

407. $\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{4}\sin 4x + C.$ **408.** $\frac{1}{3}\ln\left|tg\,\frac{3x^2-1}{2}\right| + C.$ **409.** $\frac{1}{2}e^{x^2+3} + C.$

410. $-\frac{1}{6}\cos(2x^3+5) + C.$ **411.** $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-4} + C.$ **412.** $\frac{3}{10}\ln|5x^2-4| + C.$

413. $\ln|x^2 - 3x + 5| + C.$ **414.** $\frac{(4-\cos x)^7}{7} + C.$ **415.** $\frac{7}{6}\ln|2x^3+11| + C.$

416. $-\frac{3}{2}\sqrt{2-x^2} + C.$ **417.** $-\frac{(5-3x^3)^6}{54} + C.$ **418.** $\frac{1}{3}e^{tg\,3x+1} + C.$

419. $-\frac{(3-2\ln x)^6}{12} + C.$ **420.** $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$ **421.** $4x + \frac{27}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| + C.$

422. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + C.$ **423.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2-3}\right| + C.$

424. $\sqrt{\frac{2}{5}}arctg\,\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} + C.$ **425.** $\frac{4}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C.$ **426.** $\frac{1}{18\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x^3-3}{\sqrt{2}x^3+3}\right| + C.$

427. $\arcsin\frac{x^2}{3} + C.$ **428.** $-\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\,\frac{\cos 2x}{\sqrt{5}} + C.$

429. $\frac{3}{8}\ln|4x^2-9| - \frac{7}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$ **430.** $-\frac{2}{9}\sqrt{4-9x^2} + \arcsin\frac{3x}{2} + C.$

431. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}} - \frac{5}{6}\ln|3x^2+7| + C.$ **432.** $3tgx + \frac{tg^5 x}{5} + C.$

433. $\frac{1}{3}\sqrt{2+3e^{2x}}+C$. **434.** $-\frac{3^{1-\sin 2x}}{2\ln 3}+C$. **435.** $\frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right|-\frac{\sqrt{arctg^3 2x}}{6}+C$.

436. $\frac{x^5}{5}-\frac{3\ln^2 x}{2}+C$. **437д.** x^4-2x+x^5+C. **438д.** $6\sqrt{x}+$

$+\ln|x|-7x+C$. **439д.** $\frac{x^2}{2}-\frac{6}{x}+C$. **440д.** $\frac{3x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-x^2+C$.

441д. $e^{x-2}+C$. **442д.** $\ln\left|\sin\left(x+8\right)\right|+C$. **443д.** $-\frac{1}{3}\cos\left(3x-1\right)+C$.

444д. $\sqrt{4x+5}+C$. **445д.** $-\frac{1}{2}\ln\left|\sin\left(x^2-1\right)\right|+C$. **446д.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6\right|+C$.

447д. $3\sqrt{x^2+7}+C$. **448д.** $x-\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$. **449д.** $2\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

450д. $-\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{5}}{\sqrt{3}x+\sqrt{5}}\right|+C$. **451д.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+8}\right|+C$.

452д. $\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{3}}+C$. **453д.** $7\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|-2\sqrt{x^2-3}+C$.

454д. $-\frac{1}{2}\ln\left|2-3x^2\right|-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C$. **455д.** $\cos\frac{1}{x}+C$.

456д. $-\frac{1}{15}\ln\left|\sin\left(2-3e^{5x}\right)\right|+C$. **457д.** $2e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C$.

458. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$. **459.** $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+C$.

460. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$. **461.** $\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{2}}+C$. **462д.** $arctg\frac{x-1}{3}+C$.

463д. $\ln\left|x+2{,}5+\sqrt{x^2+5x+8}\right|+C$. **464д.** $\arcsin\frac{x-1}{4}+C$.

465д. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3{,}5}\right|+C$. **466.** $-\frac{x}{3}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

467. $\frac{3x+2}{3}\sin 3x++\frac{1}{9}\cos 3x+C$. **468.** $\frac{(x-3)}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$.

469. $\left(x^2-2x+2\right)e^x+C$. **470.** $x\,arcctg\,2x+\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C$.

