МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Математические основы решения задач в агроинженерии

Часть 1

***Учебное пособие содержит сведения,
необходимые для формирования профессиональных компетенций
при подготовке бакалавров по направлению «Агроинженерия»,
и рекомендуется Федеральным УМО по сельскому,
лесному и рыбному хозяйству для использования в учебном процессе***

Зерноград – 2025

УДК 517(075)
М34

Печатается по решению методического совета
Азово-Черноморского инженерного института – филиала
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный аграрный университет»
в г. Зернограде

Рецензенты:

доктор физико-мататематических наук, профессор кафедры
«Прикладная математика» ФГБОУ ВО ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова
Пасенчук А.Э.;

директор ФГБНУ «АНЦ «Донской»», доктор технических наук,
член-корреспондент РАН ***Пахомов В.И.***

Математические основы решения задач в агроинженерии: учебное пособие.
М 34 Ч. 1 / В.В. Серёгина, М.Н. Середина, Н.М. Удинцова, Д.В. Степовой,
Т.В. Жидченко, Н.Н. Грачёва, Н.Б. Руденко. – Зерноград: Азово-Черномор-
ский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2025. – 206 с.

ISBN 978-5-91833-232-0
ISBN 978-5-91833-233-7 (ч. 1)

В учебное пособие включены следующие разделы курса «Математика»: элементы линейной алгебры, элементы векторной алгебры, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, применение производной к исследованию функции, дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Каждый раздел содержит необходимый теоретический материал, образцы решений типовых примеров, рекомендации по применению методов разделов. В каждом разделе приводятся примеры приложений для построения моделей процессов, возникающих в агроинженерной практике.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия.

ISBN 978-5-91833-232-0
ISBN 978-5-91833-233-7 (ч. 1) УДК 517(075)

© В.В. Серёгина, М.Н. Середина,
Н.М. Удинцова и др., 2025
© Азово-Черноморский инженерный
институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 5

ЧАСТЬ 1 МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРИКЛАДНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ……..6

Глава 1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 6

1.1 Матрицы..... 6

1.2 Определители 13

1.3 Системы линейных алгебраических уравнений……20

1.4. Расчет электрической цепи……..24

Глава 2 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ..... 28

2.1 Векторные и скалярные величины..... 28

2.2 Линейные операции над векторами 30

2.3 Проекция вектора на ось 34

2.4 Координаты вектора 36

2.5 Скалярное произведение векторов..... 43

2.6 Векторное произведение векторов..... 50

2.7 Смешанное произведение векторов..... 55

2.8 Расчет некоторых показателей в инженерных задачах…….59

Глава 3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ 62

3.1 Плоскость в пространстве..... 62

3.2 Прямая в пространстве..... 69

3.3 Линии на плоскости. Уравнения линий..... 75

3.4 Прямая на плоскости 76

3.5 Эллипс..... 87

3.6 Гипербола 89

3.7 Парабола 93

3.8 Понятие о параметрически заданных кривых 98

3.9 Полярная система координат..... 100

3.10 Расчет характеристик криволинейного движения в агроинженерных задачах ..……...102

ЧАСТЬ 2 МАТЕМАТИКО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ……...106

Глава 4 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 106

4.1 Множества 106

4.2 Функции..... 109

4.3 Предел функции 114
4.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции 118
4.5 Непрерывные функции 128
4.6 Асимптоты графика функции 131
4.7 Модель закона непрерывного роста……..135
Глава 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ..... 140
5.1 Понятие производной 140
5.2 Правило Лопиталя ……..……148
5.3 Модель прямолинейного движения…….....149
Глава 6 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ
К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ 151
6.1 Основные теоремы дифференциального исчисления……..151
6.2 Исследование функций с помощью производных ……. ……152
6.3 Исследование функций как моделей технических процессов…174
Глава 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 179
7.1 Евклидово пространство 179
7.2 Функции нескольких переменных 182
7.3 Метод дифференциального исчисления функции
двух переменных в агроинженерных задачах……..…198
ЛИТЕРАТУРА 204

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие компьютеризации и цифровизации в 21 веке всех областей жизни привело к созданию средств производства нового поколения. Это, в частности, относится и к инженерным средствам сельского хозяйства. Успешное владение такими средствами требует в свою очередь от пользователей уверенного владения основными знаниями и навыками, формируемыми в вузах дисциплинами естественнонаучного цикла. Одной из базовых дисциплин этого цикла является математика.

В предлагаемом учебном пособии излагаются основные разделы курса дисциплины «Математика», предусмотренные учебным планом направления 35.03.06 Агроинженерия.

Учебное пособие включает в себя следующие разделы: элементы линейной алгебры, элементы векторной алгебры, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, применение производной к исследованию функции, дифференциальное исчисление функции нескольких переменных, каждый из которых содержит необходимый теоретический материал, образцы решений типовых примеров, рекомендации по применению описанных в разделах методов. В каждом разделе приводятся примеры построения моделей процессов, встречающихся в агроинженерной практике.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия.

Учебное пособие направлено на формирование следующих компетенций, предусмотренных федеральным государственным стандартом высшего образования соответствующего направления подготовки:

– способности решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий;

– способности применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

ЧАСТЬ 1
МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРИКЛАДНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

ГЛАВА 1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Матрицы

1.1.1 Понятие матрицы

Матрицей будем называть прямоугольные таблицы, составленные из элементов некоторых множеств. Матрицы принято обозначать большими буквами латинского алфавита, а элементы, из которых они составлены – соответствующими маленькими буквами. Каждый элемент матрицы снабжается двумя номерами, первый из которых есть номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых располагается рассматриваемый элемент:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

О матрице, имеющей m строк и n столбцов, говорят, что она имеет размеры $m \times n$ и записывают следующим образом: $A \in M_{m\times n}(X)$, где X есть множество, из которого выбираются элементы матрицы.

Ниже в основном рассматриваются матрицы, элементами которых являются вещественные числа ($X = \mathbb{R}$).

Матрицы A и B называют равными и записывают $A = B$, если они имеют одинаковые размеры ($A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$) и равные соответствующие элементы ($a_{kj} = b_{kj}$, $k = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Помимо формулы (1.1) матрицы также обозначают следующим образом:

$$A = \left(a_{kj}\right)_{k=1,\, j=1}^{m,\, n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}). \qquad (1.2)$$

Матрицу называют нулевой (нуль-матрицей), если все элементы ее равны нулю. Всякую нулевую матрицу будем обозначать буквой O, несмотря на то, что они на самом деле могут иметь различные размеры.

Квадратными называют матрицы, имеющие одинаковое число строк и столбцов, а запись $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ сокращают до $A \in M_n(\mathbb{R})$. В этом случае говорят, что задана квадратная матрица порядка n.

Множество чисел $\{a_{11},\ a_{22},\ldots,\ a_{nn}\}$ называют главной диагональю квадратной матрицы порядка n.

Если все элементы главной диагонали квадратной матрицы равны 1, а остальные элементы равны 0, то такую матрицу называют единичной матрицей порядка n. Единичные матрицы порядка n принято обозначать через E_n. Например, единичные матрицы 2, 3, 4,…. порядков соответственно:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ldots$$

1.1.2 Операции над матрицами

Сложение матриц

Суммой матриц одинаковых размеров $m \times n$ будет матрица такого же размера $m \times n$, каждый элемент которой получается как сумма соответствующих элементов суммируемых матриц.

Свойства операции сложения матриц

Свойство 1. $A + B = B + A$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойство 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойство 3. $A + O = A,\ O \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойство 4. Для всякого $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ существует противоположный элемент $(-A) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$: $A + (-A) = O$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы размера $m \times n$ на число λ будет матрица такого же размера $m \times n$, каждый элемент которой равен произведению числа λ на соответствующий элемент матрицы A .

Свойства операции умножения матрицы на число

Свойство 1. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Свойство 2. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Свойство 3. $1 \cdot A = A$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойство 4. Для всяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и для всякого $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ выполняются равенства $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$.

Замечание. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называют линейными операциями над матрицами, а свойства 1–4 сложения и 1–4 умножения матрицы числа на число – свойствами линейных операций.

Операция транспонирования

Пусть $A=\left(a_{kj}\right)_{k=1,\,j=1}^{m,\,n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, матрицу $A^T=\left(a_{jk}\right)_{j=1,k=1}^{n,\,m} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ называют транспонированной к матрице A. Из приведенного определения вытекает, что у матриц A и A^T меняются местами строки и столбцы с равными номерами. В более подробной записи это означает, что если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Свойства операции транспонирования

Свойство 1. $\left(A^T\right)^T = A$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойство 2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойство 3. $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$ для всех $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Пример 1.1. Найти матрицу $C = 4A^T - 2B$,

если $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -6 \\ -3 & 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -14 & 0 \\ 9 & 11 & 25 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. По формуле (1.3) – операции транспонирования:

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ -5 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. Тогда

$$C = 4A^T - 2B = 4\cdot\begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ -5 & -6 & 13 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -4 & -14 & 0 \\ 9 & 11 & 25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 16 & -12 \\ -20 & -24 & 52 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & -28 & 0 \\ 18 & 22 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 44 & -12 \\ -38 & -46 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Упорядоченный набор чисел длины n будем называть арифметическим вектором. Арифметические векторы можно записывать либо в виде матриц-строк, либо в виде матриц-столбцов. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ – арифметический вектор длины n. Числа, составляющие рассматриваемый арифметический вектор, называют его координатами.

Координаты векторов, имеющих одинаковые номера, будем называть одноименными координатами.

Скалярным произведением двух арифметических векторов одинаковой длины $A=(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$ и $B=(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$ называют сумму произведений одноименных координат этих векторов: $(A,B)=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$.

Пусть даны две матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \text{ и } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in M_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Условимся строки матриц обозначать теми же буквами, что и матрицы, нумеруя их внизу, а столбцы – теми же буквами, что и матрицы, но нумеруя их вверху.

Рассмотрим матрицу A как совокупность строк:

$$A=\begin{pmatrix} - & A_1 & - \\ - & A_2 & - \\ \dots & \cdot & \dots \\ - & A_j & - \\ \dots & \cdot & \dots \\ - & A_m & - \end{pmatrix}, \text{ где } A_j=(a_{j1} \quad a_{j2} \quad \dots \quad a_{jn}),\ j=1,2,\dots,m.$$

Отметим, что каждая строка A_j, $j=1,2,\dots,m$ есть арифметический вектор длины n.

Матрицу B представим как совокупность столбцов

$$B=\begin{pmatrix} | & | & \dots & | & \dots & | \\ B^1 & B^2 & \dots & B^k & \dots & B^p \\ | & | & \dots & | & \dots & | \end{pmatrix}, \text{ где } B^k=(a_{1k} \quad a_{2k} \quad \dots \quad a_{nk})^T,\ k=1,2,\dots,p.$$

Ясно, что каждый из столбцов B^k, $k=1,2,\dots,p$ также является арифметическим вектором длины n.

Определение. Произведением матриц $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ называют матрицу $C = AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, каждый элемент которой получен как скалярное произведение элемента строки матрицы A на элемент столбца матрицы B, то есть $c_{jk} = (AB)_{jk} = \left(A_j, B^k\right)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Таким образом, каждый элемент матрицы C, который находится на пересечении j-ой строки и k-того столбца, будет равен сумме произведений соответствующих элементов j-ой строки первой матрицы и k-того столбца второй матрицы.

Очевидно, что умножать можно только матрицы согласованных размеров.

Свойства операции умножения

Свойство 1. Операция умножения матриц не перестановочна.

Свойство 2. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, тогда E_m является для нее левой единицей, то есть $E_m A = A$, а E_n является для нее правой единицей, то есть $AE_n = A$.

Свойство 3. Если матрицы A, B, C имеют подходящие размеры, то $(A+B)C = AC + BC$ и $A(B+C) = AB + AC$.

Свойство 4. Если $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times s}(\mathbb{R})$, то $A(BC) = (AB)C$.

Свойство 5. Если $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, а $\lambda \in \mathbb{R}$, то имеют место равенства $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Свойство 6. Если $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример 1.2. Найти произведение матриц AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -11 & 8 & 0 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 25 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть $C = AB$, при этом $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Тогда по определению произведения матриц можно найти все требуемые элементы матрицы $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

c_{11} – это сумма произведений соответствующих элементов первой строки матрицы A и первого же столбца матрицы B, то есть

$$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} = 2\cdot 14 + (-5)\cdot 25 + 4\cdot(-3) = -109;$$

c_{12} – это сумма произведений соответствующих элементов первой строки матрицы A и второго столбца матрицы B, то есть

$$c_{12} = a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} = 2\cdot 9 + (-5)\cdot(-5) + 4\cdot 1 = 47;$$

c_{21} – это сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы A и первого столбца матрицы B, то есть

$$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} = (-11)\cdot 14 + 8\cdot 25 + 0\cdot(-3) = 46;$$

c_{22} – это сумма произведений соответствующих элементов второй строки матрицы A и второго столбца матрицы B, то есть

$$c_{22} = a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} = (-11)\cdot 9 + 8\cdot(-5) + 0\cdot 1 = -139;$$

c_{31} – это сумма произведений соответствующих элементов третьей строки матрицы A и первого столбца матрицы B, то есть

$$c_{31} = a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} + a_{33}\cdot b_{31} = 13\cdot 14 + 7\cdot 25 + (-2)\cdot(-3) = 363;$$

c_{32} – это сумма произведений соответствующих элементов третьей строки матрицы A и второго столбца матрицы B, то есть

$$c_{32} = a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} + a_{33}\cdot b_{32} = 13\cdot 9 + 7\cdot(-5) + (-2)\cdot 1 = 80.$$

Тогда матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} -109 & 47 \\ 46 & -139 \\ 363 & 80 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Обратимые матрицы. Обратная матрица

Квадратную матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ будем называть обратимой матрицей, если существует матрица $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, такая что выполнены равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. При этом матрица A^{-1} называется обратной к матрице A.

Свойства обратимых матриц

Свойство 1. Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима, тогда обратная к ней матрица также будет обратима и при этом $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Свойство 2. Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, тогда матрица λA также будет обратима и при этом $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Свойство 3. Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима, тогда матрица A^T также будет обратима и при этом $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Свойство 4. Если матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ обратимы, тогда матрица AB также будет обратима и при этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.2 Определители

1.2.1 Определение определителя

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ – квадратная матрица n-го порядка.

Определителем указанной матрицы называется число $\det A$ или $\Delta(A)$, сопоставляемое этой матрице по правилам, описываемым ниже.

Обозначим через $\left(a_{1j}\right)_{j=1}^{n-1}$ матрицу порядка $n-1$, полученную из матрицы A вычеркиванием первой строки и столбца с номером j, и обозначим число $M_{1j} = \det\left(a_{1j}\right)_{j=1}^{n-1}$, которое назовём минором элемента a_{1j}.

Определения.

1. Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ называют число

$$\Delta(A)=\det A=\det(a_{11})=a_{11}.$$

2. Определителем матрицы порядка n называют число

$$\Delta(A)=\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-\ldots+(-1)^{n}a_{1n}M_{1n}.$$

Наряду с обозначением $\det A$ в тех случаях, когда нужно явно указать матрицу, определитель которой вычисляется, пользуются также обозначением

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из данного выше определения, в частности вытекает, что

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}. \qquad (1.4)$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Некоторые свойства определителей

Свойство 1. Определитель всякой матрицы равен определителю транспонированной к ней матрицы.

Свойство 2. Если в матрице переставить две строки (или столбца) местами, то в этом случае знак определителя поменяется на противоположный.

Свойство 3. Если любая строка (или любой столбец) определителя состоит из нулей, то в этом случае определитель будет равен нулю.

Свойство 4. Если определитель содержит две (или более) одинаковых строки (или же столбца), то такой определитель будет равен нулю.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (или же столбца) определителя имеют общий множитель, то этот множитель можем вынести за знак определителя.

Пример 1.3. Вычислить определители второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 3 & -6 & 11 \\ 2 & 4 & -1 \\ -5 & 3 & -9 \end{vmatrix}.$$

Решение. 1. Для вычисления первого определителя воспользуемся формулой (1.4):

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{5} & \overset{-}{8} \\ -3 & -11 \end{vmatrix} = 5\cdot(-11)-(-3)\cdot 8 = -31.$$

Замечание. Можно сразу перемножать элементы по главной диагонали (по стрелочке), а затем элементы по другой диагонали, с учетом минуса (над числом «8»):

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{5} & \overset{-}{8} \\ -3 & -11 \end{vmatrix} = -55+24 = -31.$$

2. Для вычисления второго определителя воспользуемся формулой (1.5):

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{-6} & \overset{+}{11} \\ 2 & 4 & -1 \\ -5 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{4} & \overset{-}{-1} \\ 3 & -9 \end{vmatrix} - (-6)\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 11\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{4} \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = \bigcirc,$$

а затем формулой (1.4):

$$\bigcirc = 3(-36+3)+6(-18-5)+11(6+20) = 3\cdot(-33)+6\cdot(-23)+11\cdot 26 = 49.$$

1.2.2 Конструкция обратной матрицы

Возьмем квадратную матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$

Зафиксируем некоторый элемент a_{kj} этой матрицы и вычеркнем из матрицы строку с номером k и столбец с номером j, то есть строку и столбец, на пересечении которых располагается указанный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{kj} называется число $A_{kj}=(-1)^{k+j}M_{kj}$, $k,j=1,2,...,n$, где M_{kj} – называют минором указанного элемента a_{kj}.

Пусть $\tilde{A}$ – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A. Тогда матрица $A^*=\left(\tilde{A}\right)^T$ называется присоединенной к матрице A.

То есть присоединенная матрица будет иметь вид

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots.. \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Квадратную матрицу будем называть невырожденной, если её определитель не равен нулю.

Теорема. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная. При выполнении этого условия обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots. & \dots.. & \dots & \dots.. \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

Пример 1.4. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ -5 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ обратимой и, если да, то построить матрицу A^{-1}.

Решение. 1. Выясним сначала, является ли эта матрица обратимой. Для этого вычисляем ее определитель:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ -5 & 8 & 11 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 11 \end{vmatrix}+9\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}=$$

$$=3(77-80)-6(44+50)+9(32+35)=3\cdot(-3)-6\cdot 94+9\cdot 67=30.$$

Так как $\det A\neq 0$, то матрица A обратима. При этом, по формуле (1.7)

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Найдем алгебраические дополнения каждого из элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}=77-80=-3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}=-(44+50)=-94;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=32+35=67;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}=-(66-72)=6;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}=33+45=78;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-(24+30)=-54;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}6 & 7\\ 9 & 10\end{vmatrix}=60-63=-3;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 9 & 10\end{vmatrix}=-(30-36)=6;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 7\end{vmatrix}=21-24=-3.$$

Тогда $A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3 & 6 & -3\\ -94 & 78 & 6\\ 67 & -54 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/10 & 1/5 & -1/10\\ -47/15 & 39/15 & 1/5\\ 67/30 & -9/5 & -1/10\end{pmatrix}$.

1.2.3 Матричные уравнения

Матричными уравнениями называют равенства $AX=F$, $YA=F$, в которых матрицы A,F – известны, а матрицы X,Y подлежат определению. Если матрица A квадратна и обратима, то каждое из матричных уравнений $AX=F$ и $YA=F$ будет иметь решение, которое может быть найдено по формулам $X=A^{-1}F$ и $X=FA^{-1}$ соответственно. Причем это решение будет единственным.

Пример 1.5. Решить уравнение $Y\cdot\begin{pmatrix}4 & 7\\ 8 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -3 & 11\\ 10 & 0\end{pmatrix}$.

Решение. Наше уравнение имеет вид $YA=F$,

где

$$A_{2\times2}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 8 & -1\end{pmatrix},\quad F_{3\times2}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -3 & 11\\ 10 & 0\end{pmatrix}.$$

Если существует матрица, обратная матрице A, то решением данного уравнения будет матрица $Y_{3\times2}=FA^{-1}$.

1. Проверим, будет ли матрица A обратима. Для этого найдем определитель матрицы A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 56 = -60 \neq 0,$$

значит, матрица A имеет обратную.

2. Найдем матрицу A^{-1} методом алгебраических дополнений (пункт 1.2.2). Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 7 = -7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 8 = -8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Опираясь на свойства произведения матриц, коэффициент $\left(-\frac{1}{60}\right)$ можно оставить перед матрицей (для упрощения дальнейших вычислений).

3. Найдём матрицу Y.

$$Y = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 11 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 11 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$y_{11} = 5 \cdot (-1) + 8 \cdot (-8) = -69;$$

$$y_{12} = 5 \cdot (-7) + 8 \cdot 4 = -3;$$

$$y_{21} = -3 \cdot (-1) + 11 \cdot (-8) = -85;$$

$$y_{22} = -3 \cdot (-7) + 11 \cdot 4 = 65;$$

$$y_{31} = 10 \cdot (-1) + 0 \cdot (-8) = -10;$$

$$y_{12} = 10 \cdot (-7) + 0 \cdot 4 = -70;$$

Тогда матрица X будет иметь вид

$$Y = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -69 & -3 \\ -85 & 65 \\ -10 & -70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/20 & 1/20 \\ 17/12 & -13/12 \\ 1/6 & 7/6 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Более подробно произведение двух матриц разобрано в примере 1.2.

1.3 Системы линейных алгебраических уравнений

1.3.1 Основные понятия о СЛАУ

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называют системы следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = f_m. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Здесь a_{kj}, $k = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – коэффициенты системы;

f_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ – правые части, свободные члены;

x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ – неизвестные.

Набор неизвестных x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ называют решением СЛАУ (1.8), если этот набор удовлетворяет каждому уравнению системы.

СЛАУ (1.8) будем называть однородной в том случае, когда все правые части системы будут равны нулю:

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$$

и неоднородной в случае, когда хотя бы одно из чисел f_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ не равно нулю.

СЛАУ будем называть совместной в том случае, когда существует хотя бы одно её решение и, соответственно, несовместной, если система не имеет решений.

Совместную СЛАУ будем называть определенной в случае, когда она имеет только одно решение и, соответственно, неопределенной, когда система имеет более чем одно решение.

Очевидно, что однородная СЛАУ всегда совместна, так как она имеет решение $x_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

1.3.2 Матричная запись СЛАУ

Поставим в соответствие СЛАУ (1.8) следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{a12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_m \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Основной матрицей системы называют матрицу A, при этом F называют столбцом свободных членов, а X называют столбцом неизвестных.

Непосредственная проверка показывает, что

$$AX = F. \tag{1.9}$$

Матричное уравнение (1.9) называют матричной записью СЛАУ (1.8). Если предположить, что матрица A будет квадратной и обратимой, тогда матричное уравнение (1.9) будет иметь единственное решение, которое можно определить по формуле

$$X = A^{-1}F.$$

Это означает, что СЛАУ (1.8) в рассматриваемом случае имеет единственное решение.

1.3.3 Формулы Крамера

Рассмотрим СЛАУ, предполагая, что число уравнений этой СЛАУ совпадает с числом неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases} \tag{1.10}$$

Тогда основная матрица системы квадратная.

Обозначим как $\Delta(A)$ определитель основной матрицы, заданной СЛАУ (1.10), и через $\Delta_k(A)$ определитель, получаемый из определителя $\Delta(A)$ при замене столбца с номером k на столбец свободных членов.

Теорема Крамера. Если основная матрица СЛАУ (1.10) невырожденная, то СЛАУ имеет единственное решение, которое может быть определено следующим образом:

$$x_k = \frac{\Delta_k(A)}{\Delta(A)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Формулы (1.11), как и вышеуказанную теорему, часто называют формулами Крамера.

Пример 1.6. Решить указанную систему линейных алгебраических уравнений, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 1z = -7, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ 8x + 11y + 6z = 14. \end{cases}$$

Решение. Определитель основной матрицы системы (определитель, который мы составим из коэффициентов перед неизвестными системы):

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & -4 & -3\\ 8 & 11 & 6\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 11 & 6\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 8 & 6\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 8 & 11\end{vmatrix}=$$

$$=3(-24+33)-5(12+24)+1(22+32)=27-180+54=-99\neq 0,$$

поэтому СЛАУ имеет в соответствии с теоремой единственное решение, которое соответственно может быть определено по формулам (1.11) Крамера.

Вычислим теперь вспомогательные определители.

Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-7 & 5 & 1\\ -1 & -4 & -3\\ 14 & 11 & 6\end{vmatrix}=-7\cdot\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 11 & 6\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 14 & 6\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 14 & 11\end{vmatrix}=$$

$$=-7(-24+33)-3(-6+42)+1(-11+56)=-63-180+45=-198.$$

Определитель Δ_2 получим из определителя Δ заменой второго столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & -7 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ 8 & 14 & 6\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 14 & 6\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 8 & 6\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 8 & 14\end{vmatrix}=$$

$$=3(-6+42)+7(12+24)+1(28+8)=108+252+36=396.$$

Определитель Δ_3 получим из определителя Δ заменой третьего столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 5 & -7\\ 2 & -4 & -1\\ 8 & 11 & 14\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 11 & 14\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 8 & 14\end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 8 & 11\end{vmatrix}=$$

$$=3(-56+11)-5(28+8)-7(22+32)=-135-180-378=-693.$$

Тогда, непосредственно по формулам (1.11), получим:

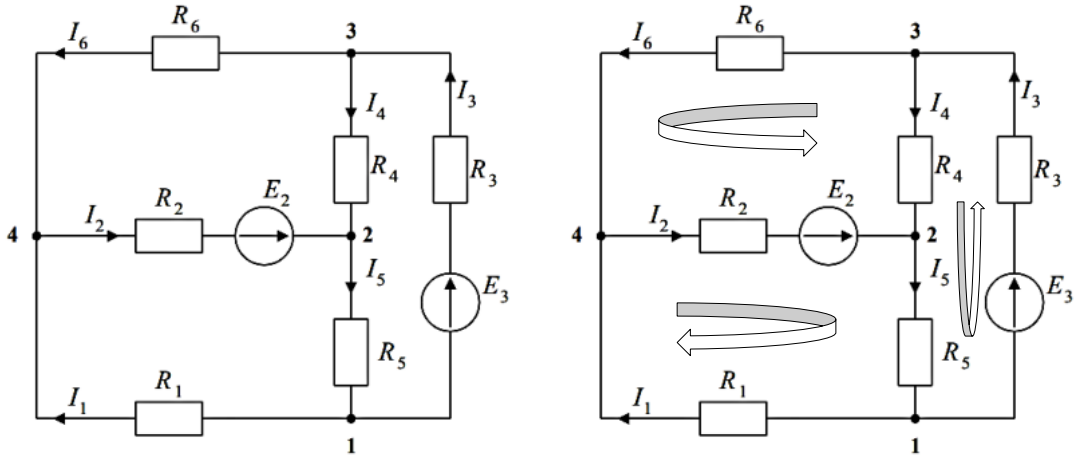
$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-198}{-99} = 2;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{396}{-99} = -4;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-693}{-99} = 7.$$

1.4 Расчет электрической цепи

Пример 1.7. Для электрической цепи постоянного тока, изображенной на рисунке 1.1 *а*, заданы следующие значения сопротивлений: $R_1 = 12\,Ом$; $R_2 = 15\,Ом$; $R_3 = 10\,Ом$; $R_4 = 15\,Ом$; $R_5 = 6\,Ом$; $R_6 = 8\,Ом$ и ЭДС $E_2 = 30\,В$; $E_3 = 20\,В$. Найти токи в ветвях.



а *б*

Рисунок 1.1 – Схема электрической цепи к примеру 1.7

Решение. Воспользуемся методом контурных токов. В этом методе полагают, что в каждом независимом контуре электрической цепи течет свой контурный ток. На рисунке 1.1 *б* мы отметили направление обхода каждого контура, при этом оно совпадало с положительным направлением контурного тока: начиная от нижнего левого контура, по часовой стрелке, контурные токи: I_{11}, I_{22}, I_{33}.

Если в цепи имеется больше двух контуров, то, основываясь на законах Кирхгофа, можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}, \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}\ . \end{cases}$$

Здесь R_{ii} – суммарное сопротивление *i*-го контура;

R_{ij} – сопротивление смежной ветви между *i*-тым и *j*-тым контурами;

I_{ii} – контурный ток *i*-го контура;

E_{ii} – контурная ЭДС *i*-го контура (она равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре).

Кроме этого, нужно учесть следующее:

1) если направление ЭДС совпадает с направлением обхода цепи, то её значение берём со знаком $(+)$, а если не совпадает, то со знаком $(-)$;

2) если контурные токи по общей ветви встречно направлены, то соответствующее значение R_{ij} берём со знаком $(-)$, а если согласно направлены, то со знаком $(+)$.

Найдём коэффициенты системы:

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 = 12 + 15 + 6 = 33\ Ом$;

$R_{22} = R_2 + R_4 + R_6 = 15 + 15 + 8 = 38\ Ом$;

$R_{33} = R_3 + R_4 + R_5 = 10 + 15 + 6 = 31\ Ом$;

$R_{12} = R_{21} = R_2 = 15\ Ом$; $R_{13} = R_{31} = R_5 = 6\ Ом$; $R_{23} = R_{32} = -R_4 = -15\ Ом$;

$E_{11} = E_2 = 30\ В$; $E_{22} = E_2 = 30\ В$; $E_{33} = E_3 = 20\ В$.

Получим систему уравнений и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 33I_{11} + 15I_{22} + 6I_{33} = 30, \\ 15I_{11} + 38I_{22} - 15I_{33} = 30, \\ 6I_{11} - 15I_{22} + 31I_{33} = 20. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{33} & \overset{-}{15} & \overset{+}{6} \\ 15 & 38 & -15 \\ 6 & -15 & 31 \end{vmatrix} = 33 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{38} & \overset{-}{-15} \\ -15 & 31 \end{vmatrix} - 15 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{15} & \overset{-}{-15} \\ 6 & 31 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{15} & \overset{-}{38} \\ 6 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 33(38 \cdot 31 - 15 \cdot 15) - 15(15 \cdot 31 + 15 \cdot 6) + 6(-15 \cdot 15 - 38 \cdot 6) = 20406;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \overset{+}{30} & \overset{-}{15} & \overset{+}{6} \\ 30 & 38 & -15 \\ 20 & -15 & 31 \end{vmatrix} = 30 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{38} & \overset{-}{-15} \\ -15 & 31 \end{vmatrix} - 15 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{30} & \overset{-}{-15} \\ 20 & 31 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{30} & \overset{-}{38} \\ 20 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 30(38 \cdot 31 - 15 \cdot 15) - 15(30 \cdot 31 + 15 \cdot 20) + 6(-15 \cdot 30 - 38 \cdot 20) = 2880;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \overset{+}{33} & \overset{-}{30} & \overset{+}{6} \\ 15 & 30 & -15 \\ 6 & 20 & 31 \end{vmatrix} = 33 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{30} & \overset{-}{-15} \\ 20 & 31 \end{vmatrix} - 30 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{15} & \overset{-}{-15} \\ 6 & 31 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{15} & \overset{-}{30} \\ 6 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$= 33(30 \cdot 31 + 15 \cdot 20) - 30(15 \cdot 31 + 15 \cdot 6) + 6(15 \cdot 20 - 30 \cdot 6) = 24660;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \overset{+}{33} & \overset{-}{15} & \overset{+}{30} \\ 15 & 38 & 30 \\ 6 & -15 & 20 \end{vmatrix} = 33 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{38} & \overset{-}{30} \\ -15 & 20 \end{vmatrix} - 15 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{15} & \overset{-}{30} \\ 6 & 20 \end{vmatrix} + 30 \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{15} & \overset{-}{38} \\ 6 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 33(38 \cdot 20 + 15 \cdot 30) - 15(15 \cdot 20 - 30 \cdot 6) + 30(-15 \cdot 15 - 38 \cdot 6) = 24540.$$

Тогда $I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \approx 0{,}141\ A$; $I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \approx 1{,}208\ A$; $I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \approx 1{,}203\ A$.

