поведение. Развитие математических методов для анализа, моделирования и управления такими системами может привести к более эффективному прогнозированию и управлению комплексными процессами.

Перспективы развития математики огромны, и они продолжают расширяться с ростом нашего понимания мира и с развитием новых научных и технологических областей. Можно сказать, что в недалеком будущем любая часть человеческой деятельности будет еще более широко использовать в своих исследованиях математические методы. Однако развитие математики требует постоянного обучения и исследований со стороны математиков и ученых, а также взаимодействия с другими дисциплинами.

***

1. Абросимова, М. М. Математика: от истоков до наших дней / М. М. Абросимова. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2020. — № 16 (306). — С. 13. — URL: https://moluch.ru/archive/306/68942
3. Долгарев, И. А. История математики: учебное пособие / И. А. Долгарев; Мво образования и науки РФ, Гос. образовательное учреждение высш. проф. образования "Пензенский гос. унт" (ПГУ). Пенза: Издво ПГУ, 2011.
4. Рыбников, К. А. История математики: Учебник. – М.: Издво МГУ, 1994.

Серегина В.В.[1], Жидченко Т.В.[1], Шамайло О.Н.[2], Удинцова Н.М.[1], Середина М.Н.[1]

Об одном подходе при доказательстве утверждений в линейной алгебре

[1]АзовоЧерноморский инженерный институт ФГБОУ ВО «Донской ГАУ» (Россия, Зерноград)
[2]Астраханский государственный технический университет (Россия, Астрахань)

doi: 10.18411/trnio-05-2024-830

Аннотация

В данной работе предлагается один нетрадиционный метод доказательств некоторых утверждений из линейной алгебры. Этот подход основан на представлениях произвольной числовой матрицы в виде произведения простейших матриц. При этом под простейшими понимаются элементарные матрицы и диагональные матрицы специального вида. Утверждения для таких матриц легко проверяются и затем переносятся на матрицы общего вида. В работе предлагается схема построения представлений указанного типа, которая, по существу, является поэтапной реализацией метода ГауссаЖордана в матричной форме. Приводятся примеры применения указанного подхода к доказательству свойств определителя и построения обратной матрицы к обратимой квадратной матрице.

Ключевые слова: матрица, элементарное преобразование, элементарная матрица, метод ГауссаЖордана.

Abstract

This paper proposes one unconventional method of proving some statements from linear algebra. This approach is based on representing an arbitrary numerical matrix as a product of the simplest matrices. In this case, elementary matrices and diagonal matrices of a special form are understood in the simplest terms. Statements for such matrices are easily verified and then transferred to matrices of general form. The paper proposes a scheme for constructing representations of this type, which, in essence, is a stepbystep implementation of the GaussJordan method in matrix form. Examples are given of applying this approach to proving the properties of the determinant and constructing the inverse matrix of an invertible square matrix.

Keywords: Matrix, elementary transformation, elementary matrix, GaussJordan method.

Речь, собственно, пойдет о доказательствах теорем, связанных с мультипликативными свойствами матриц и определителей, а также о схемах построения обратной матрицы.

В стандартных учебниках по линейной алгебре доказательства этих утверждений, если и приводятся, то являются весьма громоздкими и непрозрачными. К таким утверждениям, например, относятся критерий обратимости квадратной матрицы в терминах делителей нуля, свойство определителя произведения квадратных матриц и многие другие. В частности, зачастую свойство определителя произведения квадратных матриц доказывается совершенно непрозрачным методом, использующим непростые рассуждения комбинаторного характера. Кроме того, предлагаемый подход оказался весьма удобным средством исследования систем линейных алгебраических уравнений.

Кроме того, предлагаемый прием может быть полезным при исследовании некоторых специальных матриц, возникающих при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Основой этого подхода является мультипликативное представление матрицы, соответствующее процедуре приведения матрицы к канонической форме. Дадим необходимые определения и пояснения.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ матрица размеров $m \times n$.

Единичную матрицу порядка n будем обозначать E_n.