471. $x\ln 2x-x+C$. **472.** $x\arcsin x+\ +\sqrt{1-x^2}+C$.

473. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$. **474.** $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)arctgx-\frac{x}{2}+C$.

475. $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$. **476.** $x\,arctg\sqrt{4x-1}-\frac{1}{4}\sqrt{4x-1}+C$.

477. $-x\,\mathrm{ctg}x+\ln\left|\sin x\right|+C$. **478д.** $-\left(2x+3\right)\cos x+2\sin x+C$.

479д. $\frac{1-x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\ +C$. **480д.** $-xe^{-x}-e^{-x}+C$.

481д. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **482д.** $x\,arctg\,3x-\frac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right|+C$.

483д. $\left(x^2-x\right)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$. **484.** $7\frac{3}{4}$. **485.** $2\frac{2}{3}$. **486.** $\frac{e^2-1}{2}$.

487. 0. **488.** $\frac{1}{6}\ln 4$. **489.** $\frac{1}{8}$. **490.** $\frac{7}{3}$. **491.** $\frac{7}{9}$. **492.** $\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$.

493д. 61. **494д.** $\frac{5}{12}$. **495д.** $e^3-\frac{1}{e}$. **496д.** $64\frac{2}{3}$. **497д.** 4.

498д. $\frac{1}{4}$. **499д.** $\frac{\pi}{6}$. **500д.** 1. **501д.** $\frac{1}{3}\ln 7$. **502.** $\frac{\pi-2}{4}$. **503.** $\frac{\pi}{2}-1$.

504. $1-\frac{2}{e}$. **505.** $\frac{\left(2\sqrt{3}-9\right)\pi}{36}+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$. **506д.** $\frac{4}{e}-2$. **507д.** $6\ln 8-9$.

508. 4. **509.** $\frac{3}{4}$. **510.** 4,5. **511.** 18. **512.** 20. **513.** $\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$.

514. e^2+1. **515д.** 4,5. **516д.** $21\frac{1}{3}$. **517д.** 16. **518д.** $1\frac{1}{6}$.

519д. $1\frac{1}{3}$. **520.** 8π. **521.** $\frac{3\pi}{10}$. **522.** $\frac{4\pi}{3}$. **523.** $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{5}$.

524. $\frac{416\pi}{15}; \frac{184\pi}{3}$. **525д.** $\frac{482\pi}{15}$. **526д.** 72π. **527д.** $\frac{1664\pi}{15}; \frac{368\pi}{3}$.

528. 12. **529.** $\ln\sqrt{3}$. **530.** $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$. **531.** $1+ln\frac{6}{5}$. **532.** $\frac{13\pi}{12}$.

533. $\frac{7}{9}$. **534д.** $\frac{13}{3}$. **535д.** $\ln\left(tg\frac{5\pi}{12}\right)$. **536д.** $\frac{3\pi}{4}$. **537д.** 78.

538. $\frac{1}{3}$. **539.** $\frac{1}{3}$. **540.** Расходится. **541.** Расходится.

542. Расходится. **543.** $-\frac{3}{4}$. **544д.** Расходится. **545д.** $\frac{1}{5}$. **546д.** 2.

7 Теория вероятностей

547. а) 100; б) 180. **548.** 6840. **549.** 56. **550.** 6. **551.** 12.

552д. 216. **553д.** 4536. **554д.** 220. **555д.** 120.

556д. а) 720; б) 120. **557.** 0,6. **558.** а) $\frac{7}{15}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 0.

559. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{1}{4}$. **560.** 0,1. **561.** а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{8}$.

562. а) $\frac{3}{28}$; б) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{5}{28}$. **563.** $\frac{56}{969}$. **564.** $\frac{115}{494}$. **565.** $\frac{1}{720}$. **566.** $\frac{2}{75}$.

567. 0,745. **568.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **569.** $\frac{1}{4}$. **570.** $\frac{14}{15}$. **571.** $\frac{42}{55}$.

572д. $\frac{11}{45}; \frac{23}{45}$. **573д.** а) $\frac{11}{16}$; б) $\frac{1}{2}$. **574д.** а) $\frac{5}{18}$; б) $\frac{5}{12}$. **575д.** $\frac{5}{33}$.