Учитывая схему на рисунке 1.1 *б*, найдём искомые токи в ветвях:

$I_1 = I_{11} = 0{,}141\ A$;

$I_2 = I_{11} + I_{22} = 1{,}349\ A$;

$I_3 = I_{33} = 1{,}203\ A$;

$I_4 = I_{33} - I_{22} = -0{,}005\ A$;

$I_5 = I_{11} + I_{33} = 1{,}344\ A$;

$I_6 = I_{22} = 1{,}208\ A$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение матрицы. Приведите виды известных вам матриц.
2. Дайте определение суммы матриц. Какие должны быть размеры у этих матриц?
3. Сформулируйте определение обратимой матрицы. Как найти матрицу, обратную заданной?
4. Как найти определитель третьего порядка?
5. Какие свойства определителей вам известны?
6. Дайте определение СЛАУ.
7. Сформулируйте теорему Крамера. Приведите формулы Крамера.

ГЛАВА 2 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1 Векторные и скалярные величины

Многие физические величины, встречающиеся в природе, обладают помимо числового значения, еще и направлением. Такие величины принято называть векторными. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила и так далее.

Разумеется, встречаются и такие физические величины, для описания которых достаточно указывать лишь их численное значение в выбранной системе единиц измерения (длина, площадь, объем, масса и другие). Физические величины такого типа называют скалярными или скалярами.

Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины.

Для изучения векторных величин изначально предлагалось много разнообразных подходов. Наиболее удачным оказалось моделирование векторных величин при помощи так называемых геометрических векторов (далее просто векторов).

Определение. Вектором называют направленный отрезок на плоскости или в пространстве.

В этом случае длина вектора, которую также называют модулем вектора, описывает числовое значение, которое характерно для заданной векторной величины. Направление указывается стрелкой.

Векторы обычно обозначают латинскими буквами с «чертой» или «стрелочкой» вверху, то есть $\bar{a}$, $\bar{b}$,….

Модуль вектора (то есть его длину) обозначают следующим образом: $|\bar{a}|$.

Два вектора называются коллинеарными в том случае, если они лежат на одной прямой (или же на параллельных прямых) (рисунок 2.1).

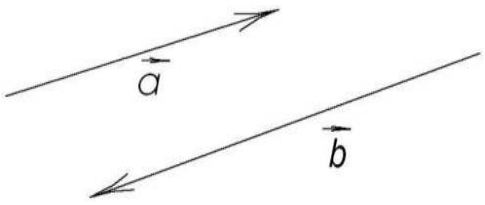


Рисунок 2.1 – Графическое изображение коллинеарных векторов

В случае если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, будем применять следующее обозначение: $\bar{a} \| \bar{b}$.

Очевидным является тот факт, что коллинеарные векторы могут быть либо одинаково направлены (в этом случае их называют сонаправленные), либо противоположно направлены.

В первом случае будем применять обозначение $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, соответственно во втором случае $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

Два вектора называются равными в том случае, когда они одинаково направлены и имеют одинаковые модули (то есть длины).

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, то будем записывать

$$\bar{a} = \bar{b}.$$

Таким образом, по определению

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \\ |\bar{a}| = |\bar{b}| \end{cases}.$$

Замечание. Следствием из определения равных векторов является тот факт, что их можно, не меняя, перемещать параллельно самим себе.

Если рассматриваемый вектор можно переместить так, что он совпадёт с отрезком AB, то для обозначения вектора применяют запись $\overline{AB}$, где A – начало отрезка, B – конец отрезка (рисунок 2.2).

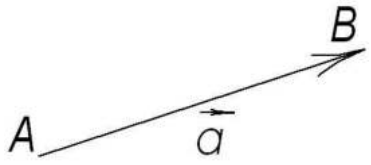


Рисунок 2.2 – Вектор $\overline{AB}$

Определение. Нулевым вектором (или нуль-вектором) называют вектор, имеющий длину, равную 0.

Нуль-вектор геометрически можно изобразить точкой. При этом это единственный вектор, для которого не определено направление.

Обозначают нуль-вектор символом $\bar{O}$ и, по определению, его длина $|\bar{O}| = 0$.

2.2 Линейные операции над векторами

2.2.1 Сложение векторов

Операция сложения векторов может быть осуществлена по двум следующим равносильным правилам.

Правило треугольника. Перемещайте векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельно самим себе так, чтобы начало вектора $\bar{b}$ совпало с концом вектора $\bar{a}$. Тогда суммой этих векторов будет являться вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, идущий из начала первого вектора $\bar{a}$ в конец второго вектора $\bar{b}$ (рисунок 2.3).

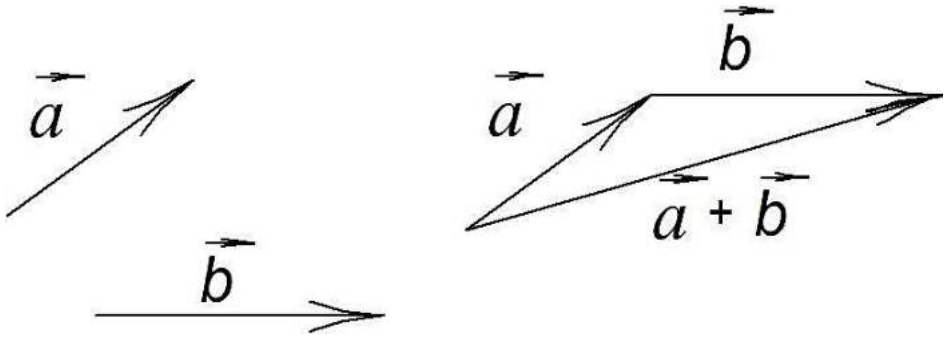


Рисунок 2.3 – Иллюстрация правила треугольника

Правило параллелограмма. Перемещайте векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельно самим себе так, чтобы совпали начала этих векторов. Затем через концы векторов проведите прямые параллельно направлениям, определяемым заданными векторами. Вы построите в результате параллелограмм (рисунок 2.4). Тогда суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет вектор, идущий по диагонали полученного вами параллелограмма из общего начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в вершину полученного параллелограмма.

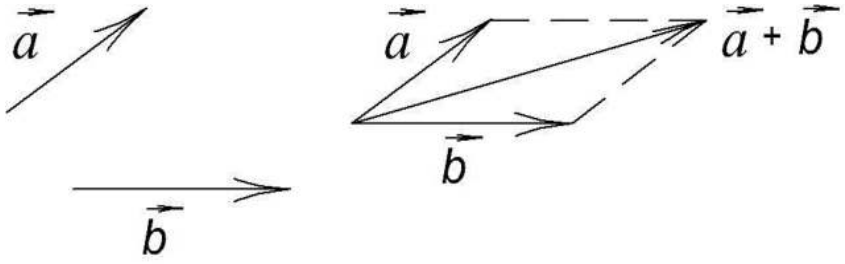


Рисунок 2.4 – Правило параллелограмма сложения векторов

Свойства операции сложения векторов

Свойство 1. Операция сложения векторов перестановочна, то есть $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойство 2. Операция сложения сочетательна, то есть $\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}$ для любых векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Свойство 3. Существует нейтральный по операции сложения элемент, такой что $\bar{a}+\bar{O}=\bar{a}$ для любого вектора $\bar{a}$.

Свойство 4. Для всякого вектора $\bar{a}$ существует противоположный ему элемент, то есть вектор $-\bar{a}$, такой что $\bar{a}+\left(-\bar{a}\right)=\bar{O}$.

2.2.2 Разность векторов

Понятие суммы тесно связано с понятием разности. В том смысле, что разность (любых объектов, для которых определено сложение) определяется через сумму.

В частности, для векторов под разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимают вектор $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\bar{b}$ даст уменьшаемый вектор $\bar{a}$.

Из этого определения немедленно вытекает следующее правило построения разности: совместите начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, тогда разностью будет вектор, соединяющий концы вектора $\bar{a}$ (уменьшаемого) и вектора $\bar{b}$ (вычитаемого), и направлен к уменьшаемому (как показано на рисунке 2.5).

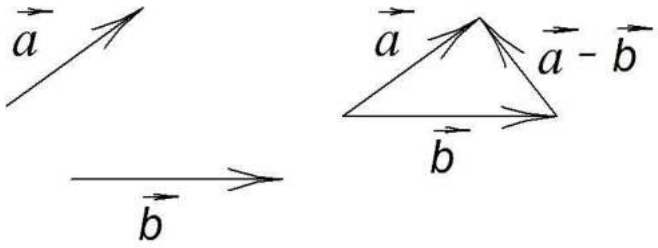


Рисунок 2.5 – Иллюстрация вычитания векторов

2.2.3 Умножение вектора на скаляр

Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число λ назовем вектор $\lambda\bar{a}$, имеющий длину $|\lambda\bar{a}|=|\lambda||\bar{a}|$ и при этом сонаправленный с вектором $\bar{a}$, когда $\lambda > 0$, и противоположно направленный, когда $\lambda < 0$ (рисунок 2.6).

Таким образом, в соответствии с данным определением можно записать

$$\lambda\bar{a}:\begin{cases}|\lambda\bar{a}|=|\lambda||\bar{a}|,\\ \lambda\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{a}, \quad \text{если}\ \lambda>0,\\ \lambda\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{a}, \quad \text{если}\ \lambda<0.\end{cases}$$

Заметим, что из определения коллинеарности векторов и операции умножения вектора на скаляр вытекает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будут коллинеарными тогда и только тогда, когда найдется такое $\lambda\neq 0$, для которого $\bar{a}=\lambda\bar{b}$.

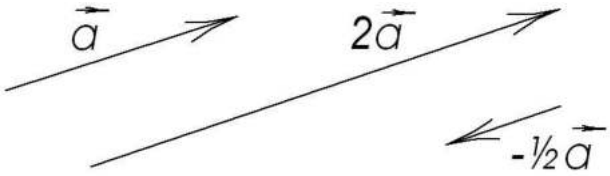


Рисунок 2.6 – Иллюстрация умножения вектора на скаляр

Свойства операции умножения вектора на скаляр

Свойство 1. Рассматриваемая операция умножения вектора на скаляр распределительна (дистрибутивна) относительно сложения векторов, то есть $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$ для любых $\lambda\in\mathbb{R}$ и любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойство 2. Рассматриваемая операция умножения вектора на скаляр распределительна относительно сложения скаляров: $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$ для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и вектора $\bar{a}$.

Свойство 3. Существует нейтральный по умножению скаляр: $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$.

Свойство 4. Для всяких чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и всякого вектора $\bar{a}$ выполняется $(\lambda\mu)\bar{a}=\lambda(\mu\bar{a})$.

Пример 2.1. В параллелограмме *MNPL* (рисунок 2.7): *A* – точка пересечения диагоналей, *B* – середина *MN*, $\bar{a}=\overline{MB}$ и $\bar{b}=\overline{LA}$. Выразить вектор $\overline{ML}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

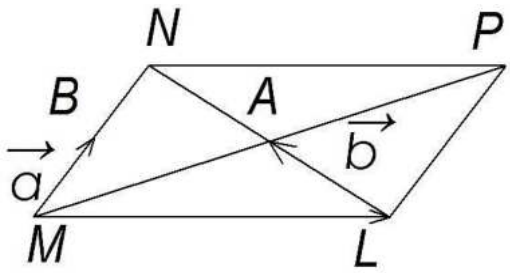


Рисунок 2.7 – Параллелограмм к примеру 2.1

Решение. Выразить вектор $\overline{ML}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это значит представить вектор $\overline{ML}$ в следующем виде: $\overline{ML}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$. Причём числа λ и μ не обязательно одновременно не равны нулю.

Поскольку при построении суммы и разности векторов мы используем треугольники, то на рисунке найдем треугольник, одной из сторон которого является вектор $\overline{ML}$, а две другие стороны мы либо знаем, либо можем легко выразить через известные векторы.

Таким треугольником является ΔMNL. В нём, по правилу сложения векторов, $\overline{ML}=\overline{MN}+\overline{NL}$, где векторы $\overline{MN}$ и $\overline{NL}$ мы легко можем найти.

Так как B – середина *MN* и $\overline{MN}\uparrow\uparrow\overline{MB}$, то $\overline{MN}=2\overline{MB}=2\bar{a}$.

Так как A – точка пересечения диагоналей, следовательно, *A* – середина *LN*. При этом $\overline{NL}\uparrow\downarrow\overline{LA}$, то $\overline{NL}=-2\overline{LA}=-2\bar{b}$.

Тогда окончательно получим:

$$\overline{ML} = \overline{MN} + \overline{NL} = 2\bar{a} + \left(-2\bar{b}\right) \text{ или } \overline{ML} = 2\bar{a} - 2\bar{b}\,.$$

Определение. Вектор, модуль которого равен единице, называют соответственно единичным.

С помощью единичных векторов удобно описывать направления, определяемые ненулевыми векторами.

Пусть задан вектор $\bar{a} \neq \bar{O}$. Рассмотрим вектор $\bar{a}_0 = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$.

По определению операции умножения вектора на скаляр имеем

$$|\bar{a}_0| = \left|\frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}\right| = \frac{1}{|\bar{a}|}|\bar{a}| = 1$$

и

$$\bar{a}_0 \uparrow\uparrow \bar{a}\text{, так как } \lambda = \frac{1}{|\bar{a}|} > 0.$$

Итак, $\bar{a}_0$ – это единичный вектор направления, определяемого направлением вектора $\bar{a}$.

Следует отметить, что при построении для любого вектора $\bar{a}$ справедливо

$$\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}_0,$$

где $\bar{a}_0$ – это единичный вектор для вектора $\bar{a}$.

Операции сложения (вычитания) векторов, а также операцию умножения вектора на скаляр называют линейными операциями над векторами.

2.3 Проекция вектора на ось

Осью называют направленную прямую, на которой определено начало отсчета, а также определен масштаб.

Проекцией некоторой точки A на ось l в пространстве называют точку пересечения плоскости, проведенной через заданную точку A, перпендикулярно к оси, с осью l (как показано на рисунке 2.8).

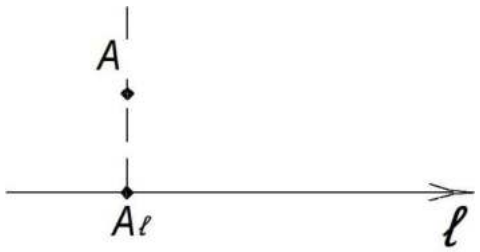


Рисунок 2.8 – Иллюстрация проекции точки на ось

Проекцией некоторой точки A на ось l на плоскости называют точку пересечения перпендикуляра, опущенного из заданной точки A на ось, с этой осью.

Договоримся обозначать проекцию точки A на ось l через A_l.

Пусть теперь $\bar{a} = \overline{AB}$, а A_lB_l – длина отрезка, образуемого проекциями начала и конца заданного вектора $\overline{AB}$.

Проекцией вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ на ось будем называть число

$$np_l\bar{a} = \pm A_lB_l,$$

причем знак «+» выбирается, если направление от проекции начала A_l к проекции конца B_l совпадает с направлением оси (рисунок 2.9), и знак «–» в противном случае.

Нетрудно убедиться в том, что

$$np_l\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi, \tag{2.1}$$

где $\varphi = \left(\hat{l,\bar{a}}\right)$ – угол, образуемый осью l и вектором $\bar{a}$ (рисунок 2.9).

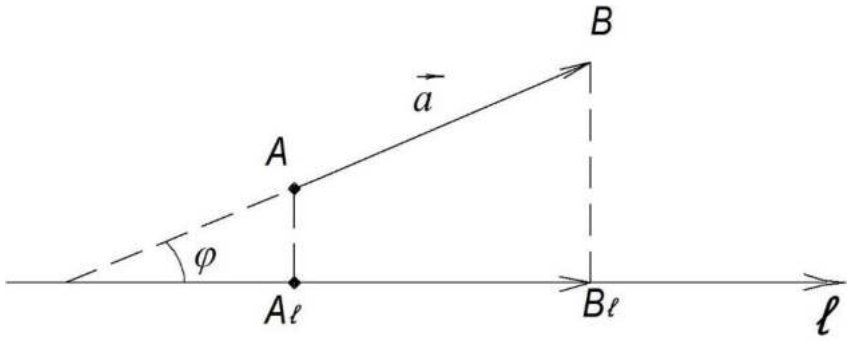


Рисунок 2.9 – Проекция вектора на ось

Свойства проекций

Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные векторы, l – ось, λ – вещественное число, то легко проверить:

Свойство 1. $np_l\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=np_l\bar{a}+np_l\bar{b}$.

Свойство 2. $np_l\lambda\bar{a}=\lambda np_l\bar{a}$.

2.4 Координаты вектора

2.4.1 Разложения вектора на плоскости и в пространстве

Пусть даны векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},...$ и скаляры $\alpha,\beta,\gamma,....$ При помощи введенных выше линейных операций над векторами мы можем построить выражение вида $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}+...$, называемое линейной комбинацией векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c},....$ При этом числа $\alpha,\beta,\gamma,...$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Линейная комбинация называется тривиальной, если все её коэффициенты равны нулю. Ясно, что тривиальная линейная комбинация есть нуль-вектор.

Однако существуют и нетривиальные линейные комбинации, равные нулю (здесь и далее, когда речь идет о векторах, мы будем говорить «нуль», а подразумевать «нуль-вектор»). Например, согласно свойству 4 операции сложения $\bar{a}+\left(-\bar{a}\right)=\bar{O}$, где $\bar{a}$ не обязательно нуль-вектор. В связи с этим вводят следующие понятия.

Определение. Совокупность векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c},...$ будем называть линейно независимой, если исходя из того, что их линейная комбинация равна нулю, следует, что она тривиальна. Совокупность векторов называют линейно зависимой, если найдется хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая равна нулю.

Определение. Совокупность векторов называют базисом, если всякий другой вектор можно единственным образом представить в виде линейной комбинации указанных векторов.

Ясно, что базис есть линейно независимая система и эта система максимальна в том смысле, что добавление к ней любого элемента приводит к линейно зависимой системе.

Теорема. Любые два неколлинеарных вектора будут образовывать базис на плоскости.

Векторы, которые лежат в одной плоскости (или же в параллельных плоскостях), называют компланарными.

Теорема. Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Следует отметить, что если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ – некомпланарны, то существуют единственным образом определяемые числа λ, μ, γ такие, что выполняется

$$\bar{a} = \lambda\bar{a}_1 + \mu\bar{a}_2 + \gamma\bar{a}_3 .$$

Тройку чисел $(\lambda; \mu; \gamma)$ будем называть координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

2.4.2 Декартовы системы координат. Координатные орты

Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости называются две взаимно перпендикулярные оси, причем точка их пересечения считается началом отсчета для каждой оси.

Оси обозначают OX, OУ и называют осями абсцисс и ординат соответственно.

Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}$ единичные векторы, имеющие направления координатных осей. Поскольку эти векторы перпендикулярны, их называют координатными ортами (ортогональность = перпендикулярность).

Очевидно, векторы $\bar{i}, \bar{j}$ неколлинеарны, поэтому, согласно теореме разложения, на плоскости для любого вектора $\bar{a}$, имеет место представление: $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$, где, как нетрудно заметить, $a_x = np_{OX}\bar{a}$, $a_y = np_{OY}\bar{a}$.

Числа a_x, a_y называют координатами вектора $\bar{a}$, а запись $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$ сокращают до следующей: $\bar{a} = (a_x; a_y)$.

Отметим, что если $\bar{a} = \overline{AB}$ и заданы координаты начала и конца вектора $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, тогда по определению проекций получаем: для того чтобы найти координаты вектора, необходимо из координат конца этого вектора вычесть координаты начала этого вектора, то есть

$$a_x = x_B - x_A,\ a_y = y_B - y_A. \tag{2.2}$$

Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется совокупность трех осей, пересекающихся в одной точке, и при этом каждая из этих осей перпендикулярна двум другим. Точка пересечения этих осей считается началом отсчета по каждой из них.

Оси принято обозначать *OX*, *OУ*, *OZ* и называть соответственно осями абсцисс, ординат и аппликат.

Причем плоскости, порождаемые тремя координатными осями, называют координатными плоскостями. Таким образом, прямоугольная декартова система координат обладает тремя координатными плоскостями: *XOУ*, *XOZ*, *УOZ*.

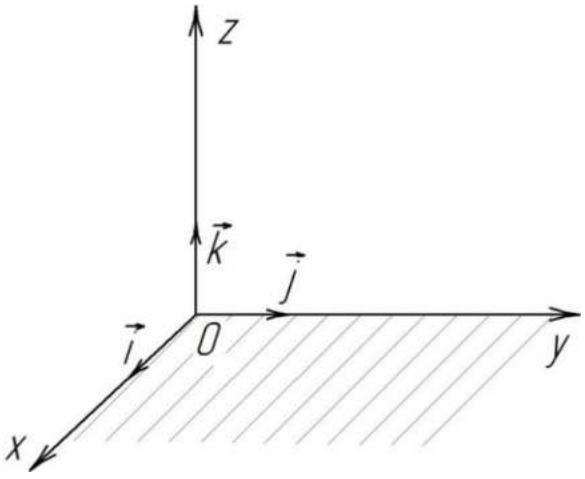


Рисунок 2.10 – Координатные орты

Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ единичные векторы, имеющие направления координатных осей (рисунок 2.10). Поскольку эти векторы перпендикулярны, их, так же как и в случае плоскости, называют координатными ортами.

Очевидно, векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ некомпланарны, поэтому, согласно теореме разложения, в пространстве для любого вектора $\bar{a}$ имеет место представление: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, где $a_x = np_{OX}\bar{a}$, $a_y = np_{OY}\bar{a}$, $a_z = np_{OZ}\bar{a}$.

Числа a_x, a_y, a_z называют координатами вектора $\bar{a}$, а разложение $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ записывают сокращенно $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, указывая только координаты вектора.

Как и в случае плоскости,

$$a_x = x_B - x_A,\ a_y = y_B - y_A,\ a_z = z_B - z_A, \tag{2.3}$$

если $\bar{a} = \overline{AB}$ и $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.

Поскольку плоскость является частью пространства, то ниже мы, в основном, рассматриваем случай пространства. При этом возникающие плоские векторы будем считать компланарными плоскости *XOY*. Это соответствует ситуации, когда рассматриваемые точки пространства имеют аппликаты, равные нулю.

В связи с этим зачастую точку пространства $M(x; y; 0)$ и точку плоскости $M(x; y)$ будем отождествлять, а плоский вектор $\bar{a} = (a_x; a_y)$ будем рассматривать как пространственный $\bar{a} = (a_x; a_y; 0)$.

2.4.3 Линейные операции над векторами в координатной форме

Линейные операции, осуществляемые над векторами, заданными своими координатами, выполняются покоординатно.

То есть, если $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, а λ, μ – вещественные числа, то

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} = \lambda(a_x; a_y; a_z) + \mu(b_x; b_y; b_z) = (\lambda a_x + \mu b_x; \lambda a_y + \mu b_y; \lambda a_z + \mu b_z). \tag{2.4}$$

И как следствие:

$$\bar{a}+\bar{b}=\left(a_x+b_x;\, a_y+b_y;\, a_z+b_z\right); \tag{2.4.1}$$

$$\bar{a}-\bar{b}=\left(a_x-b_x;\, a_y-b_y;\, a_z-b_z\right); \tag{2.4.2}$$

$$\lambda\cdot\bar{a}=\left(\lambda\cdot a_x;\, \lambda\cdot a_y;\, \lambda\cdot a_z\right). \tag{2.4.3}$$

Пример 2.2. Даны точки $P(3;-5;11)$, $G(7;13;-8)$, $K(-11;9;12)$. Найти координаты вектора $3\overline{PG}-4\overline{PK}$.

Решение. Найдём координаты векторов $\overline{PG}$ и $\overline{PK}$ по формуле (2.3):

$$\overline{PG}=(7-3;13-(-5);-8-11)=(4;18;-19);$$

$$\overline{PK}=(-11-3;9-(-5);12-11)=(-14;14;1).$$

Используем формулу (2.4.3) и найдём:

$$3\overline{PG}=3\cdot(4;18;-19)=(12;54;-57);$$

$$4\overline{PK}=4\cdot(-14;14;1)=(-56;56;4).$$

По формуле (2.4.2) окончательно получится

$$3\overline{PG}-4\overline{PK}=(12;54;-57)-(-56;56;4)=$$

$$=(12-(-56);54-56;-57-4)=(68;-2;-61).$$

Пример 2.3. Докажите, что векторы $\bar{a}=(1;3;-3)$, $\bar{p}=(1;-1;-1)$, $\bar{q}=(0;1;-1)$ образуют в пространстве базис и найдите в этом базисе разложение вектора $\bar{c}=2\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$.

Решение. 1. Чтобы доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ образуют в пространстве базис, применяем тот факт, что всякие три линейно независимых вектора образуют в пространстве базис.

Это значит, что равенство $\alpha\bar{a}+\beta\bar{p}+\gamma\bar{q}=\bar{O}$ возможно только при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Для проверки последнего условия, опираясь на формулу (2.4), подставим координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ в равенство $\alpha\bar{a}+\beta\bar{p}+\gamma\bar{q}=\bar{O}$ и получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ 3\alpha-\beta+\gamma=0, \\ -3\alpha-\beta-\gamma=0. \end{cases}$$

Система однородных линейных уравнений имеет тривиальное решение $\alpha=\beta=\gamma=0$, если главный определитель системы $\Delta\neq 0$.

Вспомним, что для вычисления определителя третьего порядка мы используем формулы (1.5) и (1.4):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}+0=\ 1(1+1)-1(-3+3)=2.$$

Так как $\Delta=2\neq 0$, значит векторы $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ образуют базис.

2. Разложим вектор $\bar{c}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, применяя формулу $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{p}+\gamma\bar{q}$. Чтобы найти коэффициенты разложения, снова применим формулу (2.4) и подставим координаты векторов $\bar{c}$, $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ в последнее равенство:

$$\begin{cases} \lambda+\mu=2, \\ 3\lambda-\mu+\gamma=-3, \\ -3\lambda-\mu-\gamma=5. \end{cases}$$

Решим полученную систему в соответствии с формулами Крамера. Определитель системы мы уже нашли в первом действии и он равен $\Delta=2\neq 0$.

Найдём вспомогательные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+0=\ 2(1+1)-1(3-5)=6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 0 = 1(3-5) - 2(-3+3) = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-5-3) - 1(15-9) + 2(-3-3) = -26.$$

По формулам (1.11) получится:

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$\mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-26}{2} = -13.$$

И разложение вектора $\bar{c}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ будет: $\bar{c} = 3\bar{a} - \bar{p} - 13\bar{q}$.

Выше мы отмечали, что $\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda\bar{b}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Отсюда, если $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$(a_x; a_y; a_z) = \lambda(b_x; b_y; b_z) = = (\lambda b_x; \lambda b_y; \lambda b_z).$$

В силу единственности проекций получаем:

$$a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z.$$

Иногда последние соотношения записывают в следующей форме и при этом называют условием коллинеарности векторов в координатной форме:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.5)$$

Пример 2.4. Найти значения λ и μ такие, чтобы векторы $\bar{c} = (8; -12; \mu)$ и $\bar{p} = (\lambda; 20; -15)$ были коллинеарными.

Решение. Применим формулу (2.5):

$$\frac{8}{\lambda} = \frac{-12}{20} = \frac{\mu}{-15}.$$

Отсюда получаем следующее:

$$\frac{8}{\lambda} = \frac{-12}{20};$$

$$\frac{-12}{20} = \frac{\mu}{-15}.$$

Решим данные равенства и получим:

$$\lambda = \frac{8 \cdot 20}{-12};$$

$$\lambda = -\frac{40}{3};$$

$$\mu = \frac{-12 \cdot (-15)}{20};$$

$$\mu = 9.$$

2.5 Скалярное произведение векторов

2.5.1 Определение скалярного произведения векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют число, которое равно произведению модулей заданных векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначают $\bar{a} \cdot \bar{b}$. Тогда по определению

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi \text{ или } \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\hat{\bar{a}, \bar{b}}). \qquad (2.6)$$

2.5.2 Механический смысл скалярного произведения

Как известно, работа по перемещению некоторой материальной точки вдоль прямой на расстояние s под действием силы $\overline{F}$, направленной под углом α к прямой, определяется по формуле $A = \left|\overline{F}\right| s\cos\alpha$.

Введем вектор перемещения $\overline{s}$ такой, что вектор $\overline{s}$ имеет направление перемещения, а его модуль есть расстояние, на которое перемещается точка: $\left|\overline{s}\right| = s$. Тогда, учитывая, что $\alpha = (\overline{F}, \overline{s})$, формуле для вычисления работы можно придать следующую форму:

$$A = \left|\overline{F}\right| s\cos\alpha = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{s}\right|\cos(\overline{F}, \overline{s}) = \overline{F}\cdot\overline{s}\,. \qquad (2.7)$$

Таким образом, скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения есть работа, осуществляемая этой силой при перемещении некоторой материальной точки вдоль прямой.

2.5.3 Свойства скалярного произведения

Свойство 1. Скалярное произведение переместительно: $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$.

Свойство 2. Имеют место соотношения $\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}$,

$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$.

Свойство 3. Скалярное произведение распределительно (или дистрибутивно) относительно сложения по каждому из аргументов:

$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c}$, $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}$.

Свойство 4. Скалярный множитель можно отнести к каждому сомножителю скалярного произведения, то есть:

$\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right)$.

Свойство 5. Скалярный квадрат всякого вектора равен квадрату его модуля, то есть: $\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2$.

Следствие 1. Скалярный квадрат всякого вектора неотрицателен и равен нулю только тогда, когда заданный вектор равен нулю.

Следствие 2. Модуль всякого вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата вектора, то есть $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Свойство 6. Два любых ненулевых вектора перпендикулярны (или ортогональны) тогда и только тогда, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0. \tag{2.8}$$

Из определения и вышеперечисленных свойств скалярного произведения следуют формулы:

1) вычисления косинуса угла между заданными векторами:

$$\cos\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}; \tag{2.9}$$

2) вычисления проекции одного вектора на другой:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}. \tag{2.10}$$

2.5.4 Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть два вектора заданы своими координатами:

$$\bar{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right);\ \bar{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right).$$

Тогда справедлива формула

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.11}$$

Из этой формулы вытекает, что если

$$\bar{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right);\ \bar{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right), \text{ то:}$$

1. Модуль (длина) вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.12}$$

2. Если две точки заданы координатами $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$; $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$, то расстояние между ними можно определить по формуле

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}. \tag{2.13}$$

Пример 2.5. Даны точки $A(8;-6;-11)$; $M(9;-13;-8)$; $B(11;-9;12)$. Найти скалярное произведение векторов $\overline{AM}\cdot\overline{AB}$.

Решение. Найдём координаты векторов $\overline{AM}$ и $\overline{AB}$ (формула (2.3)).

$$\overline{AM}=(1;-7;3);\ \overline{AB}=(3;-3;23).$$

Чтобы найти скалярное произведение векторов, воспользуемся формулой (2.11):

$$\overline{AM}\cdot\overline{AB}=1\cdot 3+(-7)\cdot(-3)+3\cdot 23=93.$$

Пример 2.6. Вычислить проекцию вектора $3\bar{a}-2\bar{b}$ на вектор $\overline{BC}$, если $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$, $B(5;-4;3)$, $C(2;-2;4)$.

Решение. Для решения примера мы воспользуемся формулой (2.10).

Перепишем её для наших векторов:

$$np_{\overline{BC}}(3\bar{a}-2\bar{b})=\frac{(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|}.$$

Сначала определим координаты векторов (см. пример 2.2):

$$3\bar{a}-2\bar{b}=(10;-9;7)\ \text{и}\ \overline{BC}=(-3;2;1).$$

После чего найдем скалярное произведение (см. формулу (2.11)):

$$(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot\overline{BC}=10\cdot(-3)+(-9)\cdot 2+7\cdot 1=-41.$$

Дальше найдем модуль вектора $\overline{BC}$ по формуле (2.12):

$$|\overline{BC}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}.$$

Окончательно получится:

$$np_{\overline{BC}}(3\bar{a}-2\bar{b})=\frac{(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|}=-\frac{41}{\sqrt{14}}.$$

Пример 2.7. Определить значение y, при котором векторы $\bar{a}=(10;-4;1)$ и $\bar{b}=(y;6;-2)$ будут перпендикулярными.