Элементарными преобразованиями матриц называют следующие:

1) изменение порядка следования строк (столбцов) матрицы,
2) представление любой строки (столбца) матрицы суммой этой строки (столбца) и любой другой строки (столбца),
3) представление любой строки (столбца) матрицы как произведение этой строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$.

Будем говорить, что строка (столбец) матрицы приведена (приведен), если в этой строке (столбце) имеется элемент, равный 1, а остальные элементы столбца (строки), в котором (которой) стоит этот элемент, равны нулю.

Матрица называется приведенной к каноническому виду, если все ее ненулевые строки и столбцы приведены.

Очевидно, матрица канонического вида эквивалентна матрице, у которой несколько первых элементов главной диагонали равны 1, а остальные элементы матрицы равны 0. При этом число единиц есть ранг исходной матрицы. Условимся такие матрицы (фиксированных размеров) обозначать D_r.

Будем говорить, что две матрицы эквивалентны, если одна из них может быть получена из другой при помощи элементарных преобразований строк и столбцов.

Из свойств элементарных преобразований немедленно вытекает, что введенное бинарное отношение действительно является отношением эквивалентности. То есть отношение эквивалентности матриц является симметричным, транзитивным и рефлексивным.

Следствием метода ГауссаЖордана (реализуемого в матричной форме) является следующее утверждение.

Теорема 1. Любая ненулевая матрица эквивалентна матрице вида D_r.

Элементарной матрицей называют результат применения элементарного преобразования к единичной матрице. Доказательство следующего утверждения может быть предложено студентам в качестве упражнения.

Теорема 2. Каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы равносильно умножению этой матрицы слева (справа) на элементарную матрицу подходящих размеров, соответствующую выполненному элементарному преобразованию.

В соответствии с теоремой 1 при помощи элементарных преобразований всякую ненулевую матрицу можно привести к виду D_r. В силу теоремы 2 это можно записать следующим образом: $D_r = \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} ... \varepsilon_1 A \varepsilon^1 \varepsilon^2 ... \varepsilon^l$.

Ввиду того, что каждая из элементарных матриц обратима и обратная к ней матрица является аналогичной элементарной матрицей, из предыдущего соотношения немедленно получается следующее представление матрицы A: $A = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1$, где $\tilde{\varepsilon}_j = \left(\varepsilon_j\right)^{-1}$, $j = 1,2,...k$; $\tilde{\varepsilon}^s = \left(\varepsilon^s\right)^{-1}, s = 1,2,...,l$.

Таким образом, каждая ненулевая матрица может быть представлена в виде произведения простейших матриц. При этом под простейшими мы понимаем элементарные матрицы и матрицу вида D_r. Отметим, что если изначально рассматриваемая матрица является квадратной, то и все матрицы в представлении $A = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1$ являются квадратными того же порядка, что и матрица A.

Теперь укажем на некоторые применения отмеченных фактов.

Приложения к теории матриц и определителей.

Обозначим через $M_n\left(R\right)$ множество квадратных матриц порядка n с вещественными элементами. На множестве $M_n\left(R\right)$ введена бинарная операция – умножение матриц. Хорошо известно, что алгебраическая структура $\left(M_n\left(R\right), \bullet\right)$, где "$\bullet$" операция умножения матриц, представляет собой ассоциативную полугруппу.

Теорема 3. Отображение $\det : \left(M_n\left(R\right), \bullet\right) \to R$, действующее по правилу $A \mapsto \det A, \quad \forall A \in M_n\left(R\right)$ есть гомоморфизм полугрупп $\left(M_n\left(R\right), \bullet\right)$ и $\left(R, \bullet\right)$, то есть $\det A \bullet B = \det A \bullet \det B$.