576д. $\frac{3}{7}$. **577д.** 0,84. **578д.** $\frac{4}{9}$. **579д.** $\frac{9}{29}$. **580.** 0,485.

581. $\frac{4}{35}$. **582.** $\frac{23}{24}$. **583.** а) 0,076; б) 0,532. **584.** $\frac{1}{216}$. **585.** $\frac{11}{36}$.

586. $\frac{15}{28}$. **587.** $\frac{13}{30}$. **588.** 0,488. **589.** а) 0,015; б) 0,6175.

590. а) $\frac{41}{120}$; б) $\frac{79}{120}$. **591.** а) $\frac{11}{25}$; б) $\frac{67}{75}$; в) $\frac{34}{75}$. **592д.** 0,36.

593д. $\frac{1}{12}$. **594д.** $\frac{19}{36}$. **595д.** а) 0,288; б) 0,064; в) 0,216; г) 0,784.

596д. а) $\frac{188}{295}$; б) $\frac{96}{295}$; в) $\frac{199}{295}$. **597.** $\frac{1}{3}$. **598.** 0,6605. **599.** $\frac{23}{30}$.

600. 0,5. **601.** $\frac{7}{24}$. **602.** 0,33. **603.** $\frac{7}{19}$. **604.** $\frac{14}{41}$. **605д.** $\frac{11}{25}$.

606д. 0,85. **607д.** 0,154. **608д.** 0,64. **609д.** 0,375. **610д.** 0,25.

611. а) $\frac{5}{16}$; б) $\frac{1}{2}$. **612.** 0,5904. **613.** $\frac{128}{2187}$. **614.** 0,0016. **615.** 13.

616. 0,04565. **617.** 0,032375. **618.** 0,4772. **619.** 0,99245.

620. $\approx 0{,}0892$. **621.** $\approx 0{,}6767$. **622д.** $\frac{64}{243}$. **623д.** 0,08146.

624д. 0,0011. **625д.** 0,004. **626д.** 0,2823. **627д.** $\approx 0{,}1008$. **628д.** $\approx 0{,}1804$.

629.

x_i	0	1	2	3
p_i	125/216	75/216	15/216	1/216

630.

x_i	0	1	2
p_i	11/20	2/5	1/20

631. 4,3. **632.** 3. **633.** $p_2 = 0{,}4$; $M(X) = 1{,}5$; $\sigma = 1{,}1$.

634. $M(X) = 1$; $D(X) = 0{,}9$. **635.** $M(X) = 0{,}03$; $D(X) = 0{,}0297$; $\sigma(X) \approx 0{,}172$.

636. $M(Z) = -3{,}4$; $D(Z) = 40{,}44$. **637.** 127.

638д.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

639д.

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,56	0,32

640д. 1,9. **641д.** $M(X) = -0{,}9$; $D(X) = 2{,}89$; $\sigma(X) = 1{,}7$. **642д.** $\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

643д. $M(Z) = -7{,}4$; $D(Z) = 26{,}04$. **644д.** а) $M = -26$, $D = 294$; б) $M = 5$, $D = 24$. **645.** а) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 2x^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$ б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{80}$. **646.** б) 0,599;

а) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ \dfrac{3x^2}{19} \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0 \text{ при } x>3.\end{cases}$ в) $M(X)=2{,}566$; $D(X)=0{,}079$; $\sigma(X)=0{,}28$.

647. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right) \text{ при } 1<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$ **648.** а) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2 \text{ при } -1\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

б) 1; в) $\dfrac{5}{9}$. **649д.** а) 0,8; в) $\dfrac{3}{2}$; г) $\dfrac{1}{12}$.

650д. а) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{x}{4} \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0 \text{ при } x>3.\end{cases}$ б) $M(X)=2\dfrac{1}{6}$, $D(X)=\dfrac{11}{36}$, $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$; в) $\dfrac{3}{8}$.

651д. а) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ \dfrac{1}{2}(x+1) \text{ при } -1\le x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$ б) 0; в) 0,5. **652.** 0,2.