Решение. Для определения значения y воспользуемся формулой (2.8): $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Вычислим скалярное произведение векторов по формуле (2.11):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 10 \cdot y + (-4) \cdot 6 + 1 \cdot (-2) = 10y - 26.$$

Приравняем последнее выражение нулю и получим:

$$10y - 26 = 0 \text{ или } \quad y = 2{,}6.$$

Пример 2.8. Найти работу силы $\bar{F} = (2; -5; 8)$ по прямолинейному перемещению материальной точки из положения $M(3; -7; 5)$ в положение $K(5; -6; 2)$.

Решение. Работа силы вычисляется по формуле (2.7): $A = \bar{F} \cdot \bar{s}$, где

$$\bar{s} = \overline{MK} = (2; 1; -3).$$

Тогда по формуле (2.11) работа силы $\bar{F}$ будет:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 + 8 \cdot (-3) = -25.$$

Пример 2.9. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(2; -4; 7)$, $B(1; -3; 4)$ и $C(-3; 2; -1)$. Найти внутренний угол B.

Решение. Внутренний угол B треугольника ABC рассмотрим как угол между векторами, выходящими из вершины B, то есть $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ (рисунок 2.11).

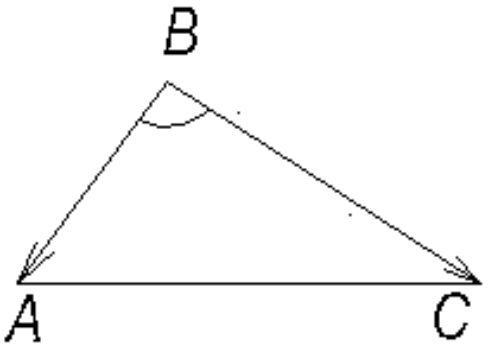


Рисунок 2.11 – Треугольник к примеру 2.9

Дальше используем формулу (2.9) и получим:

$$\cos\angle B = \cos\left(\overline{BA}, \overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}.$$

Найдём координаты векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ по формуле (2.3):

$$\overline{BA} = (1;-1;3);\ \overline{BC} = (-4;5;-5).$$

Скалярное произведение найдём по формуле (2.11):

$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = 1\cdot(-4)+(-1)\cdot 5+3\cdot(-5) = -24.$$

Длины векторов найдём по формуле (2.12):

$$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11},\ \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2+5^2+(-5)^2} = \sqrt{66}.$$

Таким образом,

$$\cos\angle B = \cos\left(\overline{BA}, \overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{-24}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{66}} =$$

$$= \frac{-24}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-24}{11\cdot\sqrt{6}} = \frac{-24\cdot\sqrt{6}}{11\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{24\sqrt{6}}{11\cdot 6} = -\frac{4\sqrt{6}}{11}.$$

Тогда

$$\angle B = \arccos\left(-\frac{4\sqrt{6}}{11}\right)$$

или

$$\angle B = \pi - \arccos\frac{4\sqrt{6}}{11}\ .$$

2.5.5 Направляющие косинусы вектора

Воспользуемся определением скалярного произведения векторов, из которого следует, что для ненулевых векторов угол между ними может быть определен с помощью формулы

$$\cos\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

В том случае, когда векторы заданы своими координатами, эта формула может быть уточнена:

$$\cos\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

где

$$\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right),\ \overline{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right).$$

Обозначим через α, β, γ углы, образуемые вектором $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ с осями координат (рисунок 2.12).

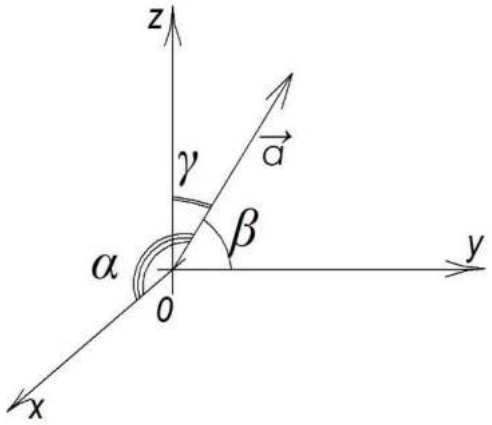


Рисунок 2.12 – Направляющие косинусы вектора

Ясно, что $\alpha = \left(\overline{a}, \overline{i}\right)$, $\beta = \left(\overline{a}, \overline{j}\right)$, $\gamma = \left(\overline{a}, \overline{k}\right)$, а орты имеют следующие координаты: $\overline{i} = \left(1; 0; 0\right)$, $\overline{j} = \left(0; 1; 0\right)$, $\overline{k} = \left(0; 0; 1\right)$.

Тогда согласно приведенной выше формуле получим:

$$\cos\alpha = \cos\left(\overline{a}, \overline{i}\right) = \frac{a_x \cdot 1 + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot 1} = \frac{a_x}{|\overline{a}|};$$

$$\cos\beta = \cos\left(\overline{a}, \overline{j}\right) = \frac{a_x \cdot 0 + a_y \cdot 1 + a_z \cdot 0}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot 1} = \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \qquad (2.14)$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\overline{a}, \overline{k}\right) = \frac{a_x \cdot 0 + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot 1} = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

Нетрудно видеть, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Это означает, что вектор $\overline{a}_0 = \left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$ имеет единичную длину и направление вектора $\overline{a}$.

В связи с этим координаты вектора $\bar{a}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ называют направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Пример 2.10. Найти направление вектора $\bar{m} = 8\bar{k} - 6\bar{i}$.

Решение. Вектор $\bar{m}$ задан в виде разложения по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, тогда координаты вектора $\bar{m} = (-6; 0; 8)$.

Направление вектора однозначно определяется направляющими косинусами (2.14):

$$\cos\alpha = \frac{m_x}{|\bar{m}|},\ \cos\beta = \frac{m_y}{|\bar{m}|},\ \cos\gamma = \frac{m_z}{|\bar{m}|}.$$

Найдем сначала длину (или модуль) вектора $\bar{m}$ по формуле (2.12):

$$|\bar{m}| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Тогда направление вектора $\bar{m}$ однозначно определяется косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{-6}{10} = -0{,}6,\ \cos\beta = \frac{0}{10} = 0,\ \cos\gamma = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

2.6 Векторное произведение векторов

2.6.1 Определение векторного произведения

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны. Перемещая эти векторы параллельно самим себе, добьемся того, чтобы их начала совпали. Если кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ из конца вектора $\bar{c}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рисунок 2.13), то в таком случае говорят, что в указанном порядке векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку.

В противном же случае говорят, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ левая.

Определение. Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют новый вектор $\bar{a} \times \bar{b}$, который подчиняется следующим условиям:

1) модуль, то есть длина этого вектора, численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) вектор произведения $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярен каждому из сомножителей, то есть: $\bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{a}$, $\bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{b}$;

3) исходные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ в указанном порядке образуют правую тройку.

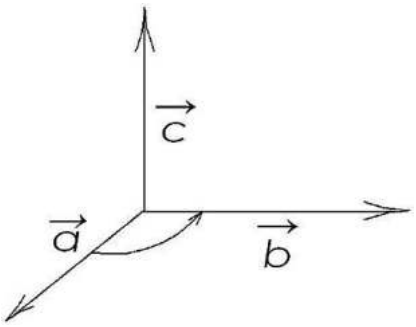


Рисунок 2.13 – Правая тройка векторов

С учётом формулы площади параллелограмма, можно записать модуль (длину) векторного произведения:

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a},\bar{b}\right). \qquad (2.15)$$

2.6.2 Свойства векторного произведения

Свойство 1. Векторное произведение является антиперестановочным, то есть: $\bar{a}\times\bar{b}=\ -\bar{b}\times\bar{a}$.

Свойство 2. Скалярный множитель можно отнести к каждому сомножителю векторного произведения: $\lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\left(\lambda\bar{a}\right)\times\bar{b}=\bar{a}\times\left(\lambda\bar{b}\right)$.

Свойство 3. Векторное произведение распределительно по каждому из аргументов: $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$.

2.6.3 Векторное произведение векторов, заданных в координатной форме

Если $\bar{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то имеет место формула

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.11. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}=3\bar{j}-2\bar{i}+\bar{k}$ и $\overline{AB}$, если $A(2;-4;7)$, $B(5;-8;4)$.

Решение. Вначале вычислим координаты векторов:

$$\bar{a}=(-2;3;1),\ \overline{AB}=(3;-4;-3).$$

Далее воспользуемся формулой (2.16):

$$\bar{a}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\overset{+}{\bar{i}} & \overset{-}{\bar{j}} & \overset{+}{\bar{k}}\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -4 & -3\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}\overset{+}{3} & \overset{-}{1}\\ -4 & -3\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}\overset{+}{-2} & \overset{-}{1}\\ 3 & -3\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}\overset{+}{-2} & \overset{-}{3}\\ 3 & -4\end{vmatrix}=$$
$$=\bar{i}\cdot(-9+4)-\bar{j}\cdot(6-3)+\bar{k}\cdot(8-9)=-5\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k}$$

или

$$\bar{a}\times\overline{AB}=(-5;-3;-1).$$

2.6.4 Механический смысл векторного произведения

Пусть в точке A пространства приложена сила $\bar{F}$ и пусть O некоторая другая точка пространства. Отметим, что здесь $\bar{F}$ рассматривается как радиус-вектор с фиксированной точкой приложения. В механике (часть физики) вводится следующее понятие, используемое для описания свойств твердого тела.

Определение. Моментом силы $\bar{F}$ относительно точки O называют вектор $\bar{M}$, который определяется условиями:

1) вектор $\bar{M}$ должен быть перпендикулярен плоскости, в которой лежат точка O и вектор $\bar{F}$;

2) векторы $\bar{M}$, $\overline{OA}$, $\bar{F}$ в указанном порядке образуют правую тройку;

3) модуль вектора $\bar{M}$ есть произведение модуля силы на плечо:

$$|\bar{M}|=|\bar{F}|\cdot|\overline{OA}|\cdot\sin\varphi=|\bar{F}|\cdot|\overline{OA}|\cdot\sin\left(\bar{F},\overset{\wedge}{\overline{OA}}\right).$$

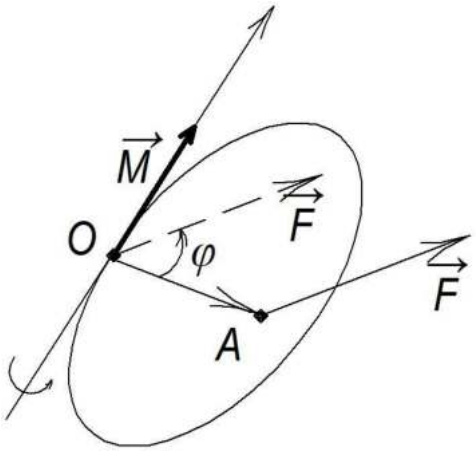


Рисунок 2.14 – Момент силы

В соответствии с определением векторного произведения можно сделать вывод, что момент силы $\overline{F}$, приложенной в точке A относительно точки O, это и есть векторное произведение радиус-вектора точки A на вектор силы:

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}\,. \tag{2.17}$$

Пример 2.12. Пусть некоторая сила $\overline{F} = (2; -5; 3)$ приложена к точке $A(3; -2; 4)$. Найти момент заданной силы относительно точки $C(4; -4; 7)$.

Решение. В соответствии с формулой (2.17) момент силы $\overline{F}$ относительно точки C можно вычислить следующим образом:

$$\overline{M} = \overline{CA} \times \overline{F}\,,$$

где $\overline{CA} = (-1; 2; -3)$ – по формуле (2.3).

Далее получаем

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i} \cdot (6-15) - \overline{j} \cdot (-3+6) + \overline{k} \cdot (5-4) = -9\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}\,.$$

Найдем величину момента силы по формуле (2.12):

$$|\overline{M}| = \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{91}\,.$$

2.6.5 Основные приложения векторного произведения

Непосредственно из определения векторного произведения векторов следует:

1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна:

$$S_{\text{пар}} = |\bar{a} \times \bar{b}|; \tag{2.18}$$

2) площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|. \tag{2.19}$$

Пример 2.13. Точки $A(2;-3;4)$, $B(-3;5;-2)$ и $C(3;-6;7)$ являются вершинами треугольника. Вычислить его площадь.

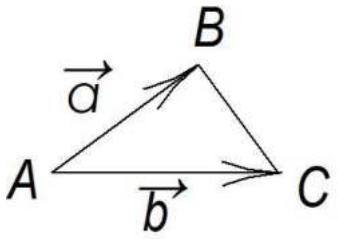


Рисунок 2.15 – Площадь треугольника

Решение. Площадь треугольника вычисляется по формуле (2.19):

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|,$$

где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ − векторы, на которых построен треугольник (рисунок 2.15). В нашем случае $\bar{a} = \overline{AB} = (-5;8;-6)$, $\bar{b} = \overline{AC} = (1;-3;3)$.

Значит, формулу можно переписать в виде:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Найдём векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\bar{i}} & \overset{-}{\bar{j}} & \overset{+}{\bar{k}} \\ -5 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{8} & \overset{-}{-6} \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{-5} & \overset{-}{-6} \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} \overset{+}{-5} & \overset{-}{8} \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot (24-18) - \bar{j} \cdot (-15+6) + \bar{k} \cdot (15-8) = 6\bar{i} + 9\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Модуль векторного произведения вычислим по формуле (2.12):

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{6^2+9^2+7^2}=\sqrt{166}.$$

Таким образом, $S_{\text{треуг}}=\dfrac{\sqrt{166}}{2}$ (усл. кв. ед.).

2.7 Смешанное произведение векторов

2.7.1 Определение смешанного произведения векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называют число, определяемое формулой $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$.

2.7.2 Свойства смешанного произведения векторов

Свойство 1. В смешанном произведении порядок выполнения скалярного и векторного умножения можно менять местами, соблюдая при этом порядок следования векторов: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

Свойство 2. Скалярный множитель можно относить к любому сомножителю смешанного произведения:

$\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)=\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\lambda\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\left(\lambda\bar{c}\right)$.

Свойство 3. Смешанное произведение распределительно относительно сложения векторов по любому аргументу:

$\left(\bar{a}_1+\bar{a}_2\right)\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\ \ \bar{a}_1\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}_2\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$; $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}_1+\bar{b}_2\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}_1\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{b}_2\cdot\bar{c}$;

$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\left(\bar{c}_1+\bar{c}_2\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}_1+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}_2$.

Свойство 4. При перестановке двух рядом стоящих сомножителей смешанного произведения его знак меняется на противоположный:

$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b}$.

Свойство 5. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}$.

Свойство 6. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$.

2.7.3 Смешанное произведение векторов в координатной форме

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\bar{c}=(c_x;c_y;c_z)$ то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.20)$$

2.7.4 Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Переместим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ параллельно самим себе так, чтобы их начала совпали (рисунок 2.16).

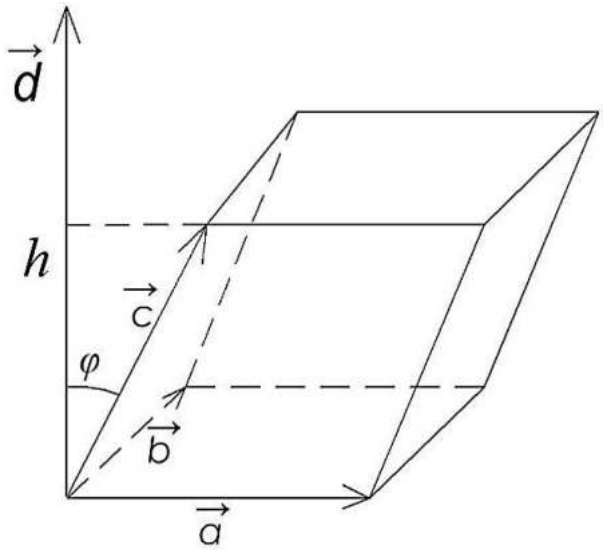


Рисунок 2.16 – Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Достроим чертеж до параллелепипеда, проведя через конец каждого из векторов плоскость, параллельную двум другим векторам.

Пусть для определенности векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку. Тогда угол $\varphi=(\widehat{\bar{d},\bar{c}})$, образуемый векторным произведением $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$ и вектором $\bar{c}$, является острым.

Воспользуемся определением скалярного произведения и представим смешанное произведение в виде $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\varphi$. По определению модуль векторного произведения – это площадь параллелограмма, построенного на соответствующих векторах: $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=S_{\bar{a},\bar{b}}$. Но $\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\varphi$, как нетрудно видеть (рисунок 2.14), есть высота параллелепипеда, опущенная из конца вектора $\bar{c}$ на грань параллелепипеда, образованную векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Таким образом, получаем $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\varphi=$ $=S_{\bar{a},\bar{b}}\cdot h=V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$ − объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ описанным выше способом.

Заметим, что если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ − левая, то угол $\varphi=\left(\bar{d}\hat{,}\bar{c}\right)$ будет тупым, поэтому $\cos\varphi<0$ и, повторяя проведенные выше рассуждения, получим $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$.

Таким образом, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\pm V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$, причем случай верхнего знака соответствует ситуации, когда тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ − правая, а случай нижнего знака – ситуации, когда тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ − левая.

Ясно, что в общем случае модуль векторного произведения есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|=V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}.$$

2.7.5 Основные приложения смешанного произведения векторов

Из определения и геометрического смысла смешанного произведения векторов вытекают следующие условия и формулы:

1) условие компланарности векторов:

ненулевые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0; \tag{2.21}$$

2) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен:

$$V_{\text{пар-да}}=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|; \tag{2.22}$$

3) объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен:

$$V_{\text{приз}} = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|; \tag{2.23}$$

4) объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|. \tag{2.24}$$

Пример 2.14. Принадлежат ли точки $M(2;3;-4)$, $N(7;4;-2)$, $P(5;6;-7)$ и $Q(4;7;-5)$ одной плоскости?

Решение. Точки *M*, *N*, *P* и *Q* принадлежат одной плоскости, если векторы $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ будут компланарны.

Найдём координаты векторов по формуле (2.3):

$$\overline{MN} = (5;1;2);$$

$$\overline{MP} = (3;3;-3);$$

$$\overline{MQ} = (2;4;-1).$$

Проверим условие компланарности векторов (2.21). Для этого найдём смешанное произведение векторов $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ по формуле (2.20):

$$\overline{MN}\cdot\overline{MP}\cdot\overline{MQ} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-3+12) - 1(-3+6) + 2(12-6) = 54.$$

Так как $\overline{MN}\cdot\overline{MP}\cdot\overline{MQ} = 54 \neq 0$, то векторы $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ не компланарны. Значит точки *M*, *N*, *P* и *Q* не лежат в одной плоскости.

Пример 2.15. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(3;-2;5)$, $B(2;3;-1)$, $C(4;-5;3)$ и $D(1;-1;7)$.

Решение. Объем пирамиды $ABCD$, построенной на трех некомпланарных векторах $\overline{AB}=(-1;5;-6)$, $\overline{AC}=(1;-3;-2)$ и $\overline{AD}=(-2;1;2)$, найдем по формуле (2.24):

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|,$$

где $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 5 & -6\\ 1 & -3 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}+(-6)\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$

$$=-1(-6+2)-5(2-4)-6(1-6)=44.$$

Тогда $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\cdot 44=\frac{22}{3}$ (усл. куб. ед).

2.8. Расчет некоторых показателей в инженерных задачах

Приведем несколько примеров расчета различных показателей с помощью средств векторной алгебры.

Пример 2.16. Найти показание ваттметра при заданных величинах напряжения и тока, если $\left|\overline{U}\right|=20\,B$, $\left|\overline{I}\right|=14\,A$, а угол между векторами, задающими направления напряжения и тока, равен 60°.

Решение. Показание ваттметра равно произведению напряжения на зажимах его параллельной цепи, тока его последовательной обмотки и косинуса угла между векторами, задающими направления напряжения и тока. Другими словами, показание ваттметра равно скалярному произведению векторов, задающих соответствующие напряжение и ток.

В нашем случае

$$P=\overline{U}\cdot\overline{I}=\left|\overline{U}\right|\cdot\left|\overline{I}\right|\cdot\cos\varphi.$$

Тогда искомые показания ваттметра будут:

$$P=20\cdot 14\cdot\cos 60^{\circ}=140\,Bm.$$

Пример 2.17. Определить величину силы, с которой магнитное поле с магнитной индукцией $\overline{B}$ действует на элемент проводника $\overline{dl}$ с током $\overline{I}$, если $\left|\overline{I}\right| = 100\ A$, $\left|\overline{B}\right| = 1{,}3\ Тл$, $\left|\overline{dl}\right| = 0{,}04\ м$, угол между векторами, задающими направления магнитной индукции и тока в проводнике, равен 30°.

Решение. По закону Ампера сила, с которой магнитное поле действует на проводник с током, представляет собой векторное произведение:

$$\overline{F} = \left|\overline{I}\right| \cdot \left(\overline{B} \times \overline{dl}\right).$$

Величину этой силы найдём по формуле (2.15):

$$\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{I}\right| \cdot \left|\overline{B}\right| \cdot \left|\overline{dl}\right| \cdot \sin\left(\overline{B}, \overline{dl}\right) = 100 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}04 \cdot \sin 30^{\circ} = 2{,}6\ H.$$

Пример 2.18. Найти ЭДС по заданным векторам магнитной индукции $\overline{B} = (-1; 4; -1)$, элемента проводника $\overline{dl} = (3; 2; -1)$ и скорости перемещения проводника относительно внешнего магнитного поля $\overline{v} = (-1; 4; -2)$.

Решение. Если элемент проводника $\overline{dl}$ будет двигаться со скоростью $\overline{v}$ в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $\overline{B}$, то на этой длине проводника создаётся ЭДС электромагнитной индукции, которое можно определить как смешанное произведение векторов:

$$d\varepsilon_i = \overline{B} \cdot \overline{dl} \cdot \overline{v}.$$

Тогда по формуле (2.20) получим:

$$d\varepsilon_i = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-4+4) - 4(-6-1) - 1(12+2) = 14\ B.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правила, по которым складывают и вычитают векторы.
2. Дайте определение базиса.
3. Приведите формулу вычисления координат вектора, если вам известны координаты его начала и конца.
4. Сформулируйте условие коллинеарности двух заданных векторов.
5. Приведите определение скалярного произведения двух векторов.
6. Какие свойства скалярного произведения векторов вам известны?
7. Что такое правая и левая тройка векторов?
8. Приведите формулу, по которой можно найти угол между векторами.
9. Сформулируйте определение векторного произведения двух векторов.
10. Как вы понимаете механический смысл векторного произведения векторов?
11. Как найти площадь треугольника, построенного на двух заданных векторах?
12. Сформулируйте определение смешанного произведения трех векторов.
13. Как найти объем треугольной призмы, построенной на трех заданных векторах?
14. Сформулируйте условие компланарности векторов.

ГЛАВА 3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Простейшими геометрическими объектами в пространстве являются прямая и плоскость. Это неопределяемые геометрические объекты, для которых имеются лишь различные описания. Для каждого из этих описаний могут быть получены соответствующие уравнения.

3.1 Плоскость в пространстве

3.1.1 Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору

Ясно, что через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ можно провести одну и только одну плоскость перпендикулярно данному вектору $\bar{n} = (A; B; C) \neq \bar{O}$. Выберем переменную точку $M(x; y; z)$. Эта точка будет текущей точкой плоскости тогда и только тогда, когда $\bar{n} \perp \overline{M_0M}$ (рисунок 3.1), то есть, когда $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Поскольку по формуле (2.3) $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, то искомое уравнение будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.1)$$

Вектор $\bar{n} = (A; B; C) \neq \bar{O}$, перпендикулярный плоскости, называют вектором-нормалью этой плоскости. Ясно, что вектор-нормаль плоскости определяется с точностью до коллинеарности.

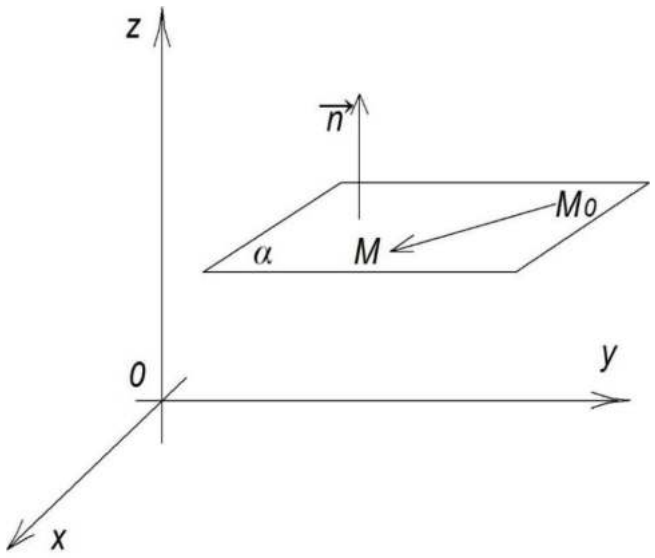


Рисунок 3.1 – Плоскость, проходящая через заданную точку перпендикулярно данному вектору

3.1.2 Общее уравнение плоскости

Уравнение плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, полученное выше, можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{3.2}$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Поскольку для каждой плоскости можно указать вектор-нормаль и точку, через которую она проходит, уравнение любой плоскости может быть записано в виде (3.2). Оказывается, что и обратно, любому уравнению вида $Ax+By+Cz+D=0$ соответствует единственная плоскость, для которой выписанное равенство является уравнением.

В самом деле, если имеется уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, то хотя бы один из коэффициентов A, B или C не равен нулю. Пусть, например, $A\neq 0$. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(-\frac{D}{A};0;0\right)$, перпендикулярно вектору $\bar{n}=(A;B;C)$:

$$A\left(x-\left(-\frac{D}{A}\right)\right)+B(y-0)+C(z-0)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0.$$

Таким образом, уравнение любой плоскости можно записать в виде $Ax+By+Cz+D=0$ и каждому такому уравнению соответствует единственная плоскость, для которой $Ax+By+Cz+D=0$ есть её уравнение. В связи с этим уравнение (3.2) называют общим уравнением плоскости.

Отметим, что коэффициенты перед текущими переменными в общем уравнении плоскости есть координаты вектора-нормали $\bar{n}=(A;B;C)$.

3.1.3 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Из курса геометрии мы знаем, что через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость.

Пусть $M(x; y; z)$ – переменная точка пространства. Ясно, что она является текущей точкой плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ компланарны (рисунок 3.2). Это означает, что их смешанное произведение $\overline{MM_1} \cdot \overline{M_2M_1} \cdot \overline{M_3M_1} = 0$.

Поскольку

$$\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$
$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),$$

то

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.3)$$

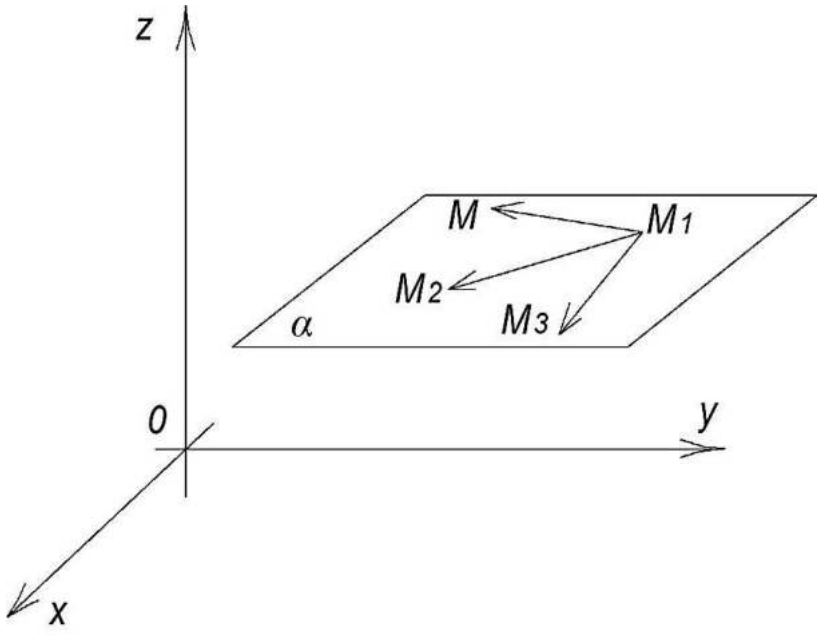


Рисунок 3.2 – Плоскость, проходящая через три данные точки

3.1.4 Взаимное расположение плоскостей

Плоскости в пространстве могут пересекаться, определяя прямую линию, совпадать или быть параллельными. В двух последних случаях будем считать, что угол между плоскостями равен нулю, а в первом случае углом между плоскостями будем понимать двугранный угол, образуемый этими плоскостями. Поскольку двугранные углы измеряются при помощи линейных углов, то угол между плоскостями равен углу, образуемому нормалями этих плоскостей (рисунок 3.3).

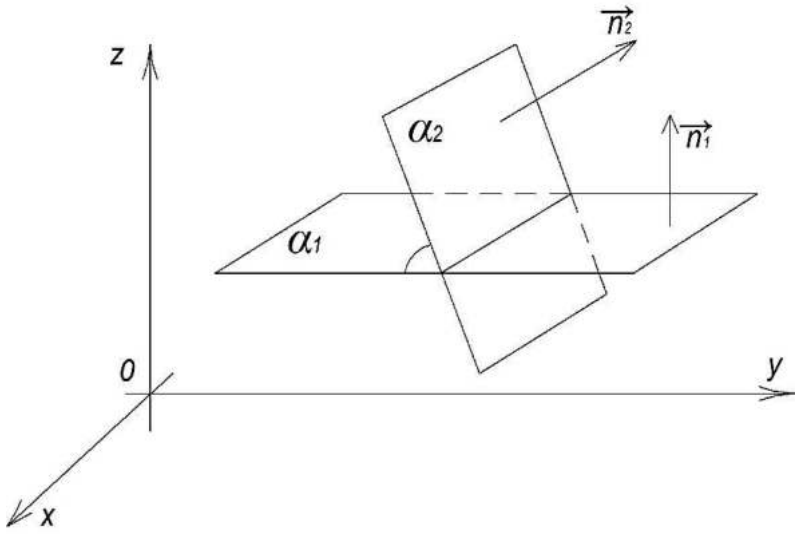


Рисунок 3.3 – Угол между плоскостями

Предположим, что плоскости заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, тогда векторы $\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ есть нормали этих плоскостей. А угол между плоскостями может быть найден по формулам:

$$\cos(\bar{n}_1,\hat{\bar{n}}_2)=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}\Leftrightarrow\quad\cos(\bar{n}_1,\hat{\bar{n}}_2)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

В частности, плоскости параллельны тогда и только тогда, когда

$$\bar{n}_1\,||\,\bar{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 3.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2;-3;5)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $3x+7y-2z+8=0.$

Решение. Уравнение плоскости будем искать по формуле (3.1):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Используя формулу (3.2), из уравнения заданной плоскости α_1 найдём координаты её нормального вектора, как коэффициенты при *x*, *y* и *z* в уравнении $3x+7y-2z+8=0 \Rightarrow \bar{n}_1=(3;7;-2).$

Так как плоскости параллельны, то этот вектор можно выбрать нормальным и для плоскости α_2 (рисунок 3.4). То есть $\bar{n}_2=\bar{n}_1=(3;7;-2).$

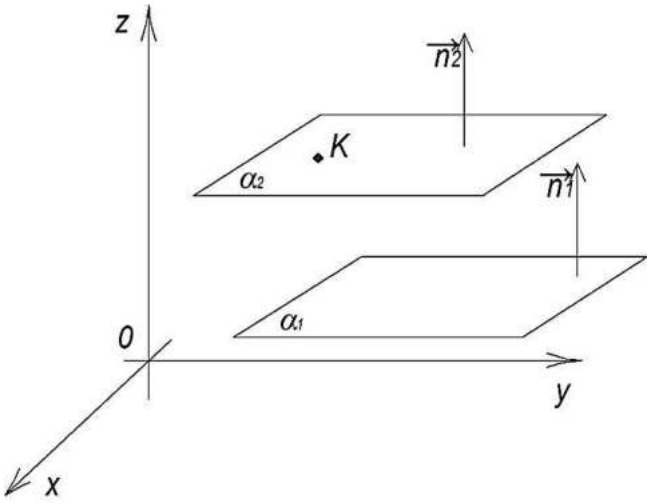


Рисунок 3.4 – Параллельные плоскости

Теперь в уравнение (3.1) вместо *A*, *B* и *C* подставим координаты вектора $\bar{n}_2=(3;7;-2)$, а в качестве x_0, y_0, z_0 возьмём координаты заданной точки $K(2;-3;5)$:

$$3(x-2)+7(y-(-3))-2(z-5)=0,$$

$$3x-6+7y+21-2z+10=0$$

или

$$3x+7y-2z+25=0.$$

Пример 3.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;4;-6)$, $N(3;8;-3)$ и $P(5;7;-5)$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в виде (3.3):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+6 \\ 3-2 & 8-4 & -3+6 \\ 5-2 & 7-4 & -5+6 \end{vmatrix} = 0.$$

Найдём сначала определитель, стоящий в левой части уравнения:

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+6 \\ 3-2 & 8-4 & -3+6 \\ 5-2 & 7-4 & -5+6 \end{vmatrix}} = \overset{+}{\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = (x-2)\cdot \overset{+}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} - (y-4)\cdot \overset{+}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} +$$

$$+(z+6)\cdot \overset{+}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = (x-2)(4-9)-(y-4)(1-9)+(z+6)(3-12) =$$

$$= -5(x-2)+8(y-4)-9(z+6) = -5x+8y-9z-58.$$

Тогда искомое уравнение плоскости будет:

$$-5x+8y-9z-58=0$$

или

$$5x-8y+9z+58=0.$$

Замечание. Если известны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которые параллельны плоскости и не коллинеарны между собой, то нормальный вектор плоскости равен:

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}. \tag{3.4}$$

Пример 3.3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(2;3;-1)$ и $M_2(5;0;1)$ параллельно вектору $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в виде (3.1):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где вектор $\bar{n} = (A;B;C)$ – вектор нормали нашей плоскости, который мы найдём по формуле (3.4).

