Домашняя работа

№ 25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad u_n = \frac{x^n}{n}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n \cdot x}{n+1}$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n \cdot x}{n+1} : \frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}$$

$$\left|\frac{x^n \cdot x}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = |x|$$

По признаку Даламбера, ряд абсолютно сходится при $d < 1$, то есть при:

$$|x| < 1 \qquad -1 < x < 1$$

Это и есть интервал сходимости степенного ряда.

При $x = 1$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический знакоположительный ряд, который будем исследовать по второму признаку сравнения.

Ряд для сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится, так как $p = 1 = 1$

$c = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right| =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ значит ряд расходится.

при $x = -1$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ – знакочередующийся ряд. этот ряд составлен из абсолютных величин его членов, имеют вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – сходится, то и сам знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: $-1 \le x < 1$

№ 88

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-6|^n}{n^3 \cdot 5^n}$

$v_n = \frac{|x-6|^n}{n^3 \cdot 5^n}$

$v_{n+1} = \frac{|x-6|^{n+1}}{|n+1|^3 \cdot 5^{n+1}} = \frac{|x-6|^n \cdot |x-6|}{(n+1)^3 \cdot 5^n \cdot 5}$

$d = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{|x-6|^n |x-6|}{(n+1)^3 \cdot 5^n \cdot 5} : \frac{|x-6|^n}{n^3 \cdot 5^n} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{|x-6|^n (x-6)}{(n+1)^3 \cdot 5^n \cdot 5} \cdot \frac{n^3 \cdot 5^n}{(x-6)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-6) \cdot n^3}{(n+1)^3 \cdot 5} \right| =$

$\frac{|x-6|}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3 \cdot 5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right| = |x-6| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} = |x-6|$

По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при $d < 1$, то есть при

$|x-6| < 5$

$-x + 6 < 5$

$-x < -1$

$x > 1$

$\frac{|x-6|}{5} < 1$

$|x-6| < 5$

$x < 5 + 6$

$x < 11$

$1 < x < 11$

② Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости в точках $x=1$ и $x=11$

при $x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-6)^n}{n^3 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|-5|^n}{5^n \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - числовой знакоположительный ряд, который будем исследовать по 2 признаку сравнения.

Ряд для сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^3 \cdot 5^n} : \frac{5^n}{n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} =$

$\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1$ - ряд сходится.

при $x=11$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|11-6|^n}{n^3 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3 \cdot 5^n} =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - числовой знакоположительный ряд. Так как ряд состоит из абсолютных величин его членов, то данный ряд тоже сходится.

$1 \le x \le 11$.

№ 95

$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью 0,001

Воспользуемся формулой $\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad t \in (-\infty, +\infty)$.

$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

$\frac{0,5}{1} - \frac{0,125}{6} + \frac{0,03125}{120} - \frac{0,0078}{5040} = 0,5 - 0,0208$

$+ 0,00026 - 0,0000001548 \approx 0,47946 \approx 0,479$