653. $M(X)=2, D(X)=\dfrac{16}{3}, \sigma(X)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **654.** 0,4. **655.** а) $M(T)=4$; $D(X)=16$; б) $\approx 0{,}4109$. **656.** $\approx 0{,}691$. **657.** $\approx 0{,}9502$.

658д. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} \text{ при } x\in[2;8],\\ 0 \text{ при } x\notin[2;8].\end{cases}$ $P(3<X<5)=\dfrac{1}{3}$.

659д. $M(X)=6, D(X)=\dfrac{16}{3}, \sigma(X)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **660д.** $\approx 0{,}0377$.

661д. $M(X)=\dfrac{1}{8}$, $D(X)=\dfrac{1}{64}$, $\sigma(X)=\dfrac{1}{8}$. **662.** 0,4435. **663.** 86,64%.

664. а) 0,8413; б) 77,45%. **665.** (56,1; 63,9). **666д.** а) 0,8413; б) 0,9544.

667д. (240; 360).

8 Математическая статистика

670. 0,16. **672д.** 17.

673.

$x_{i-1}; x_i$	7,8; 9,7	9,7; 11,6	11,6; 13,5	13,5; 15,4	15,4; 17,3	17,3; 19,2	19,2; 21,1
n_i	2	7	9	12	16	6	3

674.

$x_{i-1}; x_i$	50; 79	79; 108	108; 137	137; 166	166; 195	195; 224	224; 253
n_i	3	4	11	11	8	11	2

675.

$x_{i-1}; x_i$	22; 27	27; 32	32; 37	37; 42	42; 47	47; 52
n_i	4	6	18	15	5	2

676.

$x_{i-1}; x_i$	7,8; 9,7	9,7; 11,6	11,6; 13,5	13,5; 15,4	15,4; 17,3	17,3; 19,2	19,2; 21,1
n_i	2	7	9	12	16	6	3

678. $\bar{x}_в = 10{,}88;\ s^2 = 5{,}78.$ **679.** $\bar{x}_в = 6{,}12.$ **680.** $\bar{x}_в = 27{,}42.$

681. $\bar{x}_в = 41{,}56;\ s^2 = 113{,}27.$ **682.** $\bar{x}_в = 1{,}1;\ s^2 = 3{,}8.$

683. $D_в(X) = 1{,}31;\ D_в(Y) = 2{,}55.$ **684.** 1) $\bar{x}_в = 156{,}1;$ 2) $D_в = 2064{,}15;$ $s^2 = 2106{,}28$ 3) $s = 45{,}89.$ **685.** 1) $\bar{x}_в = 4{,}63;$ 2) $D_в = 5{,}44;\ s^2 = 5{,}55;$ 3) $s = 2{,}33.$ **686.** $\bar{x}_в = 61{,}7;\ s^2 = 50{,}11;\ s = 7{,}08.$

687. $D_в = 8{,}04;\ s^2 = 8{,}93.$ **688.** $s^2 = 49.$ **689.** $\bar{x}_в = 16{,}46;\ D_в = 4{,}87.$

690. Принимается. **691.** Не принимается. **692.** $\bar{x}_в = 452;\ s = 24{,}78;$ принимается. **693.** $\bar{x}_в = 9{,}04;\ s = 2{,}81;$ принимается.

694. (989,68; 1010,32). **695.** *а*) (11,58; 12,42); *б*) (11,45; 12,55).

696. (39,45; 43,67). **697.** (445,5; 458,5). **698.** (6,68; 13,32).

699. (13,45; 16,55). **700.** (0,28; 3,72). 7**01.** *а*) (0,47; 0,53); *б*) (0,026; 0,075); *в*) (0,48; 0,52). **702.** (0; 1,81). **703.** $n = 3.$

704. Расхождение значимо.

705д.

$x_{i-1}; x_i$	1; 2,5	2,5; 4	4; 5,5	5,5; 7	7; 8,5	8,5; 10
n_i	14	5	15	5	9	2

706д.

$x_{i-1}; x_i$	2,9; 3,3	3,3; 3,7	3,7; 4,1	4,1; 4,5	4,5; 4,9	4,9; 5,3	5,3; 5,7
n_i	7	2	6	14	11	5	5

707д.

$x_{i-1}; x_i$	92; 96	96; 100	100; 104	104; 108	108; 112	112; 116
n_i	2	10	16	8	10	4

708д.