В качестве вектора $\bar{b}$ возьмём вектор $\overline{M_1M_2}$, который лежит на плоскости (рисунок 3.5).

Найдём координаты вектора $\overline{M_1M_2}=(5-2;0-3;1-(-1))=(3;-3;2)$.
Тогда по формуле (2.16):

$$\bar{n}=\bar{a}\times\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\overset{+}{\bar{i}} & \overset{-}{\bar{j}} & \overset{+}{\bar{k}}\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -3 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}\overset{+}{4} & \overset{-}{-3}\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}\overset{+}{2} & \overset{-}{-3}\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}\overset{+}{2} & \overset{-}{4}\\ 3 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(8-9)-\bar{j}\cdot(4+9)+\bar{k}\cdot(-6-12)=-\bar{i}-13\bar{j}-18\bar{k}\ \Rightarrow\ \bar{n}=(-1;-13;-18).$$

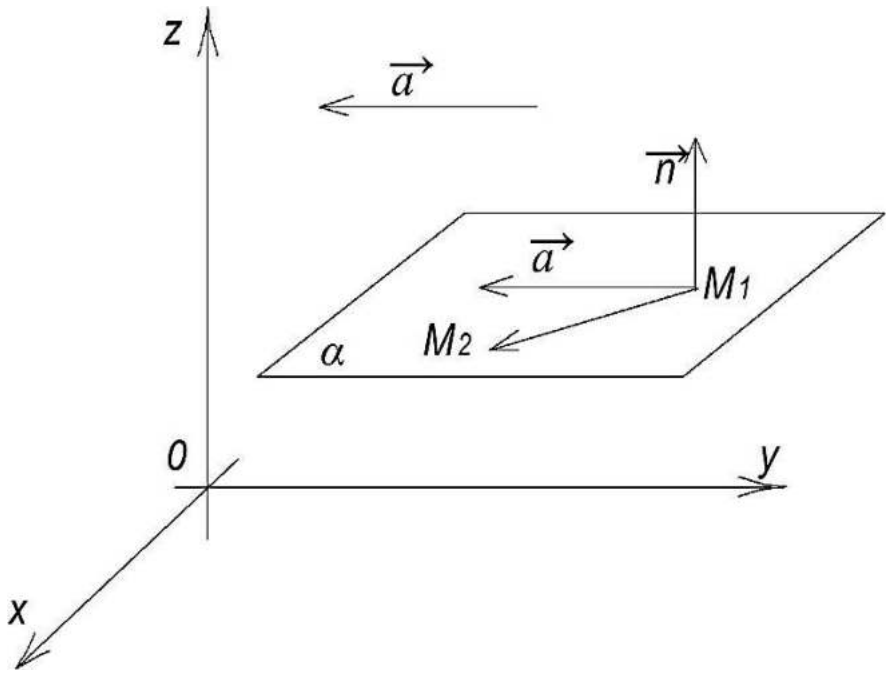


Рисунок 3.5 – Иллюстрация к примеру 3.3

Теперь в уравнение (3.1) вместо A, B и C подставим координаты вектора $\bar{n}=(-1;-13;-18)$, а в качестве x_0, y_0, z_0 возьмём координаты любой из заданных точек, например, $M_1(2;3;-1)$:

$$-1(x-2)-13(y-3)-18(z-(-1))=0;$$

$$-x+2-13y+39-18z-18=0;$$

$$-x-13y-18z+23=0;$$

$$x+13y+18z-23=0.$$

3.2 Прямая в пространстве

3.2.1 Параметрические уравнения прямой

Направляющим вектором прямой называют всякий ненулевой вектор, коллинеарный прямой. Предположим, что прямая задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{v}$.

Пусть $M(x; y; z)$ – текущая точка прямой. Тогда вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен направляющему вектору $\bar{v} = (l; m; n)$ (рисунок 3.6). Это означает, что $\overline{M_0M} = t\bar{v}$, где t произвольное число, называемое параметром.

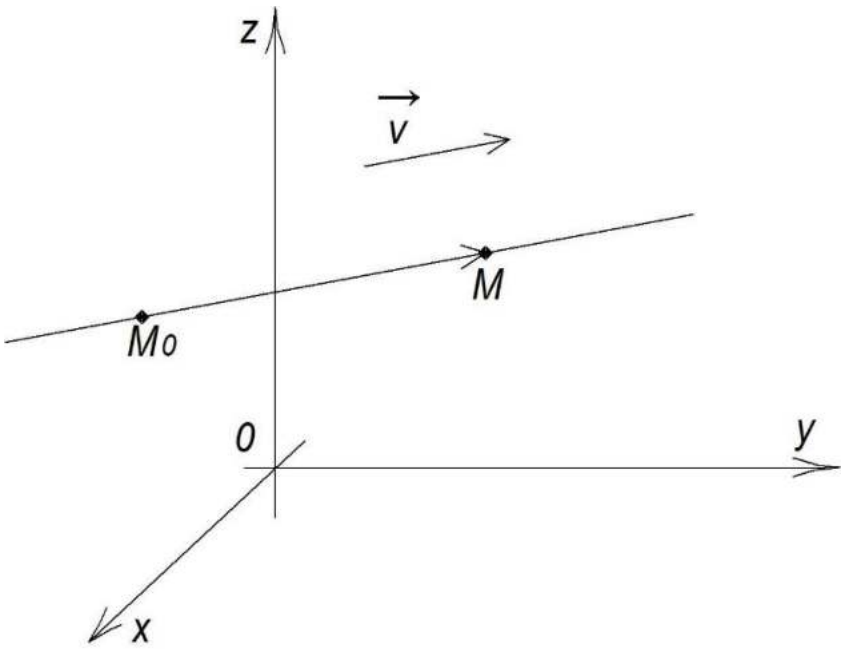


Рисунок 3.6 – Прямая, проходящая через заданную точку с данным направляющим вектором

Записывая равенство $\overline{M_0M} = t\bar{v} \Leftrightarrow (x - x_0; y - y_0; z - z_0) = t(l; m; n)$ покоординатно, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2.2 Канонические уравнения прямой

Рассмотрим ситуацию, когда прямая задана точкой и направляющим вектором. Воспользуемся ранее рассмотренными параметрическими уравнениями прямой.

Исключив параметр, получим

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{3.6}$$

Эти уравнения прямой также называют каноническими уравнениями.

Замечание. В последних уравнениях, вообще говоря, может быть, что одна или две из координат направляющего вектора будут равными нулю.

В таком случае равенства $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ следует понимать как «символические», означающие, что параметрические уравнения рассматриваемой прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

3.2.3 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Рассмотрим теперь случай, когда прямая задана двумя разными точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, через которые она проходит (рисунок 3.7).

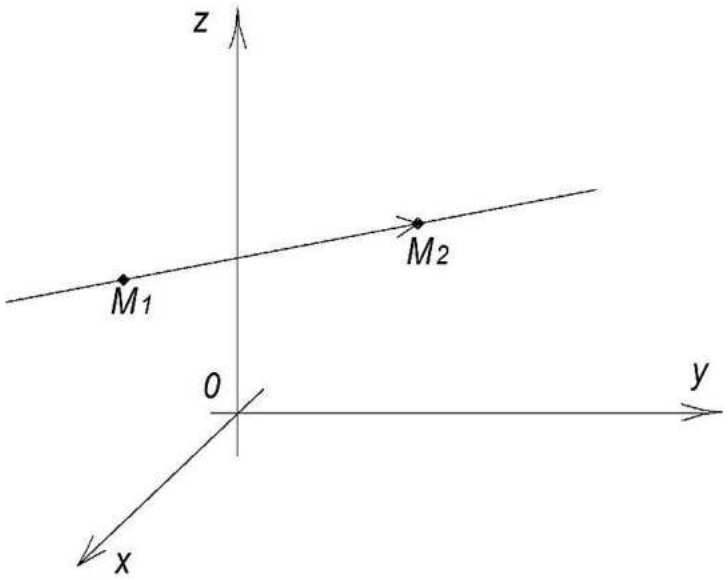


Рисунок 3.7 – Прямая, проходящая через две данные точки

Запишем канонические уравнения этой прямой (3.5), полагая $M_0 = M_1(x_1; y_1; z_1)$, $\bar{v} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Тогда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3.7)$$

Пример 3.4. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $K(-3; 4; -8)$ перпендикулярно плоскости, которая задана уравнением $5x - 3y + 12 = 0$.

Решение. Используем канонические уравнения (формула (3.6)):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где $\bar{v} = (l; m; n)$ – направляющий вектор прямой,

а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, лежащая на прямой.

Пользуясь формулой (3.2), из заданного уравнения плоскости α найдём координаты её нормального вектора, как коэффициенты при x, y и z в уравнении $5x - 3y + 12 = 0 \Rightarrow \bar{n} = (5; -3; 0)$.

Поскольку прямая параллельна заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора прямой выберем нормальный вектор плоскости α (рисунок 3.8).

То есть $\bar{v} = \bar{n} = (5; -3; 0)$.

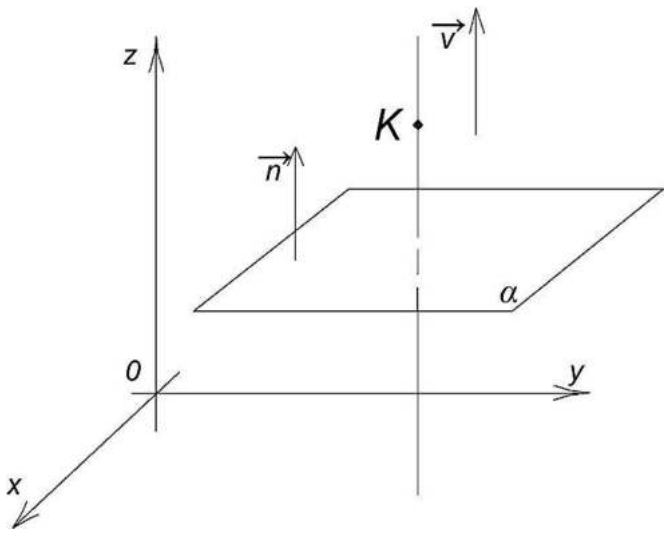


Рисунок 3.8 – Прямая, перпендикулярная плоскости

Теперь в уравнение (3.6) вместо l, m и n подставим координаты вектора $\bar{v}=(5;-3;0)$, а в качестве x_0, y_0, z_0 возьмём координаты точки $A(-3;4;-8)$:

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+8}{0}.$$

Пример 3.5. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;-5;7)$ и $B(-2;5;6)$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5):

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases}$$

где $\bar{v}=(l;m;n)$ – направляющий вектор прямой, а $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, принадлежащая прямой.

В качестве направляющего вектора прямой (рисунок 3.7) возьмём $\bar{v}=\overline{AB}=(-2-3;5-(-5);6-7)=(-5;10;-1)$, а точку выберем любую из данных, например, $B(-2;5;6)$.

Тогда искомые уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=-2-5t, \\ y=5+10t, \\ z=6-t. \end{cases}$$

Пример 3.6. Найти координаты точки P пересечения прямой $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{7}$ и плоскости $5x-4y+2z-10=0$.

Решение. Чтобы найти координаты точки P, составим и решим систему из заданных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z}{7}, \\ 5x-4y+2z-10=0. \end{cases}$$

Вначале перепишем канонические уравнения прямой в параметрическом виде, то есть:

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{7}=t \;\Leftrightarrow\; \frac{x-2}{-4}=t,\ \frac{y+5}{-2}=t,\ \frac{z}{7}=t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=-4t+2, \\ y=-2t-5, \\ z=7t, \end{cases}$$

и, подставив в уравнение плоскости, получим:

$$5\cdot(-4t+2)-4\cdot(-2t-5)+2\cdot 7t-10=0;$$

$$-20t+10+8t+20+14t-10=0;$$

$$2t=-20 \;\Leftrightarrow\; t=-10.$$

Выполним обратную подстановку:

$x=-4\cdot(-10)+2=42;\ y=-2\cdot(-10)-5=15;\ z=7\cdot(-10)=-70.$

То есть $P(42;15;-70)$.

Замечание. Расстояние d от точки $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ до плоскости α, заданной общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, можно найти по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.8)$$

Пример 3.7. Найти расстояние от точки $N(-2;3;4)$ до плоскости α, заданной уравнением $5x+6y-z-13=0$.

Решение. Для определения расстояния от точки до плоскости воспользуемся формулой (3.8):

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $A=5$, $B=6$, $C=-1$, $D=-13-$ коэффициенты при x, y, z и свободный член в уравнении плоскости, а x_1, y_1, z_1 – координаты точки $N(-2;3;4)$.

Тогда

$$d=\frac{|5\cdot(-2)+6\cdot 3-1\cdot 4-13|}{\sqrt{5^2+6^2+(-1)^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{62}}=\frac{9}{\sqrt{62}}.$$

3.2.4 Общие уравнения прямой

Будем рассматривать прямую как линию пересечения двух различных непараллельных плоскостей. Ясно, что этими двумя плоскостями прямая определяется однозначно. Таким образом, если, например, плоскости заданы общими уравнениями, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

однозначно определяет прямую, являющуюся линией их пересечения (рисунок 3.9). Эти уравнения называют общими уравнениями прямой.

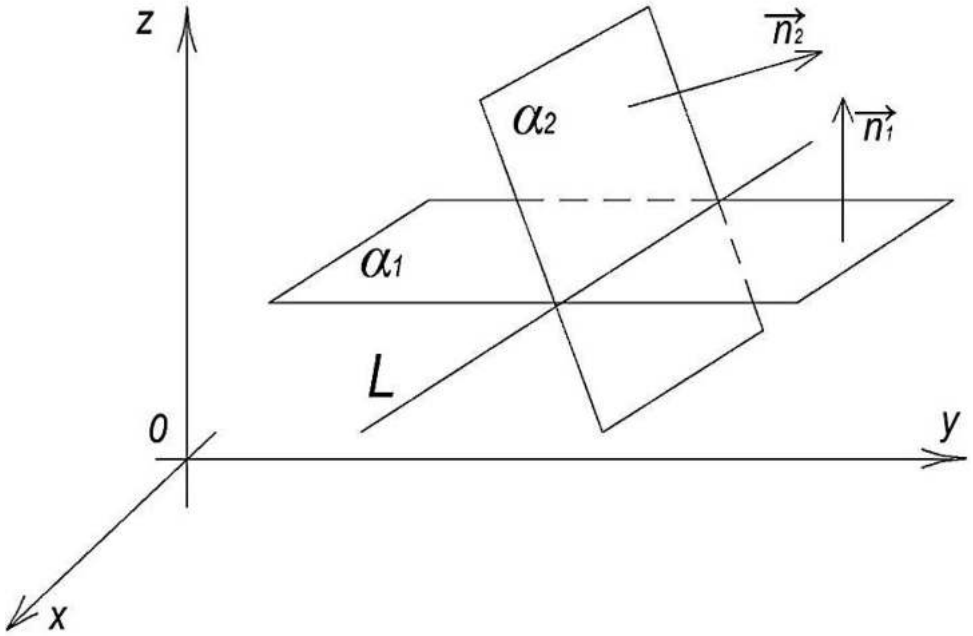


Рисунок 3.9 – Общие уравнения прямой

Пример 3.8. Прямая L задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 11 = 0, \\ 3x + 4y - 3z + 9 = 0. \end{cases}$$

Составить канонические уравнения этой прямой.

Решение. Будем искать уравнения прямой L в виде (3.6):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

В качестве координат точки M_0 можно взять любое решение системы

$$\begin{cases} 2x-3y+5z-11=0, \\ 3x+4y-3z+9=0. \end{cases}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений (три неизвестных и два уравнения). Нам достаточно найти одно из решений.

Пусть одна из координат, например $z=0$, тогда систему перепишем в виде

$$\begin{cases} 2x-3y-11=0, \\ 3x+4y+9=0. \end{cases}$$

А последняя система имеет единственное решение $x=1,\ y=-3$, которое можно, например, найти по формулам Крамера. Таким образом, получается точка $M_0(1;-3;0)$.

За направляющий вектор прямой L возьмем вектор $\bar{v}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2$, где $\bar{n}_1=(2;-3;5)$ и $\bar{n}_2=(3;4;-3)$ мы нашли из уравнений плоскостей, задающих прямую. Тогда

$$\bar{v}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \overset{+}{\bar{i}} & \overset{-}{\bar{j}} & \overset{+}{\bar{k}} \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{-3} & \overset{-}{5} \\ 4 & -3 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{5} \\ 3 & -3 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-3} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(9-20)-\bar{j}\cdot(-6-15)+\bar{k}\cdot(8+9)=-11\bar{i}+21\bar{j}+17\bar{k}\ \Rightarrow\ \bar{v}=(-11;21;17).$$

Тогда канонические уравнения прямой L будут иметь вид

$$\frac{x-1}{-11}=\frac{y+3}{21}=\frac{z}{17}.$$

3.3 Линии на плоскости. Уравнения линий

Линией на плоскости называют совокупность точек плоскости, удовлетворяющих некоторому геометрическому свойству. В связи с этим координаты точек линии подчинены некоторым соотношениям (соотношению), называемым (называемому) уравнениями (уравнением) линии.

На решения уравнений с двумя переменными можно смотреть с геометрической точки зрения как на множество точек плоскости, координаты которых являются решениями этих уравнений.

Таким образом, между линиями на плоскости и уравнениями с двумя переменными имеется соответствие, при котором каждой линии соответствует уравнение, а каждому уравнению соответствует линия.

Например, по определению, окружность есть множество точек плоскости, удаленных на расстояние R (радиус окружности) от точки C (центр окружности).

Будем считать, что окружность рассматривается в декартовой системе координат и центр C имеет координаты $C(a;b)$. Пусть $M(x;y)$ – текущая точка окружности, тогда, по определению, $MC = R$. Но по формуле для расстояния между точками $MC = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, поэтому

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Таким образом, уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

есть уравнение окружности с центром в точке $C(a;b)$ и радиусом R.

Если задано, например, уравнение $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$. Согласно сказанному выше – это уравнение определяет некоторое множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, то есть определяют некоторую линию. Преобразовав это уравнение к виду $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$, замечаем, что эта линия есть окружность радиуса 5 с центром в точке $C(-3;4)$.

3.4 Прямая на плоскости

Прямая – один из неопределяемых геометрических объектов. Для нее существуют лишь некоторые описания, равносильные постулату Евклида: через две разные точки можно провести одну и только одну прямую.

В связи с этим для прямой могут быть получены различные формы её уравнения, соответствующие конкретным описаниям.

3.4.1 Параметрические уравнения прямой

Предположим, что, как и в случае пространства, прямая задана точкой $M_0(x_0; y_0)$ и направляющим вектором $\bar{v} = (l; m)$. Тогда из того, что $\overline{M_0M} \parallel \bar{v}$, где $M(x; y)$ – текущая точка прямой (рисунок 3.10), следует, что $\overline{M_0M} = t\bar{v}$, где t – произвольное число, называемое параметром.

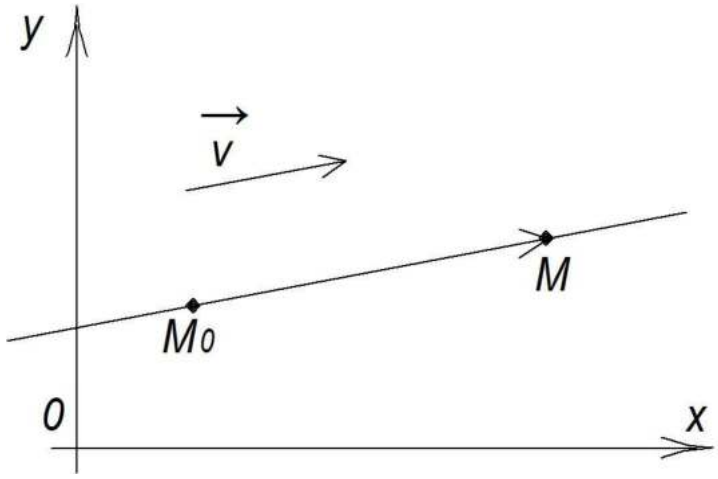


Рисунок 3.10 – Уравнение прямой на плоскости с направляющим вектором

Записывая это равенство покоординатно, получим

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \tag{3.10}$$

3.4.2 Каноническое уравнение прямой

Рассмотрим теперь случай, когда прямая задана точкой и направляющим вектором. В этом случае, исключая параметр в параметрических уравнениях прямой (3.10), получим

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{3.11}$$

Это уравнение также называют каноническим уравнением прямой на плоскости.

Замечание. В последних уравнениях возможна ситуация, когда одна из координат окажется равной нулю. В таких случаях равенство $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ следует понимать как «символическую» запись, означающую, что параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

3.4.3 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть теперь прямая задана двумя точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, через которые она проходит. Воспользуемся каноническими уравнениями этой прямой, которые мы рассмотрели выше.

Пусть известно $M_0 = M_1(x_1; y_1)$, $\bar{v} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, тогда

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3.12)$$

3.4.4 Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Прямая считается однозначно определенной, если известна точка $M_0(x_0; y_0)$, через которую прямая проходит, и вектор, которому она перпендикулярна.

Вектор $\bar{n} = (A; B) \neq \bar{O}$, перпендикулярный рассматриваемой прямой, называется вектором-нормалью этой прямой (рисунок 3.11).

Вектор-нормаль, как и направляющий вектор прямой, определяется с точностью до коллинеарности.

Пусть точка $M(x; y)$ – текущая точка прямой, тогда

$$\bar{n} \perp \overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

Это означает, что $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (3.13)$$

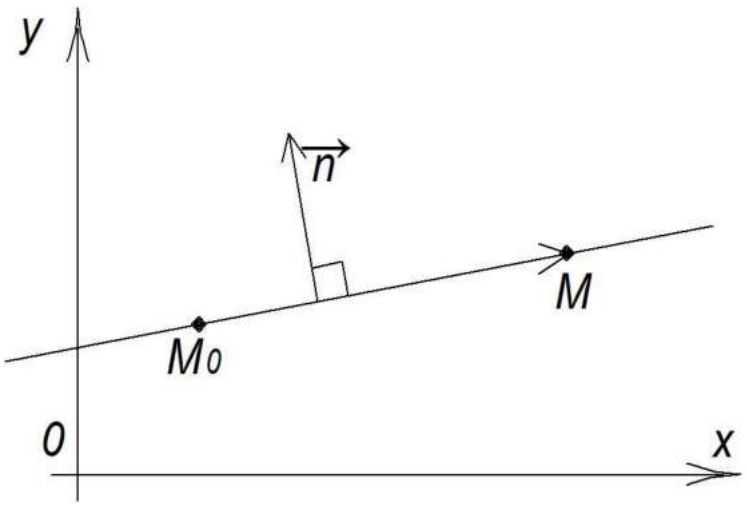


Рисунок 3.11 – Прямая, проходящая через заданную точку перпендикулярно данному вектору

3.4.5 Общее уравнение прямой

Уравнение прямой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

запишем в виде

$$Ax+By+C=0,$$

где

$$C=-Ax_0-By_0.$$

Так как для любой прямой можно указать точку, лежащую на ней, а также вектор, которому она перпендикулярна, то уравнение любой прямой может быть записано в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

а следовательно, и в виде

$$Ax+By+C=0.$$

Таким образом, это означает, что любой прямой соответствует уравнение вида

$$Ax+By+C=0. \qquad (3.14)$$

Исходя из этого, уравнение (3.14) и называют общим уравнением прямой.

3.4.6 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим теперь общее уравнение прямой (3.14) и предположим, что величина $B \neq 0$.

Тогда уравнение прямой может быть записано в виде

$$y = kx + b, \tag{3.15}$$

где

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

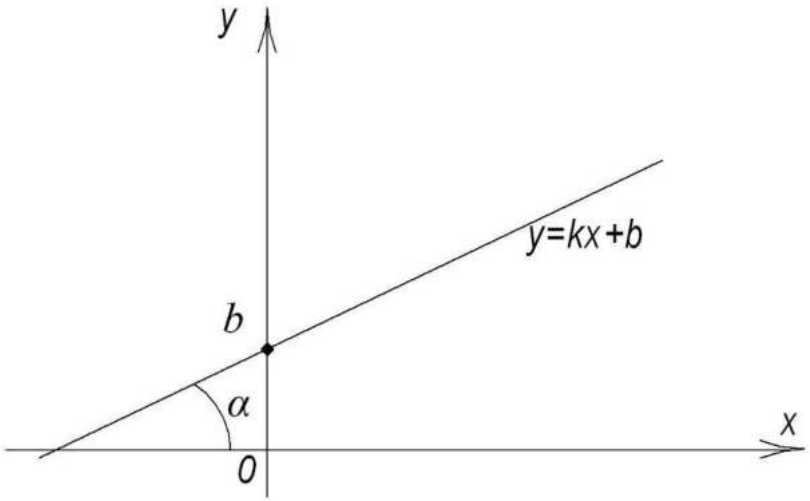


Рисунок 3.12 – Прямая с угловым коэффициентом

Уравнение (3.15) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом в связи с тем, что $k = tg\alpha$, где α – угол наклона прямой к оси OX.

Можно также показать, что величина b – это отрезок, «отсекаемый» от оси OY.

Отметим также, что условие $B \neq 0$ означает, что прямая не параллельна оси OY.

3.4.7 Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через данную точку

Предположим, что для прямой, не параллельной оси OY, известен угол α, образуемый прямой с осью OX, а также известна точка $M_0(x_0; y_0)$, через которую прямая проходит. Очевидно, что приведенное описание однозначно

определяет прямую. Запишем соответствующее ей уравнение. Воспользуемся уравнением (3.15) с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой: $y_0 = kx_0 + b$.

Исключив из равенств $y = kx + b$ и $y_0 = kx_0 + b$ неизвестный параметр b, получим

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3.16}$$

3.4.8 Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Угол между прямыми на плоскости

Известно, что две прямых на плоскости могут:

1) пересекаться в одной точке;

2) совпадать;

3) быть параллельными.

Очевидно, что все эти ситуации определяются количеством общих точек этих прямых. В случае (1) такая точка одна, в случае (2) – бесконечно много, в случае (3) – общих точек нет. Поскольку точка лежит на прямой тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, то общие точки должны удовлетворять уравнениям обеих прямых.

Из вышесказанного следует, что для определения взаимного расположения прямых нужно составить систему из уравнений этих прямых

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

и проанализировать её.

Если полученная СЛАУ имеет единственное решение, то реализуется ситуация (1), при этом решение системы даёт координаты точки пересечения.

Если система имеет бесконечно много решений, то реализуется ситуация (2).

Если система несовместна, то прямые не имеют общих точек, то есть прямые параллельны.

Ясно, что угол, образуемый прямыми, совпадает с углом, образуемым нормалями или направляющими векторами этих прямых, и может быть найден средствами векторной алгебры.

Особо выделим случай, когда прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

Несложно убедиться в том, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, где α_1, α_2 – углы, образуемые рассматриваемыми прямыми с осью OX (рисунок 3.13).

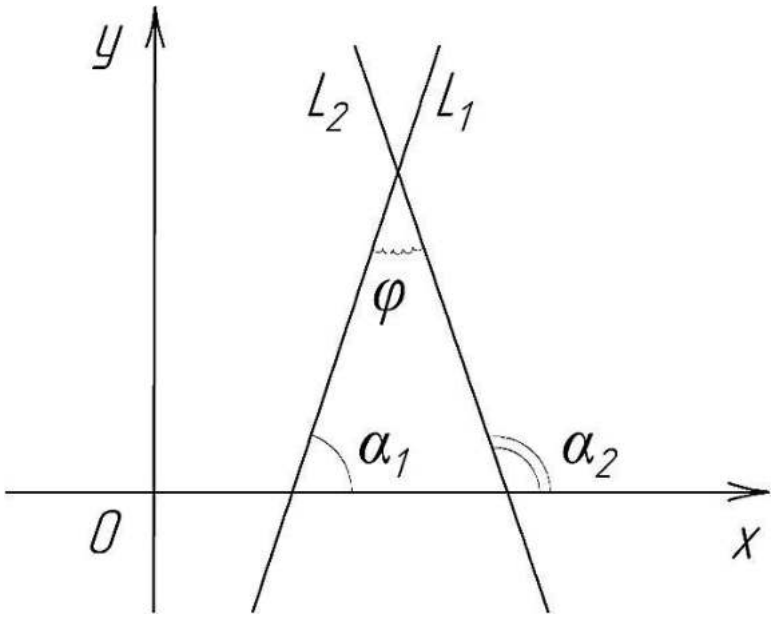


Рисунок 3.13 – Угол между прямыми на плоскости

Тогда, в силу известной тригонометрической формулы, получаем

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

Учитывая, что $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$, получаем

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3.17)$$

Из выражения (3.17) для углов между прямыми нетрудно получить условия перпендикулярности и параллельности прямых:

1) *условие перпендикулярности двух прямых:* $k_1 \cdot k_2 = -1$;

2) *условие параллельности прямых:* $k_1 = k_2$,

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых.

Пример 3.9. Составить уравнения прямых, проходящих через заданную точку $N(2;-3)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна заданной прямой $L:\ 5x+7y-12=0$.

Решение. 1. Поскольку прямые L и L_1 параллельны, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k_1 = k$. Чтобы вычислить k, воспользуемся пояснением к формуле (3.15), то есть

$$k = -\frac{A}{B},$$

где A и B – коэффициенты при x и y в уравнении $5x+7y-12=0$.

Тогда

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{7} \Rightarrow\ k_1 = -\frac{5}{7}.$$

Теперь применим формулу (3.16):

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где в качестве x_0, y_0 возьмём координаты точки $N(2;-3)$:

$$y-(-3) = -\frac{5}{7}(x-2) \quad \Big| \cdot 7;$$

$$7(y+3) = -5(x-2);$$

$$7y+21 = -5x+10.$$

Тогда уравнение прямой L_1, параллельной прямой L, будет следующим:

$$5x+7y+11=0.$$

2. Поскольку прямые L и L_2 перпендикулярны, то их угловые коэффициенты удовлетворяют условию $k \cdot k_2 = -1$. Отсюда следует, что $k_2 = \frac{7}{5}$.