Итак, доказательство состоит в следующем. Из свойств определителей немедленно вытекает, что утверждение справедливо, если один из сомножителей есть элементарная матрица. Непосредственно такое же утверждение проверяется и для матриц вида D_r. В самом деле, если $r = n$ и матрица D_r является единичной. Поскольку $\det D_n = \det E_n = 1$, то $\det E_n A = \det A = 1 \cdot \det A = \det E_n \det A, \quad \det A E_n = \det A = \det A \cdot 1 = \det A \det E_n$. Если $r < n$, то в матрице D_r последние $n - r$ строк и столбцов равны нулю, но тогда $\det D_r = 0$, а в матрицах AD_r, $D_r A$ последние $n - r$ столбцов, строк соответственно, являются нулевыми. Но тогда $\det AD_r = 0, \quad \det D_r A = 0$. Но тогда $\det D_r A = 0 = 0 \cdot \det A = \det D_r \cdot \det A, \quad \det AD_r = 0 = 0 \cdot \det A = \det A \cdot \det D_r$.

Теперь обратимся к общему случаю. Пусть $A = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1$, а B квадратная матрица такого же размера, тогда

$$\det AB = \det\left(\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1\right) B = \det \tilde{\varepsilon}_1 \left(\tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 B\right) =$$

$$= \det \tilde{\varepsilon}_1 \det\left(\tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 B\right) = \det \tilde{\varepsilon}_1 \det \tilde{\varepsilon}_2 \det\left(\tilde{\varepsilon}_3 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 B\right) =$$

$$= \det \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 \left(\tilde{\varepsilon}_3 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 B\right) = ... = \det \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 \det B = \det A \det B$$

Теорема 4. Матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда
1) она не является нетривиальным делителем нуля,
2) ранг матрицы совпадает с ее порядком.

Прежде всего, заметим, что утверждение теоремы справедливо для матрицы D_r. В самом деле, если матрица D_r обратима, то она является единичной, поэтому она не есть делитель нуля и ранг матрицы совпадает с числом единиц на главной диагонали, то есть с порядком матрицы. Если же $D_r \neq E_n$, то $r < n$ и матрицы $D_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D_r^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$ обе ненулевые, но $D_r D_r^* = D_r^* D_r = 0$. Поэтому для матрицы $G = \left(\tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1\right)^{-1} D_r^* \left(\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k\right)^{-1}$ имеем $AG = GA = 0$ в случае $r < n$. Если же $r = n$, то $D_r = E_n$ и поэтому $A = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k D_r . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k E_n . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1 = = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1$. Но тогда матрица A обратима как произведение обратимых (элементарных) матриц.

Матричный метод исследования систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Запишем СЛАУ в матричной форме $AX = F$ и представим матрицу A в виде $A = BD_rC$, где $B = \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 ... \tilde{\varepsilon}_k$, $C = . \tilde{\varepsilon}^l . \tilde{\varepsilon}^{l-1} .... \tilde{\varepsilon}^1$. Тогда $BD_rCX = F$ или $D_rCX = B^{-1}F$. Следовательно исходное уравнение равносильно системе матричных уравнений $\begin{cases} D_rY = B^{-1}F \\ CX = Y \end{cases}$ или $\begin{cases} D_rY = B^{-1}F \\ X = C^{-1}Y \end{cases}$.

Последняя система имеет решения тогда и только тогда, когда разрешимо матричное уравнение $AX = F$. Для реализации этой схемы нужны лишь матрицы B^{-1}, C^{-1} и матрица D_r, которые по существу, строятся при построении представления $D_r = \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} ... \varepsilon_1 A \varepsilon^1 \varepsilon^2 ... \varepsilon^l$. Поскольку имеет место теорема 1, то процедура нахождения всех перечисленных матриц может быть реализована при помощи следующей схемы:

$$\begin{pmatrix} A & E_m \\ E_m & \times \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D_r & B^{-1} \\ C^{-1} & \times \end{pmatrix},$$

где знак «~» означает элементарные преобразования строк и столбцов матрицы;
знак «×» означает, что эта часть матрицы не заполняется.