$x_{i-1}; x_i$	7; 9	9; 11	11; 13	13; 15	15; 17	17; 19	19; 21
n_i	2	4	8	12	16	10	3

709д. $\bar{x}_в = 8{,}2;\ s^2 = 3{,}7.$ **710д.** $\bar{x}_в = 2621.$ **711д.** $\bar{x}_в = 11{,}1.$

712д. $\bar{x}_в = 5{,}08;\ s^2 = 7{,}87.$ **713д.** 1) $\bar{x}_в = 4{,}3;$ 2) $s^2 = 0{,}5;$ 3) $s = 0{,}7.$

714д. $\bar{x}_в = 36{,}34;\ s^2 = 10{,}51;\ s = 3{,}24.$ **715д.** $s^2 = 144.$

716д. $\bar{x}_в = 16{,}91;\ s^2 = 52{,}99.$ **717д.** Принимается. **718д.** Принимается.

719д. $\bar{x}_в = 5{,}04;\ s = 1{,}399;$ принимается. **720д.** Принимается.

721д. (278,14; 291,86). **722д.** а) (18,63; 21,57); б) (18,14; 22,06); в) (19,12; 21,08). **723д.** (14,22; 19,28). **724д.** (4,76; 5,32).

725д. (8,48; 9,60). **726д.** (0,101; 0,149). **727д.** (14,89; 15,48).

728д. (−0,06; 0,86). **729д.** а) (1,01; 1,79); б) (0; 1,35); в) (0,36; 2,04).

730д. $n \geq 1537.$ **731д.** Расхождение не значимо.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3914	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,48	0,1844	0,96	0,3315	1,44	0,4251
0,01	0,0040	0,49	0,1879	0,97	0,3340	1,45	0,4265
0,02	0,0080	0,50	0,1915	0,98	0,3365	1,46	0,4279
0,03	0,0120	0,51	0,1950	0,99	0,3389	1,47	0,4292
0,04	0,0160	0,52	0,1985	1,00	0,3413	1,48	0,4306
0,05	0,0199	0,53	0,2019	1,01	0,3438	1,49	0,4319
0,06	0,0239	0,54	0,2054	1,02	0,3461	1,50	0,4332
0,07	0,0279	0,55	0,2088	1,03	0,3485	1,51	0,4345
0,08	0,0319	0,56	0,2123	1,04	0,3508	1,52	0,4357
0,09	0,0359	0,57	0,2157	1,05	0,3531	1,53	0,4370
0,10	0,0398	0,58	0,2190	1,06	0,3554	1,54	0,4382
0,11	0,0438	0,59	0,2224	1,07	0,3577	1,55	0,4394
0,12	0,0478	0,60	0,2257	1,08	0,3599	1,56	0,4406
0,13	0,0517	0,61	0,2291	1,09	0,3621	1,57	0,4418
0,14	0,0557	0,62	0,2324	1,10	0,3643	1,58	0,4429
0,15	0,0596	0,63	0,2357	1,11	0,3665	1,59	0,4441
0,16	0,0636	0,64	0,2389	1,12	0,3686	1,60	0,4452
0,17	0,0675	0,65	0,2422	1,13	0,3708	1,61	0,4463
0,18	0,0714	0,66	0,2454	1,14	0,3729	1,62	0,4474
0,19	0,0753	0,67	0,2486	1,15	0,3749	1,63	0,4484
0,20	0,0793	0,68	0,2517	1,16	0,3770	1,64	0,4495
0,21	0,0832	0,69	0,2549	1,17	0,3790	1,65	0,4505
0,22	0,0871	0,70	0,2580	1,18	0,3810	1,66	0,4515
0,23	0,0910	0,71	0,2611	1,19	0,3830	1,67	0,4525
0,24	0,0948	0,72	0,2642	1,20	0,3849	1,68	0,4535
0,25	0,0987	0,73	0,2673	1,21	0,3869	1,69	0,4545
0,26	0,1026	0,74	0,2703	1,22	0,3883	1,70	0,4554
0,27	0,1064	0,75	0,2734	1,23	0,3907	1,71	0,4564
0,28	0,1103	0,76	0,2764	1,24	0,3925	1,72	0,4573
0,29	0,1141	0,77	0,2794	1,25	0,3944	1,73	0,4582
0,30	0,1179	0,78	0,2823	1,26	0,3962	1,74	0,4591
0,31	0,1217	0,79	0,2852	1,27	0,3980	1,75	0,4599
0,32	0,1255	0,80	0,2881	1,28	0,3997	1,76	0,4608
0,33	0,1293	0,81	0,2910	1,29	0,4015	1,77	0,4616
0,34	0,1331	0,82	0,2939	1,30	0,4032	1,78	0,4625
0,35	0,1368	0,83	0,2967	1,31	0,4049	1,79	0,4633
0,36	0,1406	0,84	0,2995	1,32	0,4066	1,80	0,4641
0,37	0,1443	0,85	0,3023	1,33	0,4082	1,81	0,4649
0,38	0,1480	0,86	0,3051	1,34	0,4099	1,82	0,4656
0,39	0,1517	0,87	0,3078	1,35	0,4115	1,83	0,4664
0,40	0,1554	0,88	0,3106	1,36	0,4131	1,84	0,4671
0,41	0,1591	0,89	0,3133	1,37	0,4147	1,85	0,4678
0,42	0,1628	0,90	0,3159	1,38	0,4162	1,86	0,4686
0,43	0,1664	0,91	0,3186	1,39	0,4177	1,87	0,4693
0,44	0,1700	0,92	0,3212	1,40	0,4192	1,88	0,4699
0,45	0,1736	0,93	0,3238	1,41	0,4207	1,89	0,4706
0,46	0,1772	0,94	0,3264	1,42	0,4222	1,90	0,4713
0,47	0,1808	0,95	0,3289	1,43	0,4236	1,91	0,4719