Теперь применим формулу (3.16), в которую снова подставим координаты точки $N(2;-3)$, и получим:

$$y+3=\frac{7}{5}(x-2) \quad \Big| \cdot 5,$$

$$5(y+3)=7(x-2);$$

$$5y+15=7x-14.$$

Тогда уравнение искомой прямой L_2, перпендикулярной прямой L, будет иметь вид

$$7x-5y-29=0.$$

Пример 3.10. Даны координаты вершин треугольника $A(2;-3)$, $B(-2;4)$ и $C(5;2)$ (рисунок 3.14). Составить:

1) уравнение стороны AB;

2) уравнение высоты CH;

3) уравнение медианы BD.

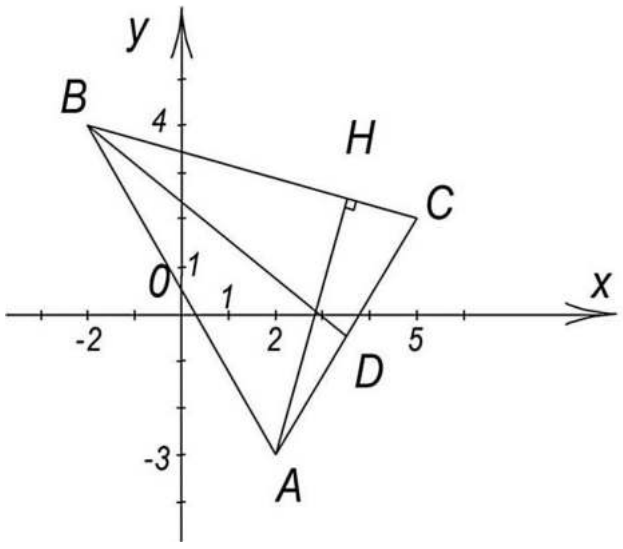


Рисунок 3.14 – Треугольник к примеру 3.10

Решение. 1. Уравнение стороны AB будем искать по формуле (3.12), в которую подставим координаты точек $A(2;-3)$ и $B(-2;4)$:

$$\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y+3}{4+3},$$

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{7}\quad\Big|\cdot(-28),$$

$$7(x-2)=-4(y+3).$$

Отсюда уравнение прямой AB будет иметь вид

$$7x+4y-2=0.$$

2. Чтобы получить уравнение высоты CH, воспользуемся уравнением прямой с заданным нормальным вектором (3.13):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

где в качестве нормального вектора $\bar{n}$ возьмём вектор

$$\overline{AB}==(-2-2;\,4-(-3))=(-4;\,7),$$

так как $CH\perp AB$.

Точка $C(5;2)$ лежит на высоте CH, её координаты подставим вместо x_0, y_0.

Тогда искомое уравнение будет иметь вид:

$$-4(x-5)+7(y-2)=0,$$

$$-4x+20+7y-14=0,$$

$$-4x+7y+6=0$$

или

$$4x-7y-6=0.$$

3. Для определения уравнения медианы BD найдем вначале координаты точки D, которая лежит на середине отрезка AC. Координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов:

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2};$$

$$y_D=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Затем подставим в (3.12) координаты точек B и D:

$$\frac{x-(-2)}{\frac{7}{2}-(-2)}=\frac{y-4}{-\frac{1}{2}-4};$$

$$\frac{x+2}{\frac{11}{2}} = \frac{y-4}{-\frac{9}{2}} \quad \Big| \cdot\left(-\frac{99}{2}\right);$$

$$-9(x+2) = 11(y-4).$$

Тогда уравнение медианы BD будет иметь вид

$$9x + 11y - 26 = 0.$$

Пример 3.11. Найти угол между двумя прямыми $L_1 : 3x + 2y + 7 = 0$ и $L_2 : 2x - 6y - 11 = 0$.

Решение. Угол φ между заданными прямыми определим по формуле (3.17):

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты заданных прямых. Мы их найдём аналогично примеру 3.9 (пункт 1) из уравнений прямых:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{3}{2};$$

$$k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2+9}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{6} : \frac{1}{2} = \frac{11}{3}.$$

Следовательно, угол между прямыми

$$\varphi = arctg\left(\frac{11}{3}\right).$$

3.5 Эллипс

3.5.1 Определение эллипса

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек есть величина постоянная, равная $2a,\quad a>0$ (рисунок 3.15).

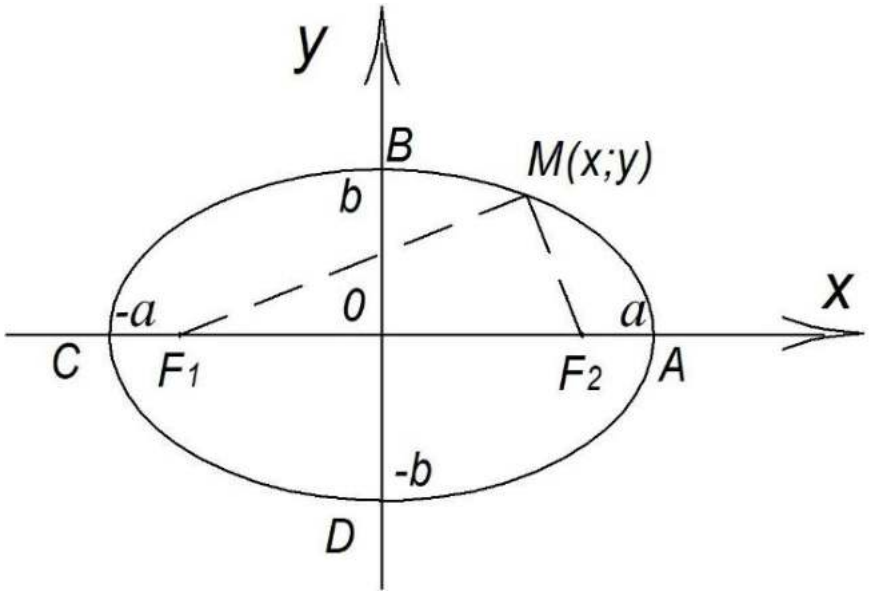


Рисунок 3.15 – Эллипс

Точки, фигурирующие в определении эллипса, называются его фокусами, расстояние между фокусами называется фокусным, обозначается через $2c$, $c>0$.

3.5.2 Каноническое уравнение эллипса

Введем обозначение $a^2-c^2=b^2$. Можно показать, что уравнение эллипса имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.18)$$

Координаты фокусов эллипса $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$.

Отметим, что окружность с центром в начале координат можно рассматривать как частный случай эллипса.

3.5.3 Анализ канонического уравнения эллипса

Из канонического уравнения эллипса следует:

1. Эллипс симметричен относительно координатных осей и начала координат. В самом деле, если точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на эллипсе, то и точки $M_1(-x_0; y_0)$, $M_2(-x_0; -y_0)$, $M_3(x_0; -y_0)$ также лежат на эллипсе, так как координаты этих точек лишь одновременно удовлетворяют уравнению (3.18). Но точки M_0 и M_1 симметричны относительно оси OY, точки M_0 и M_3 симметричны относительно оси OX, а точки M_0 и M_2 симметричны относительно начала координат.

2. Эллипс имеет 4 вершины, то есть 4 точки пересечения с осями координат. Найдем точки пересечения с осью OX:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \; y = 0,\, x = \pm a\,.$$

Таким образом, на оси OX лежат 2 вершины $A(a; 0)$ и $C(-a; 0)$.

Аналогичным образом, разыскивая точки пересечения эллипса с осью OY, получим, что на этой оси лежат вершины $B(0; b)$ и $D(0; -b)$.

3. Ввиду симметрии достаточно построить эллипс в первой четверти. Поскольку $x \ge 0$, $y \ge 0$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,,\; x \in [a; b].$$

Из этого уравнения следует, что в первой четверти эллипс есть монотонно меняющаяся кривая, соединяющая вершины B и A.

Достраивая эллипс в других четвертях по симметрии, получаем следующий эскиз эллипса (рисунок 3.15).

Ясно, что наибольшим расстоянием между точками эллипса является $AC = 2a$. В связи с этим число $2a$ называют большой осью эллипса, а число

a – большой полуосью. Расстояние $BD = 2b$ называют малой осью, b – малой полуосью.

4. Для уточнения формы эллипса используют его характеристику, называемую эксцентриситетом. Эксцентриситетом эллипса называют отношение фокусного расстояния эллипса к его большой оси.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{3.19}$$

Ясно, что $\varepsilon \in (0;1)$. Эксцентриситет характеризует степень отличия эллипса от окружности. Дело в том, что окружность можно рассматривать как предельный случай эллипса, когда фокусы неограниченно сближаются (сравните определения окружности и эллипса). Поэтому, если эксцентриситет близок к нулю, то расстояние между фокусами мало и эллипс по форме близок к окружности. Если же эксцентриситет близок к 1, то эллипс вытягивается вдоль оси OX, стремясь превратиться в дважды проходимый отрезок $[-a; a]$ вещественной оси. Дело в том, что если $\varepsilon \approx 1$, то $c \approx a \Rightarrow b \approx 0$ ввиду того, что $b^2 = a^2 - c^2$.

Аналогичным образом вводится и рассматривается эллипс с фокусами на оси OY.

3.6 Гипербола

3.6.1 Определение гиперболы

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная, равная $2a, \quad a > 0$ (рисунок 3.16).

Точки, фигурирующие в определении гиперболы, называются его фокусами, расстояние между фокусами называется фокусным, обозначается через $2c$, $c > 0$. Нетрудно убедиться в том, что данное определение гиперболы содержательно лишь в предположении $c > a$.

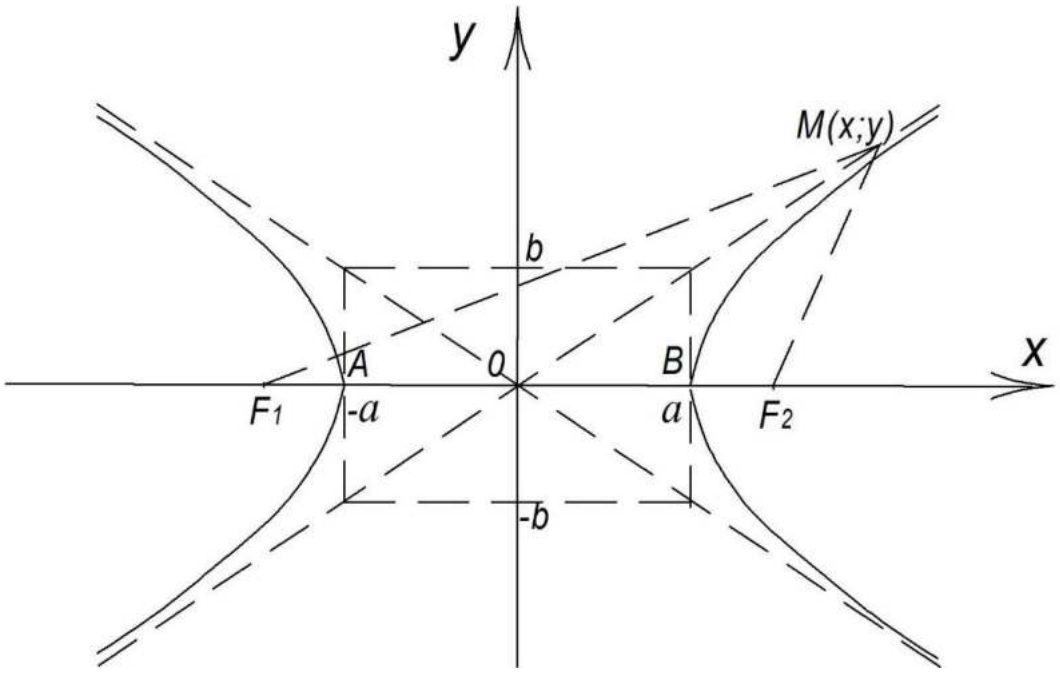


Рисунок 3.16 – Гипербола

3.6.2 Каноническое уравнение гиперболы

Введем обозначение $c^2 - a^2 = b^2$. Можно показать, что уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.20}$$

а координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

3.6.3 Анализ канонического уравнения гиперболы

Из канонического уравнения гиперболы следует:

1. Гипербола симметрична относительно координатных осей и начала координат. В самом деле, если точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на гиперболе, то и точки $M_1(-x_0; y_0)$, $M_2(-x_0; -y_0)$, $M_3(x_0; -y_0)$ также лежат на гиперболе, так как координаты этих точек лишь одновременно удовлетворяют уравнению (3.20), как и в случае эллипса.

2. Гипербола имеет 2 вершины на оси OX. Найдем точки пересечения с осью OX:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \; y = 0,\, x = \pm a\,.$$

Таким образом, на оси OX лежат 2 вершины $A(a;0)$ и $B(-a;0)$. С осью OY гипербола не пересекается, так как система несовместна:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \; y^2 = -b^2\,.$$

Расстояние $2a$ между вершинами гиперболы называют действительной осью гиперболы, а число a – действительной полуосью. Число $2b$ называют мнимой осью, а b – мнимой полуосью.

3. Ввиду симметрии достаточно построить гиперболу в первой четверти. Поскольку $x \ge 0,\; y \ge 0$, то

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\;,\; x \in [a; +\infty).$$

Из этого уравнения следует, что в первой четверти гипербола есть монотонно возрастающая кривая, выходящая из вершины A. Достраивая гиперболу в других четвертях по симметрии, получаем следующий эскиз гиперболы (рисунок 3.16).

3.6.4 Асимптоты и характеристический прямоугольник гиперболы

Асимптотой кривой называют прямую, неограниченно сближающуюся с кривой при неограниченном удалении от начала координат.

Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Назовем характеристическим прямоугольником гиперболы прямоугольник, симметричный относительно осей координат и начала координат и имеющий измерения $2a,\; 2b$.

Ясно, что точки пересечения характеристического прямоугольника с осью абсцисс есть вершины гиперболы, а диагонали – её асимптоты. Эти обстоятельства позволяют уточнить эскиз графика гиперболы.

Пусть задана гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, сопряженной к ней называют гиперболу (рисунок 3.17).

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \tag{3.21}$$

Координаты фокусов сопряженной гиперболы $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$.

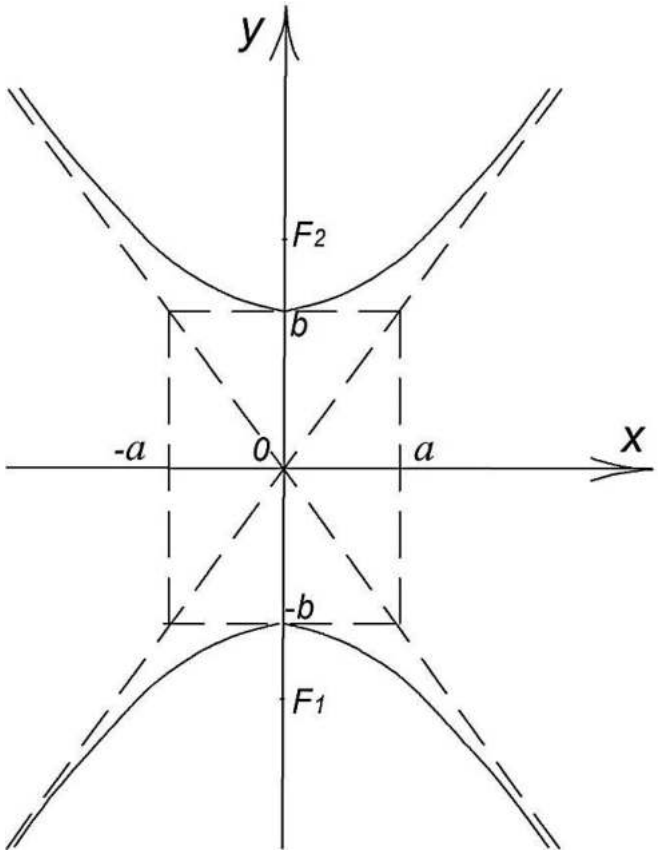


Рисунок 3.17 – Сопряженная гипербола

3.6.5 Эксцентриситет гиперболы. Форма гиперболы

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение фокусного расстояния гиперболы к действительной оси:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a} \text{ или } \varepsilon=\frac{c}{a}. \tag{3.22}$$

Ясно, что эксцентриситет гиперболы – величина, большая 1. Эксцентриситет гиперболы характеризует её форму, описывая степень «прижатости» ветвей гиперболы к оси абсцисс.

Покажем это на примерах гипербол, имеющих одинаковое фиксированное фокусное расстояние, но разные эксцентриситеты.

Если $\varepsilon \approx 1$, то $c \approx a$ и поэтому $b \approx 0$ ввиду равенства $b^2 = c^2 - a^2$. Это означает, что характеристический прямоугольник вытянут вдоль оси OX и ветви гиперболы прижаты к оси OX.

Если $\varepsilon \to \infty$, то это означает, что величина $a \approx 0$ и поэтому $b \approx c$ ввиду равенства $b^2 = c^2 - a^2$. В этом случае характеристический прямоугольник вытянут вдоль оси OY и ветви гиперболы стремятся занять положения прямых $x = \pm a$.

3.7 Парабола

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной прямой и от заданной точки (рисунок 3.18).

Прямую называют директрисой параболы, точку – фокусом параболы, расстояние от фокуса до директрисы называют параметром параболы и обозначают через p.

Систему координат, в которой парабола имеет каноническое уравнение, можно выбирать четырьмя различными способами.

В зависимости от этого канонические уравнения параболы могут быть следующими.

1 случай.

$$y^2 = 2px, \tag{3.23}$$

где фокус – $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$ (рисунок 3.18).

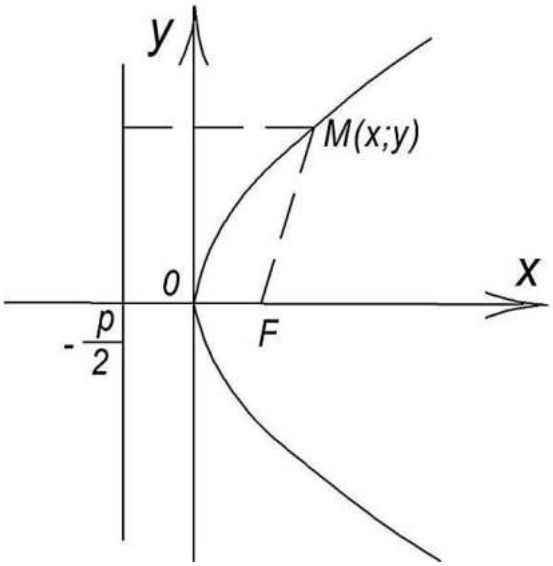


Рисунок 3.18 – Парабола вида $y^2 = 2px$

2 случай.

$$y^2 = -2px, \tag{3.24}$$

где фокус – $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, уравнение директрисы $x = \frac{p}{2}$ (рисунок 3.19).

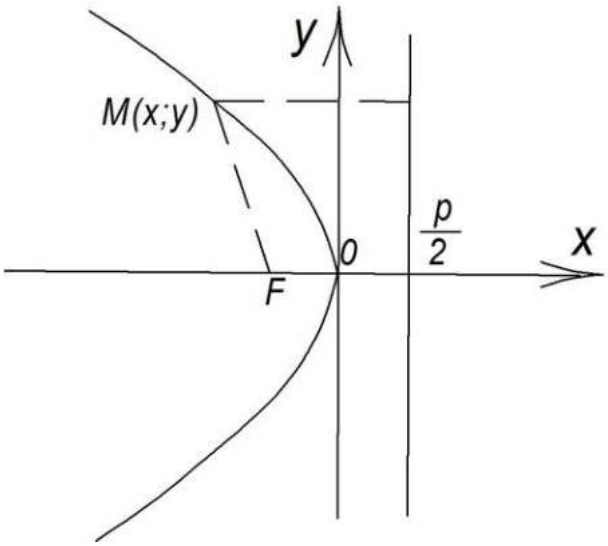


Рисунок 3.19 – Парабола вида $y^2 = -2px$

3 случай.

$$x^2 = 2py, \tag{3.25}$$

где фокус – $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы $y = -\frac{p}{2}$ (рисунок 3.20).

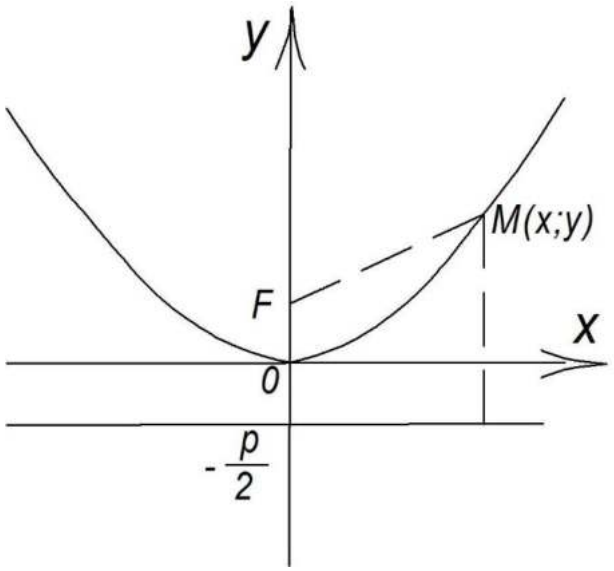


Рисунок 3.20 – Парабола вида $x^2 = 2py$

4 случай.

$$x^2 = -2py, \tag{3.26}$$

где фокус – $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы $y = \frac{p}{2}$ (рисунок 3.21).

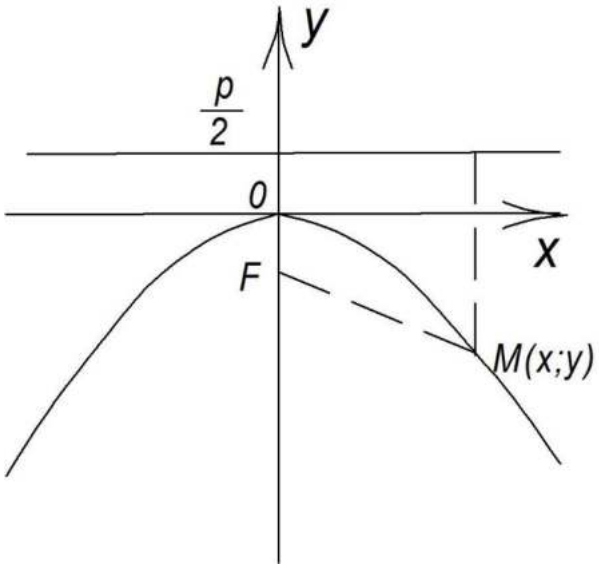


Рисунок 3.21 – Парабола вида $x^2 = -2py$

Пример 3.12. Даны уравнения кривых второго порядка:

а) $3x^2 + 6y^2 = 18$;

б) $x^2 - 7y = 0$;

в) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Найти: 1) для эллипса – полуоси, фокусы;

2) для параболы – параметр, фокус, уравнение директрисы;

3) для гиперболы – полуоси, фокусы, уравнения асимптот.

Построить эскизы кривых.

Решение.

а) $3x^2+6y^2=18$.

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, разделим обе части уравнения на 18 (чтобы в правой части было 1).

Получаем

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Это уравнение описывает эллипс, полуоси которого равны $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6-3}=\sqrt{3}$, то есть $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$ являются фокусами эллипса.

Для построения эскиза эллипса на осях координат отметим точки $\left(\sqrt{6};0\right)$, $\left(-\sqrt{6};0\right)$, $\left(0;\sqrt{3}\right)$, $\left(0;-\sqrt{3}\right)$ – вершины эллипса (рисунок 3.22). Затем через эти точки пунктирной линией построим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и «впишем» в прямоугольник наш эллипс.

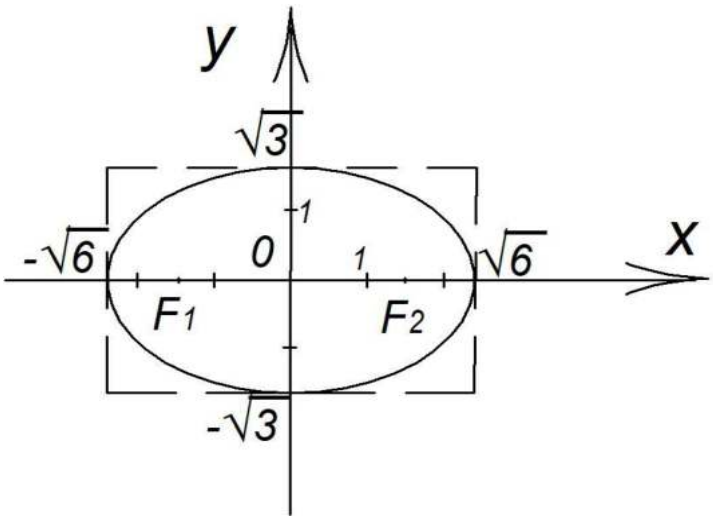


Рисунок 3.22 – Эллипс к примеру 3.12

б) $x^2 - 7y = 0.$

Перепишем уравнение в виде (3.25):

$$x^2 = 7y.$$

Оно описывает параболу, ветви которой идут вверх. Параметр $p = \frac{7}{2}$, точка $F\left(0; \frac{7}{4}\right)$ является фокусом, прямая $y = -\frac{7}{4}$ является директрисой.

Строим эскиз параболы (рисунок 3.23).

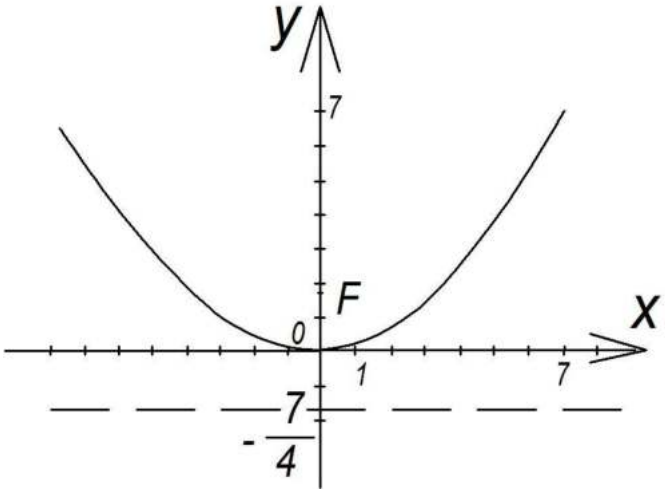


Рисунок 3.23 – Парабола к примеру 3.12

в) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Приведём уравнение к каноническому виду (3.20), для этого обе части уравнения разделим на 36 (чтобы в правой части была 1).

Получается

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Это уравнение описывает гиперболу, при этом:

1) действительная полуось – $a = \sqrt{9} = 3$, мнимая полуось – $b = \sqrt{4} = 2$;

2) точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, то есть $F_1\left(-\sqrt{13}; 0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{13}; 0\right)$ – фокусы гиперболы;

3) уравнения асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$ или $y = \pm\frac{2}{3}x$.

Для построения эскиза гиперболы на осях координат отметим точки (3; 0), (–3; 0) – вершины гиперболы и точки (0; 2), (0; –2) (рисунок 3.24). Через эти точки пунктирной линией построим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

Проведём диагонали прямоугольника, выходящие за его пределы (это асимптоты гиперболы), и «вписываем» гиперболу между асимптотами.

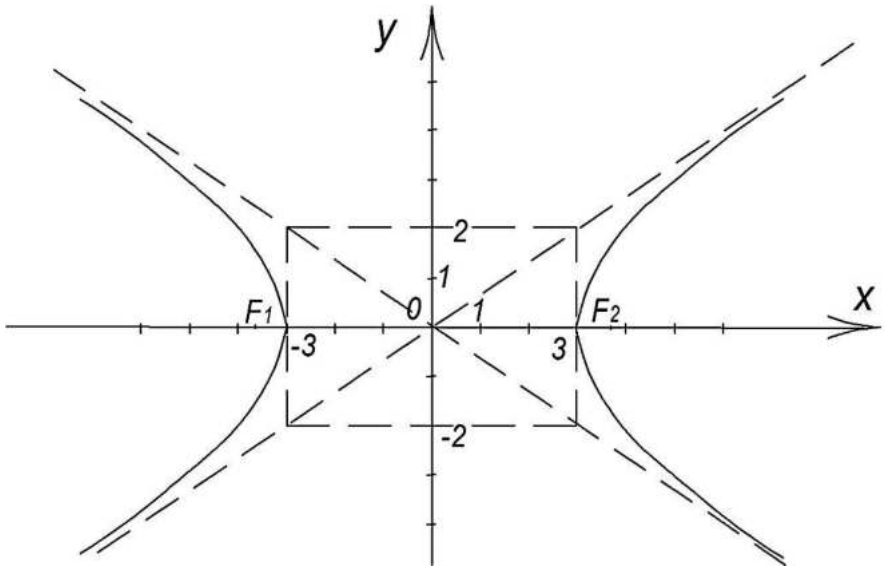


Рисунок 3.24 – Гипербола к примеру 3.12

3.8 Понятие о параметрически заданных кривых

Иногда удобнее записывать зависимости, связывающие текущие координаты кривой не в виде явных или неявных функций, как это было в случае прямой и кривых второго порядка, а в форме параметрических уравнений. В таких случаях говорят о параметрически заданных кривых.

Например, уравнения окружности радиуса R с центром в точке $C(a,b)$ можно записать в виде

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, \; 0 \le t < 2\pi,$$

где t – угол, образуемый радиус-вектором текущей точки с осью OX.

В общем случае уравнения параметрически заданной кривой имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in T,$$

а кривая представляет собой множество точек плоскости $\{(x(t); y(t)),\ t \in T\}$.

В частности, параметрически могут быть заданы следующие часто встречающиеся кривые:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi)$ – эллипс (рисунок 3.15); (3.27)

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi)$ – астроида (рисунок 3.25); (3.28)

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = b(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ – циклоида (рисунок 3.26). (3.29)

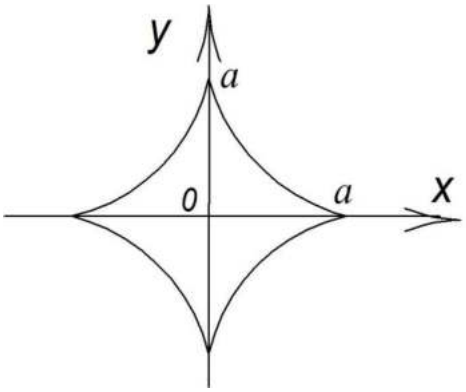


Рисунок 3.25 – Астроида

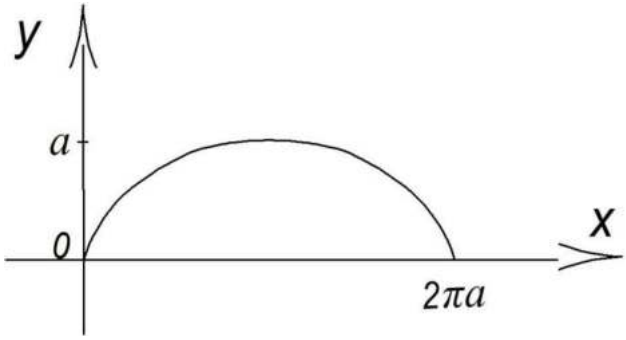


Рисунок 3.26 – Первая арка циклоиды

Например, для построения астроиды при $a = 2$ таблица значений функций будет выглядеть так:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
x	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Отметим, что параметрическое задание кривых широко применяется в прикладных науках (физике, теоретической механике, гидромеханике, астрономии и других).

Уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in T$$

задают координаты изучаемых точек в момент времени t, а линии, определяемые такими параметрическими уравнениями, называют траекториями движения точек.

3.9 Полярная система координат

Полярная система координат состоит из точки O – полюса, луча Op – полярной оси и единичного вектора $\vec{e}$, сонаправленного полярной оси (рисунок 3.27).