III. Схема построения обратной матрицы.

Если рассматриваемая матрица обратима, то эквивалентная ей каноническая матрица является единичной и схему из предыдущего пункта можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} A & E_n \\ E_n & \times \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E_n & B^{-1} \\ C^{-1} & \times \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $A^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1}$ и, следовательно, предложенная схема приводит к построению обратной матрицы. Однако на практике для построения обратной матрицы применяют либо только строчные, либо только столбцовые элементарные преобразования. Если применяются только строчные преобразования, то предыдущая схема приобретает вид

$$\begin{pmatrix} A & E_n \\ E_n & \times \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E_n & A^{-1} \\ E_n & \times \end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что нижняя матричная строка не меняется, то ее можно опустить и реализовывать схему следующим образом:

$$\left(A \middle| E_n\right) \sim \left(E_n \middle| A^{-1}\right),$$

где знак « ~ » означает элементарные преобразования строк матрицы.

Если применяются только преобразования столбцов, то симметричные рассуждения приводят к следующей схеме

$$\left(\frac{A}{E_n}\right) \sim \left(\frac{E_n}{A^{-1}}\right),$$

где знак « ~ » означает элементарные преобразования столбцов матрицы.

Изложена теория, методика и схемы представления произвольной числовой матрицы в виде произведения простейших. В качестве применения таких представлений приводятся доказательства некоторых утверждений из теории определителей и теории систем линейных алгебраических уравнений.

***

1. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Moscow : ООО Издательская фирма "Физикоматематическая литература", 2004. – 280 с. – (Курс высшей математики и математической физики ; Выпуск 4). – ISBN 9785922104814. – EDN MUWSGL.
2. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник для студентов университетов и технических вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика и информатика" / В. А. Ильин, Г. Д. Ким ; В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – 3е изд., перераб. и доп.. – Москва : Проспект, 2012. – (Классический университетский учебник / Московский гос. унт им. М. В. Ломоносова). – ISBN 9785392028566. – EDN QJYXIJ.
3. Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. – М., Высшая школа, 1971.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М., Наука, 1970.
5. Козак, А. В. Линейная алгебра / А. В. Козак, В. С. Пилиди. – 2е издание, переработанное и дополненное. – Москва : Закрытое акционерное общество "Издательское предприятие "Вузовская книга", 2005. – 184 с. – ISBN 590201434. – EDN XXTOXW.
6. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : Учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин. – 3е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 1 с. – (Высшее образование). – ISBN 9785534085471. – EDN YNNIYO.
7. Лившиц, К. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению ВПО 010400 "Прикладная математика и информатика" / К. И. Лившиц ; К. И. Лившиц. – Томск : Издво НТЛ, 2011. – ISBN 9785895034811. – EDN QJZDGP.
8. Серегина, В. В. Об одной вычислительной схеме для решения систем линейных алгебраических уравнений с теплицевой матрицей специального вида / В. В. Серегина, М. Н. Середина // Современные научные исследования: проблемы и перспективы : Материалы IV Международной научнопрактической конференции, Зерноград, 14–15 ноября 2019 года / Под общей редакцией М.Н. Крыловой. – Зерноград: Издательство "Перо", 2019. – С. 232236. – EDN ENTTYF.
9. Математика в SMathStudio : Рекомендуется Федеральным УМО в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 35.00.00 – Сельское, лесное и рыбное хозяйство в качестве учебного пособия при подготовке бакалавров по направлению «Агроинженерия» / Н. М. Удинцова, М. Н. Середина, В. В. Серегина, Д. В. Степовой. – Зерноград : Отдел информационных технологий и издательской деятельности АзовоЧерноморского инженерного института ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2022. – 191 с. – ISBN 9785918332085. – EDN ICXTPJ.
10. Серегина, В. В. О решении некоторых СЛАУ с теплицевыми матрицами / В. В. Серегина // Современные проблемы математического образования : Сборник статей по материалам IV Всероссийской научнопрактической конференции, Карачаевск, 25–26 апреля 2019 года. – Карачаевск: КарачаевоЧеркесский государственный университет им. У.Д. Алиева, 2019. – С. 174185. – EDN DIGMIX.