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,92	0,4726	2,18	0,4854	2,52	0,4941	2,86	0,4979
1,93	0,4732	2,20	0,4861	2,54	0,4945	2,88	0,4980
1,94	0,4738	2,22	0,4868	2,56	0,4948	2,90	0,4981
1,95	0,4744	2,24	0,4875	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,96	0,4750	2,26	0,4881	2,60	0,4953	2,94	0,4984
1,97	0,4756	2,28	0,4887	2,62	0,4956	2,96	0,4985
1,98	0,4761	2,30	0,4893	2,64	0,4959	2,98	0,4986
1,99	0,4767	2,32	0,4898	2,66	0,4961	3,00	0,49865
2,00	0,4772	2,34	0,4904	2,68	0,4963	3,20	0,49931
2,02	0,4783	2,36	0,4909	2,70	0,4965	3,40	0,49966
2,04	0,4793	2,38	0,4913	2,72	0,4967	3,60	0,499841
2,06	0,4803	2,40	0,4918	2,74	0,4969	3,80	0,499928
2,08	0,4812	2,42	0,4922	2,76	0,4971	4,00	0,499968
2,10	0,4821	2,44	0,4927	2,78	0,4973	4,50	0,499997
2,12	0,4830	2,46	0,4931	2,80	0,4974	5,00	0,499997
2,14	0,4838	2,48	0,4934	2,82	0,4976		
2,16	0,4846	2,50	0,4938	2,84	0,4977		

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81

Продолжение приложения 5

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,3	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01

Продолжение приложения 6

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. − М.: Юрайт, 2014.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие. – Ч. 1,2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2007.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для втузов / Г. С. Бараненков и др.; под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Астрель, 2003.
4. Корниш-Боуден, Э. Основы математики для биохимиков / Э. Корниш-Боуден; пер. с англ – М.: Мир, 1983.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – 13 изд. − Москва: Наука, 1985. – 430 с.
6. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 2: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.
7. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2003.
8. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Шипачев. – М.: Юрайт, 2014.

Учебное издание

Середина Марина Николаевна

Серёгина Виктория Викторовна

Удинцова Надежда Михайловна

Степовой Дмитрий Владимирович

Жидченко Татьяна Викторовна

Математика и математическая статистика

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Объем ЭИ: __ Мб

Формат ЭИ: Portable Document Format (PDF)

На титульную страницу