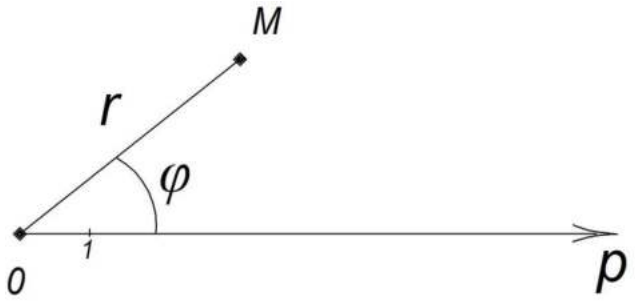


Рисунок 3.27 – Полярная система координат

Пусть задана полярная система координат и M – произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом.

Полярными координатами точки M называются два числа: расстояние r от точки M до полюса O и угол φ, образованный лучом Op и вектором $\overline{OM}$. При этом $r \geq 0$ называется полярный радиус, $\varphi \in [0; 2\pi)$ – полярный угол.

Для установления связи между полярными и декартовыми координатами точки нужно полярную систему координат совместить с прямоугольной так,

что полюс совпадёт с началом координат *OXY*, а полярная ось совпадёт с положительным направлением оси *OX* (рисунок 3.28).

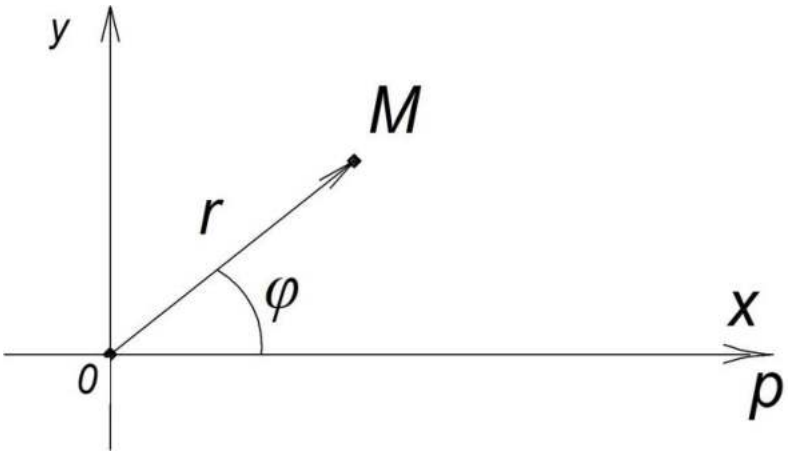


Рисунок 3.28 – Связь полярных и декартовых координат

Пусть x и y – декартовы координаты точки M, а r и φ – её полярные координаты. Тогда связь между полярными и прямоугольными координатами точки выражается формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Пример 3.13. Найти полярные координаты точки $M(-5;5)$.

Решение. Найдём r и φ по формулам (3.30):

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,.$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ cos\varphi = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, полярные координаты точки: $M\left(5\sqrt{2};\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

3.10 Расчет характеристик криволинейного движения в агроинженерных задачах

Рассмотрим примеры расчета траекторий криволинейного движения точки.

Пример 3.14. Определить и построить траекторию движения точки М по заданным уравнениям движения. Найти положение точки на траектории в заданный момент времени *t*:

а) $\begin{cases} x = -8t^2 + 3 \\ y = 2t \end{cases}$, $t = 2{,}5$ ч;

б) $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$, $t = \dfrac{\pi}{3}$ ч.

Решение.

а) $\begin{cases} x = -8t^2 + 3 \\ y = 2t \end{cases}$.

Чтобы определить вид траектории движения заданной точки, выразим из второго уравнения системы переменную *t*

$$t = \frac{y}{2}$$

и, подставив в первое уравнение системы, получим:

$$x = -8 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 3;$$

$$x = -8 \cdot \frac{y^2}{4} + 3;$$

$$x = -2y^2 + 3.$$

Таким образом, траекторией движения данной точки является параболическая кривая. Построим её график:

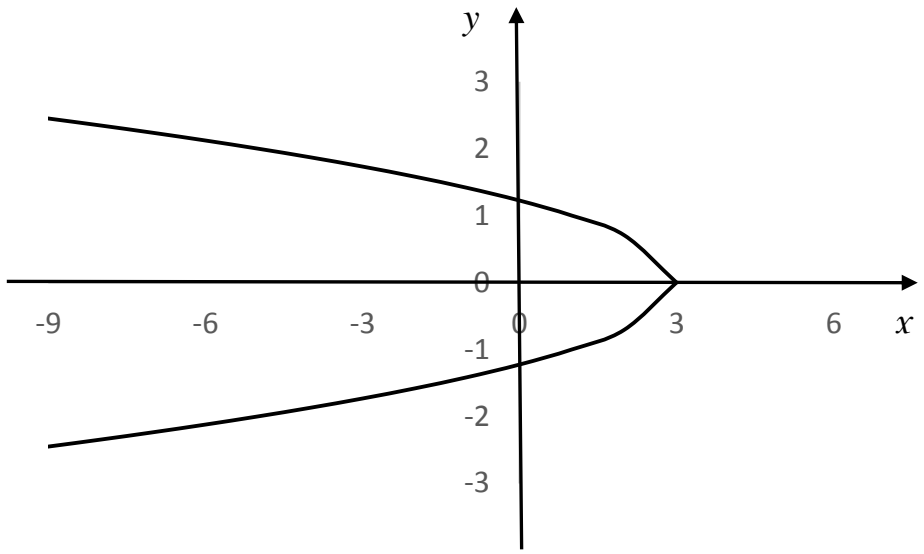


Рисунок 3.29 – Траектория движения точки М к примеру 3.14 *а*

Найдем положение точки на траектории в момент времени t =2,5 ч.

$$\begin{cases} x = -8 \cdot (2{,}5)^2 + 3 \\ y = 2 \cdot 2{,}5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -8 \cdot (2{,}5)^2 + 3 \\ y = 2 \cdot 2{,}5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -47 \\ y = 5 \end{cases}.$$

б) $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$.

В данном случае, чтобы определить вид траектории движения точки М, возведем в квадрат уравнения системы

$$\begin{cases} x^2 = 4\sin^2 t \\ y^2 = 9\cos^2 t \end{cases}.$$

Затем первое уравнение разделим на 4, а второе уравнение разделим на 9, получим

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} = \sin^2 t \\ \dfrac{y^2}{9} = \cos^2 t \end{cases}.$$

Теперь сложим уравнения системы, в итоге получим следующее:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \sin^2 t + \cos^2 t .$$

Из курса школьной тригонометрии вам известна формула (основное тригонометрическое тождество):

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Применяя его, получаем

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Таким образом, траекторией движения данной точки является эллипс. Построим график полученной траектории движения:

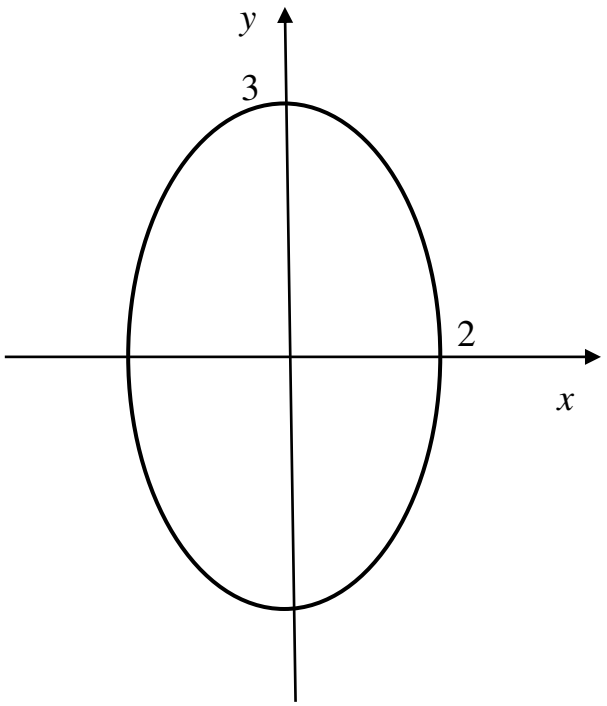


Рисунок 3.30 – Траектория движения точки М к примеру 3.14 *б*

Найдем положение точки на траектории в момент времени $t = \dfrac{\pi}{3}$ ч.

$$\begin{cases} x = 2\sin\dfrac{\pi}{3} \\ y = 3\cos\dfrac{\pi}{3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = 3\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1{,}5 \end{cases}.$$

Контрольные вопросы

1. Как выглядит уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с заданным вектором нормали?
2. Какие виды уравнений прямой в пространстве вам известны?
3. Расскажите, как найти угол между двумя плоскостями.
4. Как найти координаты точки пересечения плоскости и прямой?
5. Прямая задана общими уравнениями. Расскажите, как найти ее направляющий вектор.
6. Какие вам известны виды уравнений прямой на плоскости?
7. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
8. Назовите канонические уравнения эллипса.
9. Приведите канонические уравнения гиперболы.
10. Назовите канонические уравнения параболы.
11. Расскажите, что вы знаете о полярных координатах точки.

ЧАСТЬ 2
МАТЕМАТИКО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ГЛАВА 4 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1 Множества

4.1.1 Понятие множества

Одним из фундаментальных понятий в математике является понятие множества. Одна из самых ранних попыток дать определение понятия множества была предпринята Георгом Кантором (1845–1918), который и считается автором современной теории множеств. Кантор определил множество как «многое, мыслимое как единое». Это определение было подвергнуто обоснованной критике, что впоследствии привело к созданию аксиоматического определения множества. Это определение и является предметом изучения до сих пор.

Для наших нужд вполне достаточно следующего элементарного подхода, вытекающего из определения Кантора. Будем считать, что для рассматриваемой задачи имеется так называемое универсальное множество, то есть некоторый набор объектов, объединенных по определенному признаку. Из объектов, составляющих универсальное множество, формируются все остальные рассматриваемые множества.

Например, при решении задач числового характера в качестве универсального множества можно взять множество всех вещественных чисел.

Объекты, из которых составлено универсальное множество, называют его элементами.

Множества будем обозначать большими буквами $A, B, \ldots,$ а элементы множеств соответствующими малыми $a, b, \ldots$.

Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$.

Запись $a \notin A$ означает, что элемент a напротив не принадлежит A.

Два множества A и B, состоящие из одних и тех же элементов универсального множества, называются равными и записывают $A{=}B$.

Если все элементы множества A входят и в B, то говорят, A является подмножеством множества B, и записывают $A \subset B$.

Вспомним обозначения основных числовых множеств: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ − множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел; $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Универсальным множеством для всех этих множеств является $\mathbb{R}$. Между множествами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ существует соотношение $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

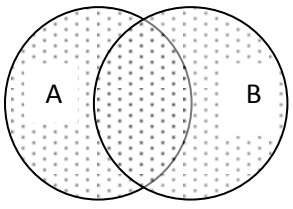
Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым и обозначают $\emptyset$.

4.1.2 Операции над множествами

Для наглядного представления об операциях над множествами часто используют диаграммы Эйлера-Венна. При этом элементы универсального множества отождествляются с точками плоскости, а элементы конкретного множества с частью точек плоскости. При этом эта часть плоскости отделяется от остальных точек плоскости замкнутыми кривыми (например, окружностями).

Пусть A и B – произвольные множества.

Определение. Суммой или объединением множеств A и B называют множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (рисунок 4.1).



$A \cup B$

Рисунок 4.1 – Объединение множеств

Определение. Пересечением множеств A и B называют множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B (рисунок 4.2).

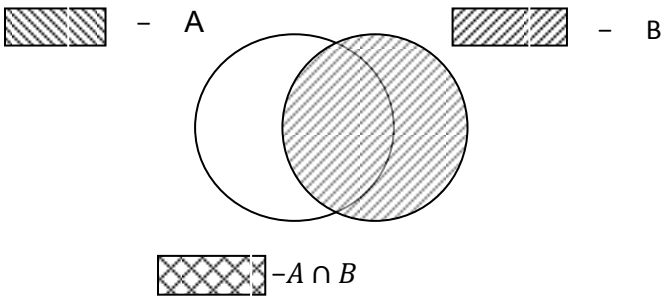


Рисунок 4.2 – Пересечение множеств

Определение. Разностью множеств A и B называют множество $C = A \backslash B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не содержатся в B (рисунок 4.3).

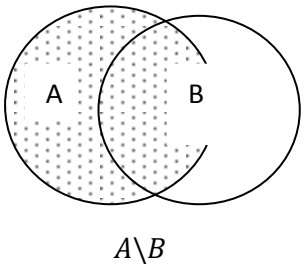


Рисунок 4.3 – Разность множеств

Пример 4.1. Пусть даны множества $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{3\}$. Выполнить следующие операции над множествами: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \backslash B$, $A \backslash C$, $C \backslash A$.

Решение. Операции над множествами выполним по определениям.

1. $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $A \cap B = \{2, 4\}$.
3. $A \cap C = \emptyset$.
4. $B \cap C = \emptyset$.
5. $A \backslash B = \{1, 5, 7\}$.
6. $A \backslash C = \{1, 2, 4, 5, 7\} = A$.
7. $C \backslash A = \{3\} = C$.

4.1.3 Множества на числовой оси

Напомним стандартные обозначения множеств на числовой оси. Пусть $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, тогда:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ – отрезок (сегмент);

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ – интервал, в частности;

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ – полуинтервал;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ – частный случай интервала.

Пример 4.2. Пусть даны множества $A = [0; 5]$ и $B = (1; 10)$. Выполнить следующие операции над множествами: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$.

Решение. $A \cup B = [0; 10)$; $A \cap B = (1; 5]$; $B \setminus A = (5; 10)$.

4.2 Функции

4.2.1 Определение функции

Пусть X и Y – два непустых множества.

Определение. Правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется функцией, заданной (определенной) на множестве X со значениями в множестве Y.

Часто функцию также называют отображением, соответствием, оператором.

Функцию будем обозначать двумя способами:

- $y = f(x),\ x \in X$ (читается «y есть функция от x»);
- $f: X \to Y$ (читается «f есть отображение множества X во множество Y» или «отображение f действует из X в Y»).

Элемент $x \in X$ при этом называется аргументом функции, а соответствующий элемент $y \in Y$ – значением функции.

Множество X называют областью определения функции f и обозначают $D(f)$, а множество Y – областью значений.

Множество значений функции – это множество значений, которые принимает функция в результате её применения, то есть область значений функции является подмножеством множества Y:

$E(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ y = f(x)\}$.

Тут $\exists$ – квантор существования (читается «существует»).

Пример 4.3. Найти области определения и значений функции $y = 3\sqrt{x-4} + 5$.

Решение. 1. Область определения рассматриваемой нами функции определяется неравенством $x - 4 \geq 0$ или $x \geq 4$, то есть $D(y) = [4; \infty)$.

2. Для нахождения множества значений функции проведем следующую оценку: $\sqrt{x-4} \geq 0 \Rightarrow 3\sqrt{x-4} \geq 0 \Rightarrow 3\sqrt{x-4} + 5 \geq 5$.

Отсюда получаем : $E(y) = [5; \infty)$.

Определение. Функция $f: X \to Y$ называется числовой функцией, если $X \subset \mathbb{R},\ Y \subset \mathbb{R}$.

Графиком числовой функции называется множество точек плоскости OXY с координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$.

4.2.2 Способы задания функций

Задать функцию означает указать множество X и (или) описать правило, позволяющее по данному значению аргумента $x \in X$ находить соответствующее значение функции.

Рассмотрим три основных способа задания функций.

I. Аналитический способ

Этот способ может быть реализован тремя следующими видами.

1.1. Явный аналитический.

Такой способ подразумевает задание связи между аргументом и функцией с помощью аналитического выражения вида $y = f(x),\ x \in X$.

Например: 1) $y = \sqrt{x},\ x \in [0, +\infty)$;

$$2)\ y = sign(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

(читается «сигнум икс»).

1.2. Неявный аналитический.

В данном случае при помощи формул указывается связь $F(x; y) = 0$ между аргументом и функцией. Правило, по которому аргументу ставится в соответствие функция, состоит в следующем: фиксированное значение аргумента $x = a$ подставляют в уравнение связи и полученное уравнение $F(a;\ y) = 0$ разрешают относительно *y*. Найденное значение *y* (в предположении, что оно единственно и существует) и будет значением неявной функции при $x = a$.

1.3. Параметрический способ задания.

В данном случае и функция и аргумент задаются как явные функции некоторого параметра.

Правило, определяющее функцию, понимают так: по фиксированному значению аргумента определяется соответствующее ему значение параметра. А затем по этому значению параметра находят значение функции.

Пример 4.4. Исключив параметр *t*, явно выразите функцию *y*, если заданы параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = 3\cos^2 2t - 4, \\ y = 5 - 2\sin^2 2t. \end{cases}$$

Решение. Обратите внимание, что первое равенство содержит $\cos^2 2t$, а второе $\sin^2 2t$.

Если мы выразим $\sin^2 2t$ и $\cos^2 2t$, то сможем воспользоваться основным тригонометрическим тождеством $\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\right)$.

1. Из первого равенства получаем:

$$x=3\cos^2 2t-4 \Leftrightarrow 3\cos^2 2t=x+4 \Leftrightarrow \cos^2 2t=\frac{x+4}{3}.$$

2. Из второго равенства получаем :

$$y=5-2\sin^2 2t \Leftrightarrow 2\sin^2 2t=5-y \Leftrightarrow \sin^2 2t=\frac{5-y}{2}.$$

3. Воспользуемся теперь основным тригонометрическим тождеством. В результате получим:

$$\frac{5-y}{2}+\frac{x+4}{3}=1 \;\Big|\cdot 6,$$

$$3(5-y)+2(x+4)=6 \Leftrightarrow 15-3y+2x+8=6 \Leftrightarrow 3y=2x+17.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{17}{3}.$$

Замечание. Если функция задана аналитически, а область её определения не оговорена, то подразумевается, что областью определения является её естественная область определения, то есть множество всех значений аргумента, для которых написанная формула имеет смысл.

II. Табличный способ

Данный способ используется, если область определения состоит из элементов, которые можно расположить в последовательность

$$X=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Тогда для задания функции рассматривается таблица:

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

III. Графический способ

Данный способ применяется на практике при реализации результатов измерений.

Например, зависимость y от x может вычерчиваться прибором (самописцем, осциллографом). Ваша кардиограмма тоже есть графически заданная функция работы сердца.

4.2.3 Композиция функций (сложная функция)

Определение. Пусть функция $f: X \to Y$, а функция $g: Y \to Z$. Функция $g \circ f: X \to Z$, определяемая по правилу $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, называется композицией (суперпозицией) функций f и g или сложной функцией.

Например, если $f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g(x) = \sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тогда $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{sin\ x}, (f \circ g)(x) = \sin\big(\sqrt[3]{x}\big)$.

4.2.4 Элементарные функции

Определение. Основными элементарными функциями называют следующие:

1) постоянная функция $y = C$, где $C = const$;

2) степенная функция $y = x^{\propto}, \propto \in \mathbb{R}$;

3) показательная функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$;

4) логарифмическая функция $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$;

5) тригонометрические функции: $y = \sin x, y = \cos x,\ y = tg\ x, y = ctg\ x$;

6) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x, y = \arccos x,$
$y = arctg\ x, y = arcctg\ x$.

Определение. Функция, которую можно получить при помощи конечного числа арифметических операций над основными элементарными функциями, а также при помощи их композиций, называется элементарной.

Например, $y = 2^x + \cos x, y = e^{\sin x}$ – элементарные функции.

4.3 Предел функции

4.3.1 Окрестность точки и бесконечности

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\delta(\in \mathbb{R}) > 0$.

Определение. δ-окрестностью точки x_0 будем называть интервал $\mathrm{U}_\delta(x_0)=(x_0-\delta; x_0+\delta)$ (рисунок 4.4).

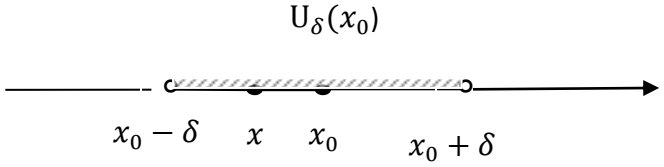


Рисунок 4.4 – δ-окрестность точки

Заметим, что $x \in U_\delta(x_0) \Leftrightarrow |x-x_0| < \delta$.

Определение. δ-окрестность точки x_0, из которой исключена сама точка x_0, называется проколотой δ-окрестностью, которая обозначается $\mathring{\mathrm{U}}_\delta(x_0)$.

Очевидно, что $\mathring{\mathrm{U}}_\delta(x_0) = (x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$.

Определение. δ-окрестностью бесконечности называют множество всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $|x| > \delta$, то есть $\mathrm{U}_\delta(\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \delta\}$.

Аналогично определяются δ-окрестности для $+\infty$ и $-\infty$ (рисунок 4.5):

$$\mathrm{U}_\delta(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \delta\}, \qquad \mathrm{U}_\delta(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\delta\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{U}_\delta(\infty) = \mathrm{U}_\delta(-\infty)\cup\mathrm{U}_\delta(+\infty)$.



Рисунок 4.5 – δ-окрестности для $+\infty$ и $-\infty$

4.3.2 Понятие предела функции

Пусть числовая функция $f(x)$ определена в некоторой выколотой окрестности точки x_0 и может быть определена и в самой точке x_0.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (также пределом при x, стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ принадлежат ε-окрестности точки A.

И записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Последнее выражение читается так: «$f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к x_0».

Используя кванторы общности ∀ (читается как «для любого», «для всех») и существования ∃ (читается как «существует») определение предела функции можно записать следующим образом:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(A).$$

Знак ∀ − перевернутое A – первая буква слова All – все (англ.),

знак ∃ − перевернутое E – первая буква слова Exist – существовать (англ.).

Определим предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in \mathrm{U}_\delta(\infty) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(A).$$

Аналогично определяются понятия пределов функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

4.3.3 Односторонние пределы функции

Определение. Правой (левой) δ-окрестностью точки x_0 называют полуинтервал $\mathrm{U}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$ $(\mathrm{U}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0])$.

Определение. Правой (левой) выколотой δ-окрестностью точки x_0 называют интервал $\mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ $\left(\mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)\right)$.

Определение. Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall\, x \in \mathring{\mathrm{U}}_{\delta}^{+}(x_0)\ \left(\forall\, x \in \mathring{\mathrm{U}}_{\delta}^{-}(x_0)\right)\ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{U}_{\varepsilon}(A),$$

при этом пишут

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \quad \left(A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\right).$$

Замечание. Когда мы рассматриваем односторонние пределы в точке $x = 0$, то достаточно писать $x \to +0$ или $x \to -0$.

Правый (левый) предел функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают также $f(x_0 - 0)$ $(f(x_0 + 0))$ соответственно.

Пример 4.5. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

И найдём её односторонние пределы в точке $x = 0$.

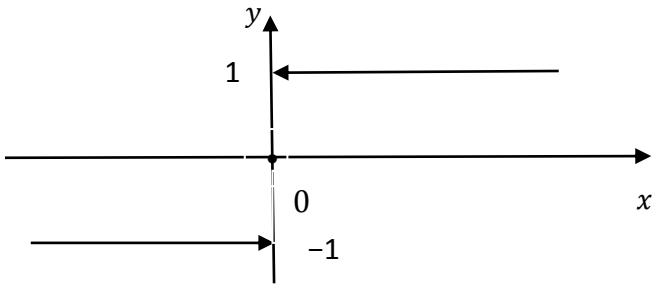


Рисунок 4.6 – График функции $\operatorname{sign}(x)$

Решение. Данная функция имеет односторонние пределы в точке $x = 0$, причём (рисунок 4.6)

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sign}(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{sign}(x) = -1.$$

Теорема. (Условие существования предела функции). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0 \Leftrightarrow$ в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

4.3.4 Правила нахождения пределов

Можно показать, что

$$\lim_{x\to x_0} C = C, \text{ где } C = const;$$

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Свойства пределов

Пусть существуют указанные пределы:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} g(x),$$

тогда существует каждый из пределов, указанных в левых частях, причем выполняются следующие правила:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

2.1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x);$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $g(x)\neq 0$ при $x \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Пример 4.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-1}{4x+7}$.

Решение. Применим свойства пределов:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-1}{4x+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+3x-1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(4x+7\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}(-1)}{\lim\limits_{x\to 2}4x+\lim\limits_{x\to 2}7}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-1}{4\lim\limits_{x\to 2}4x+7}=\frac{2\cdot 2^2+3\cdot 2-1}{4\cdot 2+7}=\frac{13}{15}.$$

На этом примере можно легко убедиться, что для того чтобы вычислить предел функции при $x \to x_0$, необходимо в функцию вместо x подставить её предельное значение.

4.3.5 Замечательные пределы

Приводимые здесь замечательные пределы носят такое название, потому что они широко используются при решении как теоретических, так и практических задач.

- Первый замечательный предел:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

- Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

И, как следствие:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

4.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

4.4.1 Понятия бесконечно малой и бесконечно большой функций

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если, каково бы ни было сколь угодно большое число M, найдется такое $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от M), что $|f(x)| > M$ для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Тот факт, что функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, будем записывать следующим образом: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

При этом мы будем записывать:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty,$$

если функция бесконечно большая и в окрестности точки сохраняет указанный знак.

Пример 4.7. Найти пределы функции $f(x)=e^x$ в точках $x=0$, $x=2$, а также при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Решение. Воспользуемся свойствами функции e^x (рисунок 4.7):

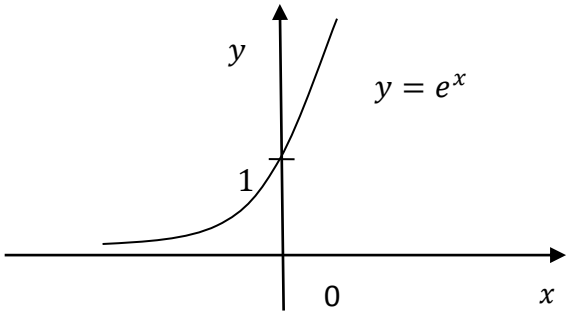


Рисунок 4.7 – График экспоненты

$$\lim_{x\to0} e^x = 1;$$

$$\lim_{x\to2} e^x = e^2;$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0;$$

4.4.2 Свойства бесконечно малых функций

Свойство 1. Сумма и произведение двух бесконечно малых в точке $x=x_0$ функций являются функциями бесконечно малыми в этой точке.

Пусть $X\subseteq\mathbb{R}$ −некоторый промежуток числовой оси.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на отрезке $[a;b]$, если найдется такое число $C(c)$, что будет выполнено неравенство $f(x)<C$ $(f(x)>c)$.

Наименьшее из чисел *C*, для которых выполняется неравенство $f(x) < C$, называется наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Наибольшее значение функции принято обозначать *m*.

Наибольшее из чисел *c*, для которых выполняется неравенство $f(x) > c$, называется наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, которое принято обозначать *M*.

Функция, ограниченная и сверху и снизу на отрезке $[a,b]$, называется ограниченной на этом отрезке.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на $\mathbb{R}$. Действительно, существует число $M = 1 : \forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\sin x| \leq 1$.

Свойство 2. Произведение бесконечно малой в точке $x = x_0$ функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая в этой точке.

Теорема. (Условие существования предела функции). Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой в точке x_0.

4.4.3 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$.

Различают следующие варианты сравнения бесконечно малых функций.

1. Если $c = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$.

2. Если $(c \neq 0) \& (c \neq \infty)$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка малости.

В частности, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые, и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

3. Если $c = \infty$, то говорят, что $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные варианты сравнений.

Правило эквивалентного перехода. При рассмотрении предела произведения или отношения бесконечно малых в одной и той же точке функций, эти функции можно заменять их эквивалентными вблизи точки рассмотрения, не изменив существования и величины предела.

Опираясь на замечательные пределы и следствия из них, можно привести примеры следующих эквивалентных бесконечно малых:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$;
2. $tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$;
3. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$;
4. $arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$;
5. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$;
6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$.

Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ есть неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ или ∞.

Раскрыть неопределённость – это значит вычислить предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Пример 4.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x \arcsin 2x}{tg^2 5x}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x = 0$ и получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\arcsin 2x}{\operatorname{tg}^2 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow$$

Применим правило эквивалентного перехода: заменим бесконечно малые функции на им эквивалентные, для этого учитываем, что

$$\arcsin 2x\sim 2x,\ \operatorname{tg}^2 5x\sim(5x)^2 \text{ при } x\to 0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 2x}{(5x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{25x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{25}=\frac{6}{25}.$$

Пример 4.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x-2)}{\operatorname{arctg}(4x-4)}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=1$ и получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{\operatorname{arctg}(4x-4)}=\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow$$

Применим правило эквивалентного перехода: заменим бесконечно малые функции на им эквивалентные, у нас в примере

$$\sin(2x-2)\sim 2x-2,\ \operatorname{arctg}(4x-4)\sim 4x-4 \text{ при } x\to 1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{4x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{4(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

4.4.4 Раскрытие некоторых видов неопределенностей

Бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой: если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая. И наоборот, если $\varphi(x)$ – бесконечно малая в точке a функция, и она определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ – бесконечно большая в точке x_0.

Пример 4.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{7x^2-x+8}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{7x^2-x+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

В числителе и знаменателе рассматриваемой функции мы видим многочлены. Вынесем за скобки старшие степени числителя и знаменателя:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)}=$$

Так как $x\to\infty$ (то есть $x-$ бесконечно большая), то $\dfrac{1}{x}$ − бесконечно малая. Значит $\dfrac{1}{x}\to 0$, тогда

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{7x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$$

На этом примере можно убедиться в том, что если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются многочленами, то для раскрытия неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ при $x\to\infty$ достаточно найти предел отношения их старших степеней.

Пример 4.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x+2x^2}{8x^2-3x+9}$.

Решение. Сначала подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x+2x^2}{8x^2-3x+9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

А дальше найдем предел отношения старших степеней числителя и знаменателя:

$$\ominus \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{8x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{8} = \left(\frac{\infty}{8}\right) = \infty.$$

Пример 4.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{3x^2-13x-10}$.

Решение. Подставим вначале в данное выражение предельное значение аргумента $x=5$, однако получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{3x^2-13x-10} = \left(\frac{0}{0}\right) \ominus$$

Для раскрытия данной неопределённости можно числитель и знаменатель разложить на произведение простых множителей, а затем сократить множители, которые дают нули.

Для этого в числителе можно применить формулу «разность квадратов»:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

а в знаменателе формулу разложения квадратного трехчлена на произведение линейных множителей:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена.

Найдём корни квадратного трехчлена, для этого решим уравнение

$$3x^2-13x-10=0.$$

$$D=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot 3\cdot(-10)=169+120=289=17^2;$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-13)\pm\sqrt{289}}{2\cdot 3}=\frac{13\pm 17}{6};$$

$$x_1=\frac{13+17}{6}=\frac{30}{6}=5;$$

$$x_2=\frac{13-17}{6}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}.$$

Тогда $3x^2-13x-10=3(x-5)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(x-5)(3x+2)$, значит

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(3x+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{3x+2}=\left(\frac{10}{17}\right)=\frac{10}{17}.$$

Для раскрытия неопределённостей вида $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$ необходимо свести их к неопределённостям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

Решение. Подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=3$ и получим неопределённость вида $(\infty-\infty)$:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{6}{0}\right)=(\infty-\infty)\Rightarrow$$

Чтобы раскрыть такую неопределенность, мы приведем дроби к общему знаменателю и найдем их разность:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{1(x+3)-6}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

Пример 4.14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}-2x^2\right)$.

Решение. Подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость вида $(\infty-\infty)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}-2x^2\right)=(\infty-\infty)\Rightarrow$$

Для избавления от неопределённости в случае, когда функция содержит иррациональное выражение, домножим и разделим её на сопряженное:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}-2x^2\right)\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^4+x^2+2}\right)^2-\left(2x^2\right)^2}{\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+x^2+2-4x^4}{\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{\sqrt{4x^4+x^2+2}+2x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow$$

Дальше применим правило старших степеней. Чтобы найти старшую степень знаменателя, возьмём отдельно старшую степень корня:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Пример 4.15. Найти предел $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{x+6}{\sqrt{3-x}-3}$.

Решение. Вначале подставим в данное выражение предельное значение аргумента $x=-6$, однако получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to -6} \frac{x+6}{\sqrt{3-x}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow$$

Для раскрытия такой неопределённости применим тот же прием, что и в примере 4.14, то есть числитель и знаменатель дроби домножим на сопряженное знаменателю.

$$\Rightarrow \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}-3\right)\left(\sqrt{3-x}+3\right)} = \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-3^2} =$$

$$= \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-3^2} = \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{3-x-9} = \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{-x-6} =$$

$$= \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)\left(\sqrt{3-x}+3\right)}{-(x+6)} = \lim_{x\to -6} \frac{\sqrt{3-x}+3}{-1} = \left(\frac{6}{-1}\right) = -6.$$

Замечание. В случае неопределённостей вида (1^{∞}), (0^{∞}) или (∞^{0}) необходимо обозначить искомый предел символом A и прологарифмировать полученное выражение.

Пример 4.16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x-8}$.

Решение. Подставим вначале в данное выражение предельное значение аргумента $x=\infty$, однако получим неопределённость вида (1^{∞}):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x-8}=\left(1+\frac{3}{\infty}\right)^{\infty}=(1^{\infty}).$$

Обозначим

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x-8},$$

затем прологарифмируем полученное равенство:

$$\ln A=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x-8}\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x-8}=\lim_{x\to\infty}(7x-8)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\Subset$$

Подставим в последнее выражение предельное значение аргумента $x=\infty$ и получим неопределённость:

$$\Subset(\infty\cdot 0)\Subset$$

Для раскрытия этой неопределённости можем воспользоваться эквивалентностью бесконечно малых функций: $\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\sim\frac{3}{x}$ при $x\to\infty$:

$$\Subset\lim_{x\to\infty}(7x-8)\cdot\frac{3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(21-\frac{24}{x}\right)=(21-0)=21.$$

В итоге мы получили, что $\ln A=21$.

А далее воспользуемся определением логарифма и получим

$$A=e^{21}.$$

То есть окончательно

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x-8}=e^{21}.$$

4.5 Непрерывные функции

4.5.1 Понятие непрерывности

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x=x_0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в точке x_0, равный значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0, если существует правый (левый) предел функции в точке a, равный значению функции в этой точке.

Можно сказать, что функция $f(x)$:

- непрерывна в интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала;
- непрерывна на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в интервале (a,b) и непрерывна справа и слева в точках a и b соответственно.

Геометрический смысл непрерывности функции на некотором промежутке состоит в том, что график этой функции является непрерывной линией на данном промежутке.

Например: 1) функция $f(x)=x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$;

2) функция $g(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на интервалах $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, но не является непрерывной на $\mathbb{R}$ (рисунок 4.8).

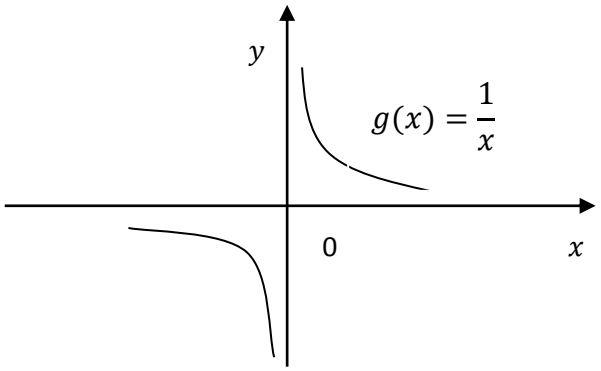


Рисунок 4.8 – График функции $g(x)=\frac{1}{x}$

4.5.2 Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема 1. Об ограниченности на отрезке непрерывной функции. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на $[a,b]$ своего наибольшего и наименьшего значений, то есть существуют такие точки x_m, $x_M \in [a;b]$, что $f(x_m)=m$, $f(x_M)=M$.

Теорема 3. Функция, непрерывная на отрезке, принимает все значения, заключенные между наименьшим и наибольшим, то есть

если μ: $m \le \mu \le M$, то найдется $x_\mu \in [a;b]$, такое что $f(x_\mu)=\mu$.

4.5.3 Точки разрыва

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=x_0$ и, может быть, в самой точке x_0.

Определение. Точка $x=x_0$, в которой функция $f(x)$ не является непрерывной, называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Различают следующие типы разрывов функции в точке.

1. Разрыв первого рода.

Точка $x=x_0$ называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные, левый и правый пределы.

Разрыв первого рода называется устранимым, если односторонние пределы совпадают. Разрыв первого рода называется неустранимым, если односторонние пределы не совпадают.

Пример 4.17. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Область определения функции: $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$, но определена в любой проколотой окрестности этой точки. Значит, в точке $x = 0$ функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не является непрерывной.

Найдём односторонние пределы функции в точке $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

Следовательно, точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода.

Этот разрыв можно устранить, доопределив функцию $f(x)$ в точке $x = 0$. А именно, определим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Такая функция $f_1(x)$ будет непрерывна на всей числовой оси.

Пример 4.18. Найти точки разрыва функции $f(x)=\operatorname{sign}(x)$.

Решение. Область определения функции: $D(f) = \mathbb{R}$.

Но, если мы рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x = 0$ (пример 4.6):

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{sign}(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to-0}\operatorname{sign}(x) = -1,$$

то можем убедиться, что точка $x = 0$ является точкой разрыва 1-го рода.

2. Разрыв 2-го рода.

Точка $x = x_0$ называется точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности, равен бесконечности).

Пример 4.19. Найти точки разрыва функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

Решение. Область определения функции: $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$, но определена в любой проколотой окрестности этой точки. Значит, в точке $x = 0$ функция $f(x)=\frac{1}{x}$ не является непрерывной.

Найдём односторонние пределы функции в точке $x = 0$ (рисунок 4.8):

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,$$

следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода.

4.6 Асимптоты графика функции

Если график функции неограниченно близко приближается к какой-то прямой при неограниченном удалении точек графика от начала координат, то такая прямая является асимптотой графика заданной функции.

Определение. Если для функции $f(x)$ выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$ (рисунок 4.9).

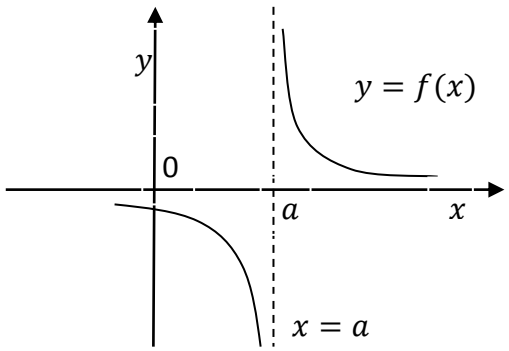


Рисунок 4.9 – Вертикальная асимптота графика

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется правой наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ (рисунок 4.10) в том случае, если

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Прямая $y = kx + b$ называется левой наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, в том случае, если

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Можно показать, что если существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x) - kx) = b, \tag{4.1}$$

тогда прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой.

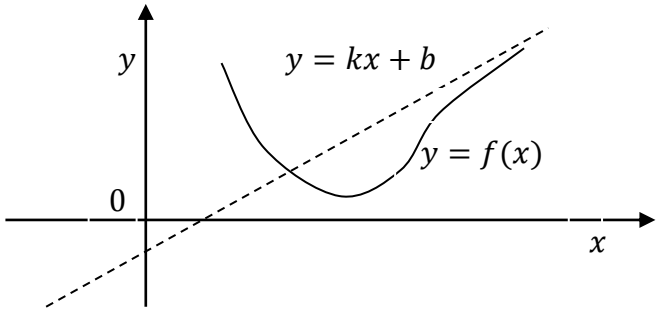


Рисунок 4.10 – Правая наклонная асимптота графика

Отметим, что для рациональных функций пределы (4.1) одинаковы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, поэтому левая и правая наклонные асимптоты к их графикам совпадают.

Пример 4.20. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{2x^2}{x-3}$.

Решение. 1. Найдем вначале область определения функции:

$$D(y):\ x\neq 3$$

или иначе

$$D(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty).$$

2. Нам известно, что вертикальные асимптоты могут проходить в точках разрыва функции либо на границе области ее определения.

В нашем случае функция не определена в точке $x=3$, поэтому проверим, будет ли прямая $x=3$ вертикальной асимптотой её графика. Найдём односторонние пределы функции в соответствующей точке:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{2x^2}{x-3}=\left(\frac{2\cdot 3^2}{3-0-3}\right)=\left(\frac{18}{-0}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{2x^2}{x-3}=\left(\frac{2\cdot 3^2}{3+0-3}\right)=\left(\frac{18}{+0}\right)=+\infty.$$

Отсюда следует, что прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой графика функции.

3. Выясним теперь, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Воспользуемся формулами (4.1) и учтём при этом, что рассматриваемая функция является рациональной:

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{(x-3)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2,$$

тогда

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x-3}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-2x^2+6x}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{x-3}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{x}=6.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y=2x+6$ при $x\to\pm\infty$.

Пример 4.21. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{5x^3}{x^2+8}$.

Решение. 1. Область определения функции – множество всех действительных чисел, то есть $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот.

3. Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Для этого применим формулы (4.1) и то, что данная функция рациональная.

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^3}{\left(x^2+8\right)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2}{x^2+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2}{x^2}=5,$$

тогда

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x^3}{x^2+4}-5x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^3-5x^3-40x}{x^2+4}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-40x}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-40x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-40}{x}=\left(\frac{-40}{\infty}\right)=0.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y=5x$ при $x\to\pm\infty$.

Пример 4.22. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{4x^2+3}$.

Решение. 1. Область определения функции – множество всех действительных чисел, то есть $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то график функции не имеет вертикальных асимптот.

3. Проверим, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}=-2.$$

Тут мы учли, что $\sqrt{x^2}=|x|$, а $|x|=-x$ при $x<0$ ($|x|=x$ при $x>0$).

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2,$$

тогда

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}-2x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}=\left(\frac{3}{\infty}\right)=0.$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=\left(\frac{3}{\infty}\right)=0.$$

Отсюда имеем, что график функции имеет наклонные асимптоты $y=2x$ при $x\to+\infty$ и $y=-2x$ при $x\to-\infty$.

4.7 Модель закона непрерывного роста

Пример 4.23. Банк выплачивает 10% годовых от суммы внесенного вами вклада. Определите, что выгоднее: оставить деньги в банке на год или через полгода закрыть текущий вклад и снова открыть, но пополнив его полученными процентами от вклада? Рассмотрите также случаи изъятия вклада через три месяца и через каждый месяц.

Решение. 1. Если 1 января внести в банк 100000 рублей, то в конце года на них будет начислено 10% годовых, что составит 10000 рублей. То есть вы получите в конце года 110000 рублей.

2. Если закрыть вклад через полгода, то есть 1 июля, то банком будет начислено 5%, что составит 5000 рублей. Вы снова откроете вклад, но уже на 105000 рублей. И за вторую половину года заработаете 5% уже от новой суммы, то есть 5250 рублей. То есть вы получите в конце года 110250, что на 250 рублей больше, чем в первом случае.

Поэтому, вместо того, чтобы вложить 1 января 100000 рублей и истребовать их в конце года, выгоднее 1 июля изъять весь вклад и вложить его снова, прибавив к нему выплаченные за полгода проценты.

3. Если же изъять вклад через три месяца, то есть 1 апреля, то вам будет начислено 2,5% от вложенной суммы, то есть 2500 рублей. Если вы снова оставите деньги в банке, причислите к 100000 рублей полученные 2500 рублей, то через 3 месяца вы снова получите 2,5% от вложенной суммы (от 102500 рублей), что составит 2562,5 рублей. Теперь вы откроете счет уже на 102500+2562,5=105062,5 рублей и еще через 3 месяца получите 2,5% от этой суммы, что составит 2626,5625 рублей. И снова откроете вклад уже на сумму 105062,5+2626,5625=107689,063 рубля. Через 3 месяца вы получите 2,5% от вложенной суммы (от 107689,063 рублей), что составит 2692,22657 рублей.

Прибавим выплаченные проценты к последней вложенной сумме: 107689,063+2692,22657=110381,29 рублей.

Таким образом, если закрывать вклад каждые три месяца и открывать снова, добавляя выплаченные проценты, то за год получим 110381,29 рублей. Очевидно, этот способ выгоднее двух предыдущих способов. Причем чем больше будет исходная сумма, тем больше будет и выгода от этого способа.

4. На расчетах, приведенных в трех предыдущих случаях, становится понятным, что еще выгоднее будет изымать и снова вносить вклад каждый месяц, каждую неделю и так далее.

Мы можем представить этот процесс в математической схеме как *модель непрерывного роста*.

Обозначим через x – начальную сумму вклада, а через y – годовой процент. Если ввести условие присоединения процентов по отдельным частям года равным $\frac{1}{n}$-ой доле от года, то по окончании одной такой части года полученная сумма будет равна:

$$x + x \cdot \frac{y}{100n} = x \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right) = x_1,$$

по прошествии двух частей –

$$x_1 + x_1 \cdot \frac{y}{100n} = x_1 \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right) = x \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right)^2 = x_2,$$

по прошествии трех частей –

$$x_2 + x_2 \cdot \frac{y}{100n} = x_2 \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right) = x \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right)^3$$

и так далее.

Таким образом, по окончании года сумма x превратится в сумму

$$x \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right)^n.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим, что по истечении двух лет сумма x превратится в сумму

$$x \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right)^{2n},$$

а по истечении k лет сумма x превратится в сумму

$$x \cdot \left(1 + \frac{y}{100n}\right)^{kn}.$$

Предположим теперь, что n – число частей, на которые делится год, неограниченно возрастает, то есть $n \to \infty$, тогда величина нарощенной суммы будет равна:

$$S = x \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{100n}\right)^{kn}.$$

Обозначим величину

$$\frac{y}{100n} = \frac{1}{a},$$

отсюда

$$n = \frac{ay}{100}, \quad kn = \frac{kay}{100}.$$

Поскольку при этом $a = \frac{100n}{y}$, то при неограниченном возрастании n также неограниченно растет и a.

Отсюда получаем

$$S = x \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{100n}\right)^{kn} = x \cdot \lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{\frac{kay}{100}} = x \cdot \left(\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}\right)^{\frac{ky}{100}}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} = e,$$

получим

$$S = x \cdot e^{\frac{ky}{100}}.$$

Для сравнения найдем величину S_1 – величину вклада при таком же проценте y через k лет при однократном изъятии вклада в конце срока:

$$S_1 = x \cdot \left(1+\frac{ky}{100}\right).$$

Для наглядности рассчитаем значения S и S_1 для суммы x=1000000 рублей, y=10% и t=10 лет, получим:

$$S = 1000000 \cdot e^{\frac{10\cdot 10}{100}} = 1000000e \approx 2718281 \text{рубль},$$

$$S_1 = 1000000 \cdot \left(1+\frac{10\cdot 10}{100}\right) = 1000000 \cdot (1+1) = 2000000 \text{рублей}.$$

Очевидно, что значение S всегда будет больше, чем значение S_1.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение функции. Что называется областью определения функции?
2. Каковы способы задания функции?
3. Приведите определение элементарной функции.
4. Дайте определение понятия предела функции.
5. Какая функция называется бесконечно малой?
6. Сформулируйте основные известные вам теоремы о пределах.
7. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке.
8. Приведите основные свойства непрерывных функций.
9. Перечислите правила раскрытия неопределённостей.

ГЛАВА 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1 Понятие производной

5.1.1 Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Для любой точки x из этой окрестности определим приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$.

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют разность

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю, и обозначают:

$$f'(x_0), \qquad y'(x_0), \qquad \frac{df(x_0)}{dx}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

5.1.2 Геометрический смысл производной

Пусть $y = k_0 x + b_0$ – уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рисунок 5.1).

Геометрический смысл производной заключается в следующем: значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, то есть

$$f'(x_0) = tg\ \varphi_0 = k_0. \qquad (5.2)$$

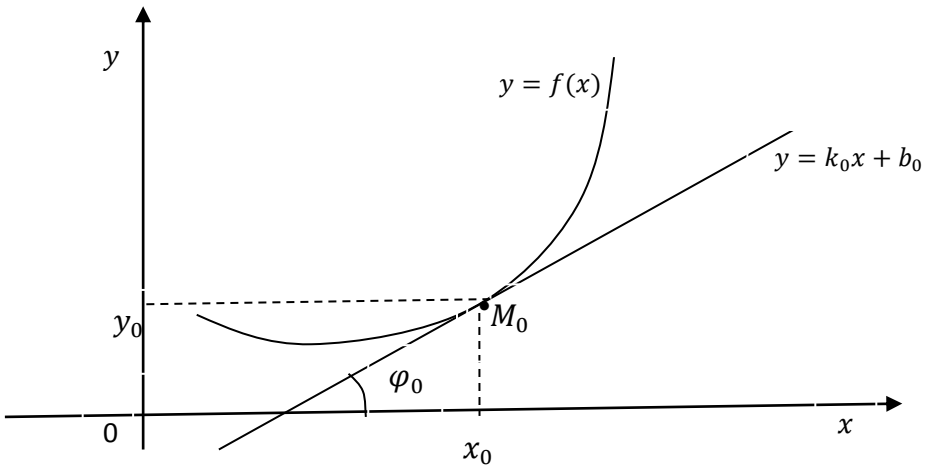


Рисунок 5.1 – Геометрический смысл производной

Это означает, что уравнение касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ может быть записано в виде:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.3}$$

5.1.3 Механический смысл производной

Пусть задана $s(t)$ – длина пути, который проходит материальная точка за указанное время t, отсчитываемое от некоторого начального момента времени t_0. Тогда средняя скорость точки на отрезке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ вычисляется по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Мгновенной скоростью точки в момент времени t_0 называют предел, при $\Delta t \to 0$, от средней скорости и обозначают $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Учитывая определение производной, получим

$$v(t_0) = s'(t_0),$$

то есть мгновенная скорость – это производная по времени закона движения.

5.1.4 Производная функции, заданной параметрически

Если функция задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$

где $t \in [\alpha; \beta)$ – параметр (ψ читается "пси"), то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{5.4}$$

5.1.5 Производная сложной функции

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда композиция функций $y = f(\varphi(t))$дифференцируема в точке t_0, причём

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$$

или, опуская значения аргумента,

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t.$$

5.1.6 Свойства производной. Таблица производных

Пользуясь определением производной, можно получить следующие факты, являющиеся инструментами вычисления производных.

1. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные, то их сумма, произведение и частное также имеют производные и при этом имеют место следующие правила, где $C = const$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

4.1. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - uv'}{v^2}$

5.1. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$

Таблица 5.1 − Формулы производных

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	1.1. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	1.2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
2. $(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$	2.1. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
3. $(log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot ln\, a}$	3.1. $(ln\, u)' = \frac{u'}{u}$
4. $(sin\, u)' = cos\, u \cdot u'$	5. $(cos\, u)' = -sin\, u \cdot u'$
6. $(tg\, u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$	7. $(ctg\, u)' = -\frac{u'}{sin^2 u}$
8. $(arc\, sin\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	9. $(arc\, cos\, u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10. $(arc\, tg\, u)' = \frac{u'}{u^2+1}$	11. $(arc\, ctg\, u)' = -\frac{u'}{u^2+1}$

Пример 5.1. Найти производную функции $y = 3x^2 - 5x + 7 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}$.

Решение. Используя правила и формулы производных из таблицы 5.1, получаем:

$$y' = \left(3x^2 - 5x + 7 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}\right)' =$$

сначала применим правило (3)

$$= \left(3x^2\right)' - \left(5x\right)' + \left(7\right)' - \left(2\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{3}{x^3}\right)' =$$

дальше применим правило (4), к третьему слагаемому – правило (1), последнее слагаемое преобразуем

$$= 3\left(x^2\right)' - 5\left(x\right)' + 0 - 2\left(\sqrt{x}\right)' + 3\left(x^{-3}\right)' = 3 \cdot 2x^{2-1} - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2\sqrt{x} + 3\left(-3\right)x^{-3-1} =$$

формула (1) таблицы 5.1 — правило (2) — формула (1.1) таблицы 5.1 — формула (1) таблицы 5.1

$$= 6x - 5 - 4\sqrt{x} - 9x^{-4}.$$

Пример 5.2. Найти производную функции $y = \sin(5x+6)\cdot \log_2\left(x^2-3\right)$.

Решение. Используем правило (4) и получаем:

$$y' = \left(\sin(5x+6)\right)'\cdot \log_2\left(x^2-3\right) + \sin(5x+6)\cdot\left(\log_2\left(x^2-3\right)\right)' =$$

формула (4) таблицы 5.1

формула (3) таблицы 5.1

$$= \cos(5x+6)\cdot(5x+6)'\cdot \log_2\left(x^2-3\right) + \sin(5x+6)\cdot \frac{\left(x^2-3\right)'}{\left(x^2-3\right)\cdot \ln 2} =$$

$$= 5\cos(5x+6)\cdot \log_2\left(x^2-3\right) + \sin(5x+6)\cdot \frac{2x}{\left(x^2-3\right)\cdot \ln 2}\ .$$

Легко можно убедиться в том, что

$(5x+6)' = (5x)' + (6)' = 5+0 = 5$, $\left(x^2-3\right)' = \left(x^2\right)' - (3)' = 2x+0 = 2x$.

Пример 5.3. Найти производную параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = a\cos 3x, \\ y = a\sin 3t. \end{cases}$$

Решение. Найдем вначале производные $x'_t = -3a\sin 3t$, $y'_t = 3a\cos 3t$ и воспользуемся формулой (5.4):

$$y'_x = \frac{3a\cos 3t}{-3a\sin 3t} = -\operatorname{ctg} 3t\ .$$

Пример 5.4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{6x+7}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение. Для решения воспользуемся формулой (5.3):

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдём $y' = \dfrac{(6x+7)'}{2\sqrt{6x+7}} = \dfrac{6}{2\sqrt{6x+7}} = \dfrac{3}{\sqrt{6x+7}}$,

отсюда следует: $y'(x_0) = \dfrac{3}{\sqrt{18+7}} = \dfrac{3}{5}$, а $y(x_0) = \sqrt{18+7} = 5$,

тогда по формуле (5.3) имеем:

$$y = 5 + \frac{3}{5}(x-3) \quad \Big| \cdot 5,$$

$$5y = 25 + 3(x-3),$$

$$5y = 25 + 3x - 9.$$

Таким образом, касательная к графику заданной функции в точке $x_0 = 3$ задаётся уравнением

$$3x - 5y + 16 = 0.$$

5.1.7 Производная неявно заданной функции

Чтобы найти производную функции, заданной неявно уравнением $F(x; y) = 0$, необходимо продифференцировать обе части данного уравнения, а затем выразить из полученного равенства y'.

Пример 5.5. Найти производную функции, заданной неявно уравнением $5x^2 y + 7\operatorname{tg} 8y = 5\ln 7x$.

Решение. Продифференцируем вначале обе части уравнения, учитывая, что

$y = f(x)$: $\quad 10xy + 5x^2\, y' + 7 \cdot \dfrac{8y'}{\cos^2 8y} = 5 \cdot \dfrac{7}{7x}$.

Затем выразим из полученного равенства y':

$$\left(5x^2 + \frac{56}{\cos^2 8y}\right) y' = \frac{5}{x} - 10xy \text{ или } y' = \frac{\dfrac{5}{x} - 10xy}{5x^2 + \dfrac{56}{\cos^2 8y}} = \frac{5\left(1 - 2x^2 y\right)\cos^2 8y}{x\left(5x^2 \cos^2 8y + 56\right)}.$$

5.1.8 Дифференциал функции, связь с производной

Пусть, как и выше, функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ – приращение функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Определение. Говорят, что функция $f\left(x\right)$ дифференцируема в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая в точке x_0 функция.

Дифференциалом функции называют главную часть приращения $A\Delta x$, линейно зависящую от приращения аргумента.

Дифференциал принято обозначать dy или df, поэтому $dy = A\Delta x$.

Теорема. Функция $f\left(x\right)$ имеет в точке x_0 дифференциал тогда и только тогда, когда она в этой точке имеет производную.

При выполнении этого условия $A = f'\left(x_0\right)$ и, кроме того, $dx = \Delta x$, поэтому $dy = f'\left(x_0\right)dx$.

Замечание. Ввиду справедливости теоремы выражения «функция имеет производную» и «функция дифференцируема» будем применять как синонимы.

Поскольку $\Delta y = A\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right) = dy + \alpha\left(\Delta x\right)$, то имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy = f'\left(x_0\right)dx$. Но тогда $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)dx$.

При этом погрешность приближения, равная $\alpha(\Delta x)\Delta x$, является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$.

5.1.9 Производные и дифференциалы высших порядков

Производную $f'(x)$ будем называть первой производной функции $f(x)$.

Определение. Производная от первой производной функции $f(x)$ называется второй производной или производной второго порядка и обозначается $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$, то есть

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Производная порядка n определяется как производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^n(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Пример 5.6. Найти производные старших порядков функции

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 6.$$

Решение. $y' = 9x^2 - 4x;\ \ y'' = 18x - 4;\ \ y''' = 18;\ y^{(4)} = 0.$

Очевидно, что $y^{(n)} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4.$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке. Тогда

$$dy = f'(x)dx.$$

Определение. Дифференциалом второго порядка называют дифференциал от первого дифференциала, то есть

$$d^2y = d(dy).$$

Найдем второй дифференциал. Полагая dx постоянной величиной, получим в этом случае

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) =$$

(по определению дифференциала)

$$= (f'(x)dx)'dx =$$

(вынесем постоянный множитель dx за знак производной)

$$= dx \cdot \left(f'(x)\right)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Мы получили следующее:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично можно вывести формулу для дифференциала порядка n:

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n. \tag{5.5}$$

Отсюда получаем, что производная порядка n может быть записана в следующем виде:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{(dx)^n} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{5.6}$$

5.2 Правило Лопиталя

При раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ часто используют правило Лопита́ля.

Теорема. (Теорема Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ либо обе бесконечно малые, либо обе бесконечно большие в точке $x = a$.

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

при этом эти пределы равны, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 5.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$**.**

Решение. (Символ *Л* над знаком равенства означает, что мы используем правило Лопиталя).

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{Л}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{Л}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5x}{e^x}$.

Решение. (Символ *Л* над знаком равенства означает, что мы используем правило Лопиталя).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-5x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-5\right)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0.$$

Пример 5.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2\pi}\left(x-2\pi\right)\mathrm{ctg}x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to2\pi}\left(x-2\pi\right)\mathrm{ctg}x=\left(0\cdot\infty\right)$.

Преобразуем произведение, стоящее под знаком предела, в частное, используя, что $ctg\,x=\dfrac{1}{tg\,x}$:

$$\lim_{x\to2\pi}\left(x-2\pi\right)\mathrm{ctg}x=\lim_{x\to2\pi}\frac{x-2\pi}{\mathrm{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{Л}{=}\lim_{x\to2\pi}\frac{\left(x-2\pi\right)'}{\left(\mathrm{tg}x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2x}}=\lim_{x\to2\pi}\cos^2x=\cos^2 2\pi=1.$$

5.3 Модель прямолинейного движения

Пример 5.10. Прямолинейное движение материальной точки происходит по закону

$$S(t)=\frac{t^3}{3}+6t,$$

где t – время, ч;

S – путь, км.

Определить скорость и ускорение данной материальной точки в момент времени t = 5 ч.

Решение. Известно, что скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, равна первой производной от пути, то есть

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 6t \right)' = \frac{3t^2}{3} + 6 = t^2 + 6.$$

Вычислим значение скорости данной материальной точки в момент времени $t = 5$ ч:

$$v(5) = 5^2 + 6 = 25 + 6 = 31 \text{км/ч}.$$

Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, равно первой производной от скорости или второй производной от пути, то есть

$$a(t) = v'(t) = S''(t) = \left(t^2 + 6 \right) = 2t.$$

Вычислим значение ускорения данной материальной точки в момент времени $t = 5$ ч:

$$a(5) = 2 \cdot 5 = 10 \text{км/с}^2.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. Дайте определение дифференциала функции.
4. Как продифференцировать функцию, которая задана неявно?
5. Приведите формулу производной для параметрически заданной функции.
6. Дайте определение второй производной функции.
7. Запишите правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

ГЛАВА 6 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

6.1 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема. (Теорема Ферма́). Пусть функция $y = f(x)$определена в интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если существует производная этой функции в точке x_0, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

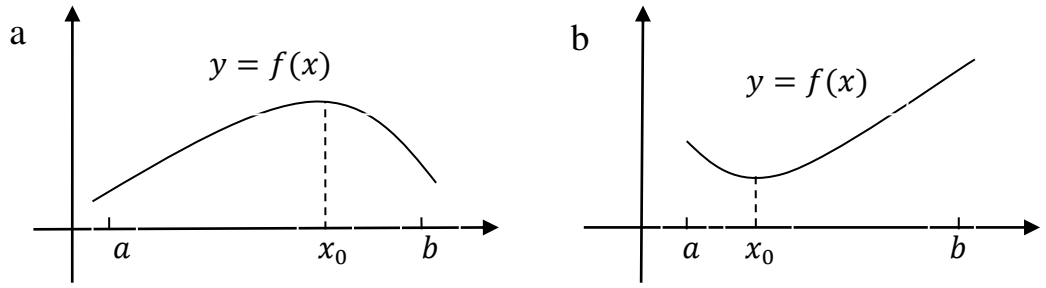
Теорема. (Теорема Ро́лля). Пусть функция$f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема в интервале (a, b);

3) $f(a) = f(b)$,

тогда $\exists\,(\cdot)c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.



Если $\exists\, f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Рисунок 6.1 – Иллюстрация к теореме Ферма

Теорема. (Теорема Лагра́нжа). Пусть функция$f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема в интервале (a, b),

тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Теорема. (Теорема Коши́). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a,b]$, дифференцируемы в интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$, тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

6.2 Исследование функций с помощью производных

Изучение характера поведения функции и построения ее графика является одной из важнейших задач математического анализа.

6.2.1 Возрастание и убывание функций

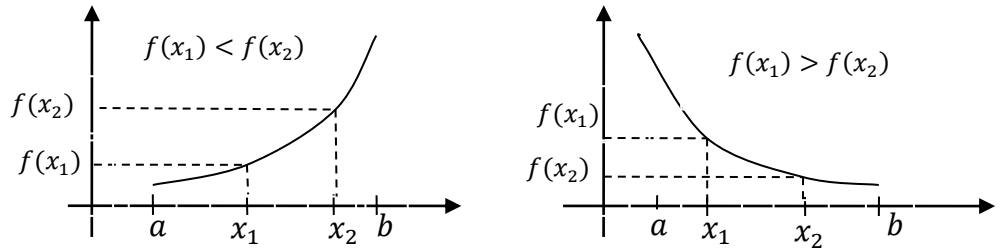
Пусть $X \subset \mathbb{R}$ − некоторый промежуток числовой оси.

Определение. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2)\big(f(x_1) > f(x_2)\big). \qquad (6.1)$$

Если в неравенстве (6.1) допускается знак $\leq$ $(\geq)$, то функция называется неубывающей (невозрастающей).

Возрастающую или убывающую на некотором промежутке функцию называют монотонной на этом промежутке.



Функция возрастает на (a,b) Функция убывает на (a,b)

Рисунок 6.2 – Монотонность функции

Теорема. (Признак монотонности). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0 (f'(x) < 0) \forall x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Замечание. Признак неубывания, при $f'(x) \geq 0$, и невозрастания, при $f'(x) \leq 0$, формулируется и доказывается аналогично.

6.2.2 Экстремумы функции

Определение. Пусть функция $f: X \to Y,\ X, Y \subset \mathbb{R}$. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$, выполняется неравенство:

$$f(x) \leq f(x_0);$$

$$\big(f(x) \geq f(x_0)\big).$$

Определение. Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции.

Определение. Значение функции $f(x_0)$ в точке экстремума x_0 называют экстремумом функции.

На рисунке 6.3 показаны: x_1 и x_3 – точки максимума, x_2 – точка минимума, причем $f(x_1)$ и $f(x_3)$ – максимумы, а $f(x_2)$ – минимум.

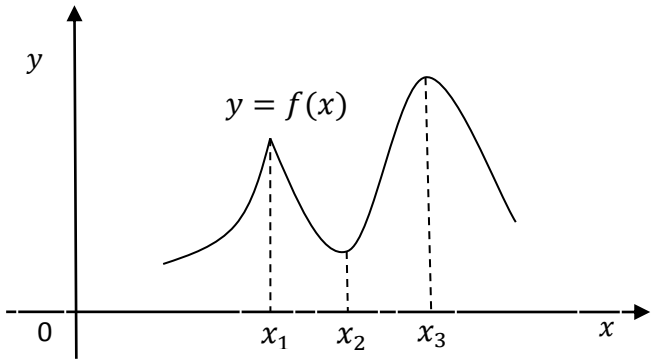


Рисунок 6.3 – Точки экстремума

Теорема. (Необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то производная функции в этой точке либо не существует, либо равна нулю, то есть, или $\nexists f'(x_0)$ или $f'(x_0) = 0$.

Определение. Точка x_0 области определения функции $f(x)$, в которой производная $f'(x_0)$ либо не существует, либо $f'(x_0) = 0$, называется критической точкой.

Из теоремы о необходимом условие экстремума можно сделать вывод, что любая точка экстремума функции является критической точкой.

Поэтому точки экстремума мы ищем среди критических точек.

Замечание. Не всякая критическая точка является точкой экстремума. Например, для функции $f(x) = x^3$, производная $f'(x) = 0$ при $x = 0$, следовательно, точка $x = 0$ является критической. Но эта точка не является точкой экстремума (рисунок 6.4).

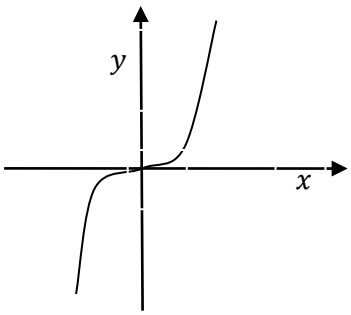


Рисунок 6.4 – График функции $y = x^3$

Поэтому последняя теорема является необходимым, но не достаточным условием экстремума.

А для того чтобы выяснить, какие критические точки являются точками экстремума, будем использовать достаточное условие экстремума.

Теорема. (Достаточное условие экстремума). Пусть x_0 – критическая точка и пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой выколотой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция имеет максимум (минимум). Если же $f'(x)$ не меняет знак в некоторой δ-окрестности точки x_0, то данная функция не имеет экстремума в этой точке.

Напомним обозначения для правой и левой выколотых δ-окрестностей точки x_0: $\mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta), \mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$.

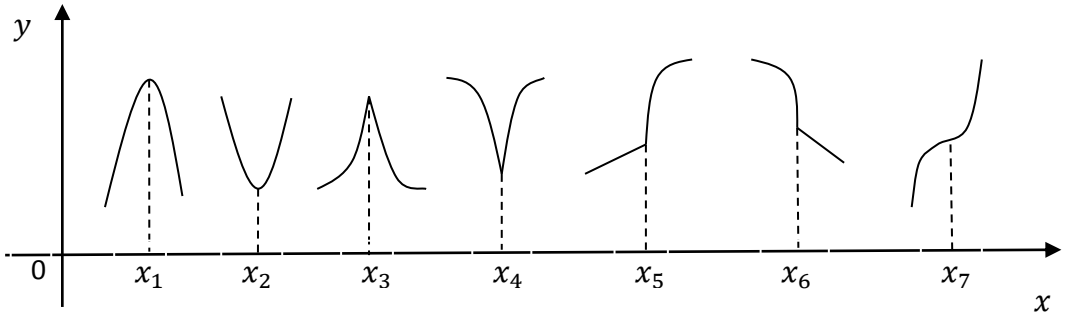


Рисунок 6.5 – Критические точки

На рисунке 6.5 приведены различные варианты, которые могут быть в критических точках.

Рассмотрим такие случаи более подробно:

1) $f'(x_1) = 0$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_1)$, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_1)$, x_1 – точка максимума;
2) $f'(x_2) = 0$, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_2)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_2)$, x_2 – точка минимума;
3) $f'(x_3)$ не существует, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_3)$, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_3)$, x_3 – точка максимума;
4) $f'(x_4)$ не существует, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_4)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_4)$, x_4 – точка минимума;
5) $f'(x_5)$ не существует, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^-(x_5)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta^+(x_5)$, x_5 – не является точкой экстремума;

6) $f'(x_6)$ не существует, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta^-(x_6)$, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta^+(x_6)$, x_6 – не является точкой экстремума;
7) $f'(x_7) = 0$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta^-(x_7)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta^+(x_7)$, x_7 – не является точкой экстремума.

Приведем примерную схему исследования функции на экстремум:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки, то есть такие точки из $D(f)$, в которых:
   a) $f'(x)$ не существует;
   b) $f'(x) = 0$.
4. На числовой оси отметить:
   a) область определения функции $D(f)$;
   b) критические точки.
5. На полученных промежутках области определения функции найти знаки производной $f'(x)$.
6. Указать промежутки возрастания и убывания функции, сделать вывод о наличии точек экстремума у исследуемой функции.
7. Вычислить экстремумы функции, если они существуют.

Пример 6.1. Найти интервалы монотонности функции $y = 8x^3 + 21x^2 - 12x + 1$.

Решение. 1. Сначала найдем область определения функции – это множество всех действительных чисел, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = 24x^2 + 42x - 12 = 6\left(4x^2 + 7x - 2\right)$.

3. Производная $y' = 0$, если $6\left(4x^2 + 7x - 2\right) = 0$,

$$x_1 = -2,\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

4. Затем на оси *OX* отметим область определения функции (в нашем случае область определения – это вся действительная ось) и критические точки (рисунок 6.6).

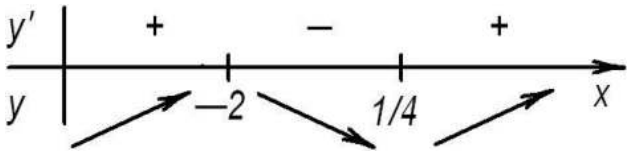


Рисунок 6.6 – Интервалы монотонности к примеру 6.1

5. На полученных промежутках области определения функции найдём знаки производной $f'(x)$ и отметим их знаки на рисунке.

6. Интервалы возрастания и убывания функции отметим стрелками на том же рисунке.

7. Видим, что функция $y = 8x^3 + 21x^2 - 12x + 1$ возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$ и $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, а убывает на интервале $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$.

Пример 6.2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ на экстремум.

Решение. 1. Найдем в первую очередь область определения функции: $D(y): x \neq 1$ или $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - \left(x^2 - 2x + 2\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

3. $y' = 0$, если

$x(x-2) = 0$,

$x_1 = 0,\ x_2 = 2$

y' не существует, если

$(x-1)^2 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1 \notin D(y)$

Критическими точками будут точки $x_1 = 0,\ x_2 = 2$, в которых производная $y' = 0$.

Точка $x_3 = 1$, в которой производная y' не существует, не принадлежит области определения функции, следовательно, она не является критической.

4. На оси OX отметим область определения функции (выколем точку $x = 1$) и критические точки (рисунок 6.7).

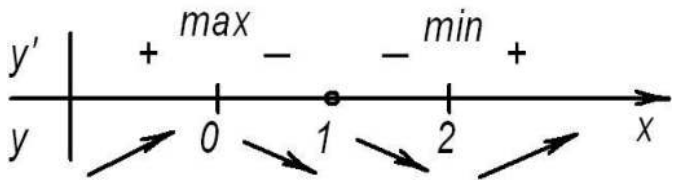


Рисунок 6.7 – Интервалы монотонности к примеру 6.2

5. На полученных промежутках области определения функции найдём знаки производной $f'(x)$ и отметим их на рисунке.

6. Интервалы возрастания и убывания функции отметим стрелками.

7. Функция имеет максимум в точке $x = 0$: $y_{\max}(0) = -2$ и минимум в точке $x = 2$: $y_{\max}(2) = 2$.

Пример 6.3. Исследовать функцию $y = xe^{-x}$ на экстремум.

Решение. 1. Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$.

3. Производная $y' = 0$, если $e^{-x}(1 - x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$ или $x = 1$.

4. На оси *OX* отметим область определения функции (в нашем случае область определения – это вся действительная ось) и критические точки. На полученных интервалах определим и отметим знаки производной (рисунок 6.8).

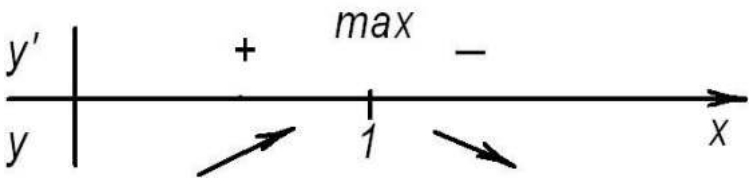


Рисунок 6.8 – Интервалы монотонности к примеру 6.3

5. На полученных промежутках области определения функции найдём знаки производной $f'(x)$ и отметим эти знаки на том же рисунке.

6. Соответствующие интервалы возрастания и убывания функции отметим стрелками на том же рисунке.

Таким образом получаем, что функция имеет максимум в точке $x=1$:

$$y_{\max}(1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

6.2.3 Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции

На практике часто встречаются задачи, которые сводятся к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции на некотором отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции можно использовать следующую схему:

1. Найти производную функции.
2. Найти критические точки (точки области определения функции, в которых производная не существует либо равна нулю) и отобрать те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.
3. Вычислить значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка.
4. Среди найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 6.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+5$ на отрезке $[-3;0]$.

Решение. 1. Вначале найдем производную функции:

$$y'=\left(2x^3+3x^2-12x+5\right)'=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right).$$

2. Затем критические точки:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -2 \in [-3; 0];$$

$$x_2 = 1 \notin [-3; 0].$$

3. Теперь вычислим значения функции y в точке $x_1 = -2$ и на концах отрезка:

$$y(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 5 = -16 + 12 + 24 + 5 = 25;$$

$$y(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) + 5 = -54 + 27 + 36 + 5 = 14;$$

$$y(0) = 5.$$

4. Выберем из найденных значений x наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-3;0]} y = 25;$$

$$\min_{[-3;0]} y = 5.$$

6.2.4 Выпуклость графика функции

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (a, b) и дифференцируема на нем.

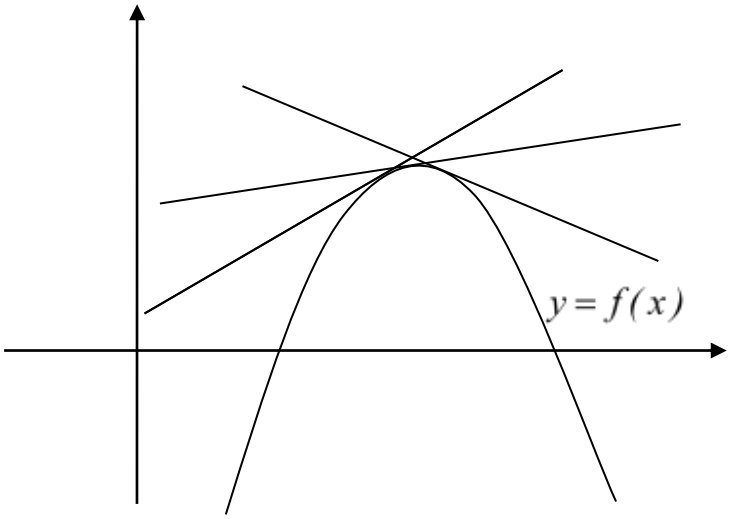


Рисунок 6.9 – Выпуклый вверх график

Определение. Говорят, что график функции $f(x)$ является выпуклым вверх (вниз) на интервале (a, b), если он расположен не выше (не ниже) любой касательной к нему на этом интервале (рисунки 6.9–6.10).

Выпуклый вниз график функции часто еще называют вогнутым.

Теорема. (Достаточное условие выпуклости графика функции).

Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ $\forall x \in (a, b)$, то график функции является выпуклым вверх (вниз) на этом интервале.

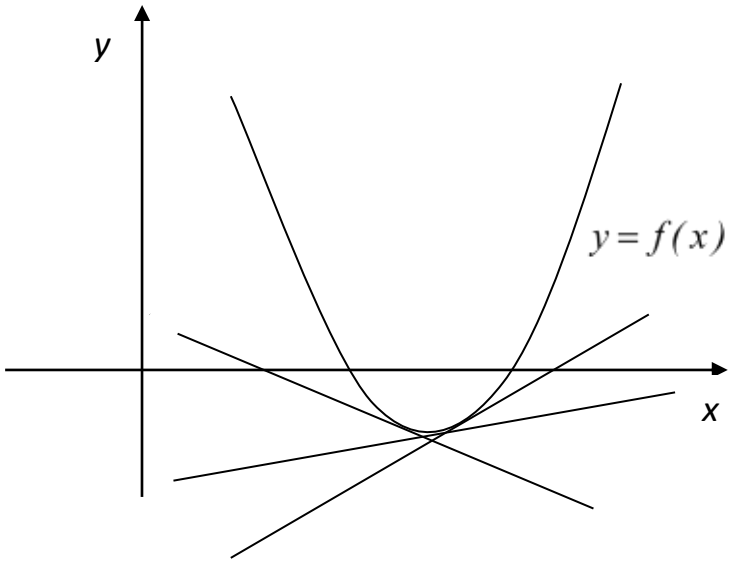


Рисунок 6.10 – Выпуклый вниз график

6.2.5 Точки перегиба графика функции

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $f(x)$, если при переходе через эту точку меняется направление выпуклости графика (рисунок 6.11).

Теорема. (Необходимое условие точки перегиба). Пусть $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика непрерывной функции $f(x)$. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 либо не существует, либо $f''(x_0) = 0$.

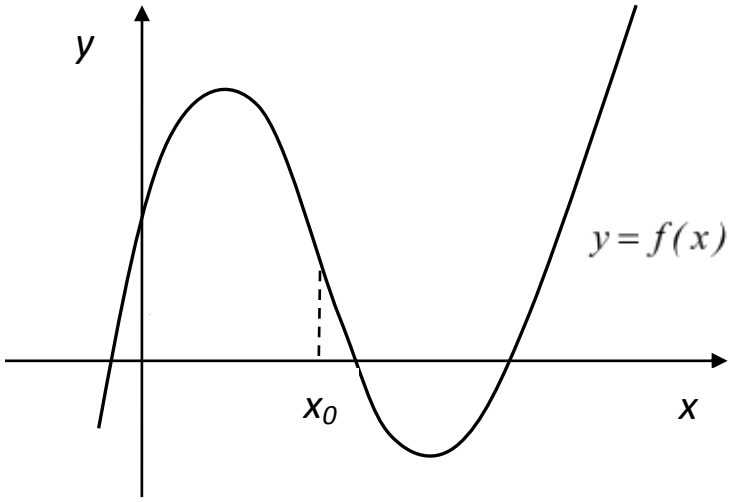


Рисунок 6.11 – Точка перегиба

Определение. Точка области определения функции $f(x)$, в которой $f''(x)$ либо не существует, либо $f''(x) = 0$, называется критической точкой второго рода.

Из доказанной теоремы следует, что абсциссы точек перегиба графика функции являются критическими точками 2-го рода. Поэтому абсциссы точек перегиба графика функции будем искать среди критических точек 2-го рода.

Замечание. Не всякая критическая точка 2-го рода является абсциссой точки перегиба графика функции.

Например, для функции $y = x^4$, $f''(0) = 0$, но точка $O(0,0)$ не является точкой перегиба графика данной функции (рисунок 6.12).

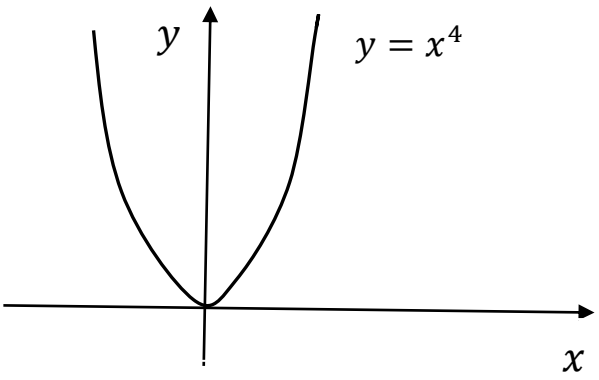


Рисунок 6.12 – Парабола $y = x^4$

Для того чтобы отобрать среди критических точек второго рода абсциссы точек перегиба, будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема. (Достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой выколотой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0, причем $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0. Тогда график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Приведем рекомендуемую схему нахождения точек перегиба:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
3. Найти критические точки 2-го рода, то есть точки из $D(f)$, в которых
   a) $f''(x)$ не существует;
   b) $f''(x) = 0$.
4. На числовой оси отметить:
   a) область определения функции $D(f)$;
   b) критические точки 2-го рода.
5. На полученных промежутках области определения функции найти знаки второй производной $f''(x)$.
6. Указать промежутки направления выпуклости графика функции, сделать вывод о наличии точек перегиба.
7. Определить точки перегиба, если они существуют.

Пример 6.5. Найти интервалы выпуклости графика функции $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

Решение. 1. Область определения функции – множество всех действительных чисел, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Найдём сначала первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{2x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{\left(2x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(2x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{4x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(2x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4x + 4x^3 - 4x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

А теперь вторую производную функции:

$$y'' = \left(\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} \right)' = \frac{(4x)'\left(1+x^2\right)^2 - 4x \cdot \left(\left(1+x^2\right)^2 \right)'}{\left(\left(1+x^2\right)^2 \right)^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \left(1+x^2\right)^2 - 4x \cdot 2\left(1+x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{\left(1+x^2\right)\left(4 \cdot \left(1+x^2\right) - 4x \cdot 2 \cdot 2x\right)}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{4 + 4x^2 - 16x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-12x^2 + 4}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-4\left(3x^2 - 1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

3. Найдём критические точки 2-го рода функции:

$$y'' = 0, \text{ если } 3x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 = 1 \;\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, функция имеет две критические точки 2-го рода: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. На оси *OX* отметим область определения функции и критические точки 2-го рода (рисунок 6.13).

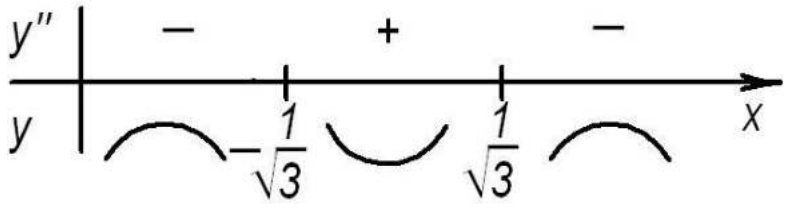


Рисунок 6.13 – Интервалы выпуклости для примера 6.5

5. На полученных интервалах определяем знаки второй производной и отмечаем их на рисунке.

6. Дугами на рисунке 6.13 отметим направления выпуклости графика функции.

Итак, график функции выпуклый (или выпуклый вверх) на интервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, вогнутый (или выпуклый вниз) на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Пример 6.6. Найти точки перегиба графика функции $y=2x^2+\ln x$.

Решение. 1. Найдем область определения функции $D(y)$: $x>0$ или $D(y)=(0;+\infty)$.

2. Найдём затем первую производную

$$y'=\left(2x^2+\ln x\right)'=4x+\frac{1}{x}=\frac{4x^2+1}{x},$$

а потом вторую производную

$$y''=\left(\frac{4x^2+1}{x}\right)'=\frac{\left(4x^2+1\right)'\cdot x-\left(4x^2+1\right)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{8x\cdot x-\left(4x^2+1\right)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{8x^2-4x^2-1}{x^2}=\frac{4x^2-1}{x^2}.$$

3. Критические точки второго рода функции:

$y''=0$, если	y' не существует, если
$4x^2-1=0$,	$x^2=0$,
$x_1=\frac{1}{2}\in D(y)$, $x_2=-\frac{1}{2}\notin D(y)$.	$x=0\notin D(y)$.

Значит, функция имеет одну критическую точку 2-го рода $x_1=\frac{1}{2}$. Точки $x=-\frac{1}{2}$ и $x=0$ не принадлежат области определения функции.

4. На оси OX отметим теперь область определения функции и критическую точку второго рода (рисунок 6.14).

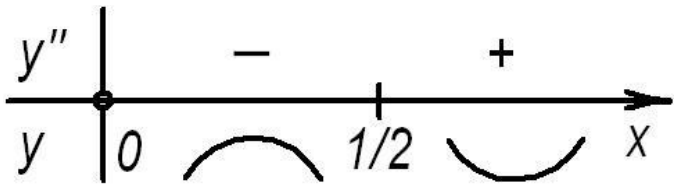


Рисунок 6.14 – Интервалы выпуклости к примеру 6.6

5. На полученных интервалах определим теперь знаки второй производной и отметим их на том же рисунке.

6. Затем дугами на рисунке 6.13 отметим направления выпуклости графика. Видим, что абсцисса точки перегиба $x_{m.n.} = \frac{1}{2}$, а соответствующая ей ордината $y_{m.n.} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2$.

Таким образом, получили, что $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2\right)$ – точка перегиба графика исследуемой функции.

Пример 6.7. Найти точки перегиба графика функции

$$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17.$$

Решение. 1. Найдем область определения заданной функции: $D(y) = \mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел:

2. $y' = 3x^2 + 18x + 24$;

$y'' = 6x + 18$.

3. Найдем критические точки второго рода:

а) видим, что вторая производная определена на множестве всех действительных чисел, поэтому нет точек, в которых вторая производная не существует;

б) $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

4. Теперь на числовой оси отметим область определения функции и найденную критическую точку (рисунок 6.15).

5. Затем найдем знаки второй производной y'' и отметим их на рисунке.

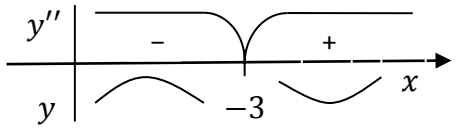


Рисунок 6.15 – Интервалы выпуклости для примера 6.7

6. Дугами на схеме покажем направления выпуклости графика функции. Видим, что абсцисса точки перегиба $x = -3$, и соответствующая ей ордината равна:

$$y = (-3)^3 + 9 \cdot (-3)^2 + 24 \cdot (-3) + 17 = -27 + 81 - 72 + 17 = -1.$$

Тогда получаем, что точка $M(-3; -1)$ является точкой перегиба графика функции.

6.2.6 Исследование функций и построение их графиков

Приведем рекомендуемую схему исследования функции:

1. Найти область определения функции.
2. Найти асимптоты графика этой функции (или доказать, что их не существует).
3. Исследовать данную функцию на экстремум.
4. Найти точки перегиба графика заданной функции.
5. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это необходимо).
6. Если требуется, то найти дополнительные точки графика функции.
7. Построить эскиз графика на основе анализа пунктов 1–6.

Пример 6.8. Проведите исследование функции $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$ и постройте эскиз её графика.

Решение. 1. Областью определения функции будет: $D(y)$: $x \neq 0$ или $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2.1. Очевидно, что заданная функция непрерывна повсюду, кроме точки $x=0$. Вычислим теперь её односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{x^3-4}{x^2}=\left(\frac{-4}{+0}\right)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{x^3-4}{x^2}=\left(\frac{-4}{+0}\right)=-\infty.$$

Таким образом получили, что точка $x=0$ является для заданной функции точкой разрыва 2-го рода, а прямая $x=0$ – вертикальной асимптотой.

2.2. Исследование графика функции на наличие наклонных асимптот $y=kx+b$.

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4}{x^2\cdot x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1;$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{x^2}=\left(\frac{-4}{\infty}\right)=0.$$

Таким образом, получаем, что прямая $y=x$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$.

3. Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности.

$$y'=\frac{3x^2\cdot x^2-\left(x^3-4\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{3x^3-2x^3+8}{x^4}=\frac{x^3+8}{x^4};$$

$y'=0$, если	y' не существует, если
$x^3+8=0,$	$x^4=0,$
$x=-2\in D(y),$	$x=0\notin D(y).$

Критической точкой 1-го рода является точка $x=-2$, в которой производная $y'=0$. Точка $x=0$, в которой производная y' не существует, не принадлежит области определения функции.

На числовой оси отметим область определения функции (выкалываем точку $x=0$) и критическую точку (рисунок 6.16).

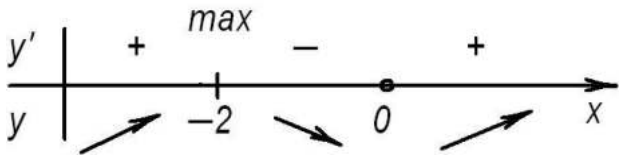


Рисунок 6.16 – Интервалы монотонности к примеру 6.8

Найдем теперь знаки первой производной на полученных интервалах и отметим их на схеме. Стрелками обозначим возрастание и убывание функции. Получим $y_{\max}=y(-2)=-3$.

4. Определим теперь точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

$$y''=\frac{3x^2\cdot x^3-\left(x^3+8\right)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{3x^2\left(x^3-\left(x^3+8\right)\right)}{x^6}=\frac{3\left(x^3-x^3-8\right)}{x^4}=\frac{-24}{x^4}.$$

Заметим, что вторая производная $y''\neq 0$ и определена во всей области определения функции, потому функция не имеет критических точек 2-го рода. Значит график заданной функции точек перегиба не имеет.

Остаётся еще выяснить вопрос об интервалах выпуклости и вогнутости. Для этого на числовой оси отметим область определения функции (выкалываем точку $x=0$) (рисунок 6.17).

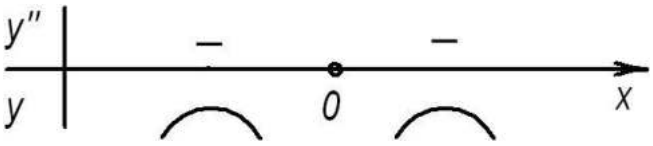


Рисунок 6.17 – Интервалы выпуклости графика к примеру 6.8

На полученных интервалах определим также знаки второй производной и отметим их на схеме дугами, отметим выпуклость графика функции.

5. Опираясь на полученные результаты, получаем эскиз графика исследуемой функции (рисунок 6.18).

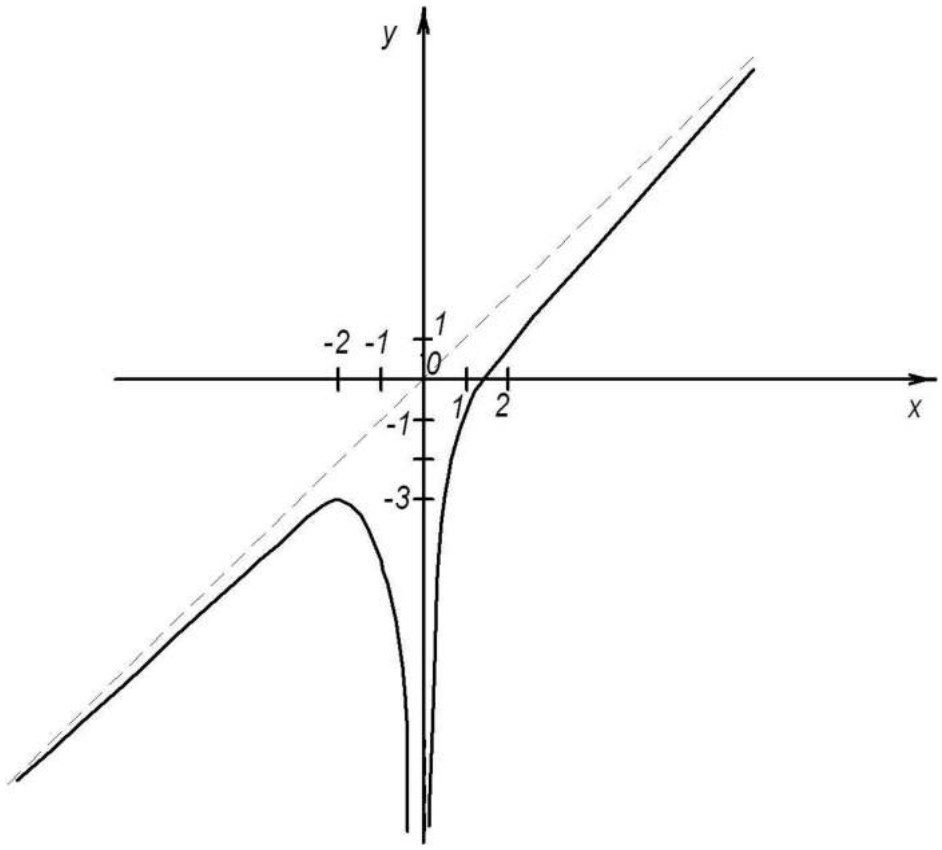


Рисунок 6.18 – Эскиз графика функции к примеру 6.8

Пример 6.9. Исследовать функцию $y=\frac{3\ln x}{x}$ и построить эскиз её графика.

Решение. 1. Находим область определения $D(y)=(0,+\infty)$.

2. Затем найдем асимптоты графика функции:

а) вертикальные асимптоты

Точка $x=0$ является точкой разрыва функции. Проверим наличие вертикальной асимптоты в этой точке.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{3\ln x}{x}=\left(\frac{3\ln(+0)}{+0}\right)=\left(\frac{-\infty}{+0}\right)=\left(-\infty\cdot\frac{1}{+0}\right)=$$

$=(-\infty\cdot+\infty)=-\infty$, следовательно, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

б) наклонные асимптоты

Правую наклонную асимптоту будем искать в виде уравнения прямой линии $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{3\ln x}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right).$$

Тут применяем правило Лопиталя:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{3}{x}\right)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x^2} = \left(\frac{3}{+\infty}\right) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\ln x}{x} - 0\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = \left(\frac{3}{+\infty}\right) = 0.$$

Следовательно, получаем, что прямая $y = 0$ – правая наклонная асимптота.

Левой наклонной асимптоты график функции не имеет, поскольку исследуемая функция не определена на промежутке $(-\infty, 0]$.

3. Теперь исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \left(\frac{3\ln x}{x}\right)' = 3\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 3\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 3\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Видим, что первая производная определена на всей области определения функции. Это означает, что нет точек, принадлежащих области определения функции, в которых производная не существует.

Найдем точки, в которых производная функции обращается в ноль.

$$3\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

На числовой оси отметим область определения функции и найденную критическую точку (рисунок 6.19).

Определим знаки производной на интервалах $(0, e)$ и $(e, +\infty)$ области определения функции, а затем укажем интервалы её возрастания и убывания.

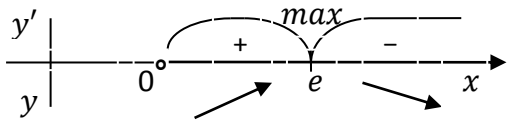


Рисунок 6.19 – Интервалы монотонности к примеру 6.9

По схеме видно, что $x = e$ – точка локального максимума, тогда

$y_{max} = y(e) = \dfrac{3\ln e}{e} = \dfrac{3}{e}$.

Значит, точка $A\left(e; \dfrac{3}{e}\right)$ – характеристическая точка графика функции.

4. Найдем теперь точки перегиба графика функции:

$$y'' = \left(3 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = 3 \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= 3 \cdot \frac{-x - 2x + 2xln\, x}{x^4} = 3 \cdot \frac{-3x + 2xln\, x}{x^4} = 3 \cdot \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Видим, что 2-я производная определена на всей области определения функции. Это означает, что нет точек, принадлежащих области определения функции, в которых вторая производная не существует.

Найдем теперь точки, в которых вторая производная функции обращается в ноль.

$$3 \cdot \frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}.$$

На числовой оси отметим область определения функции, а также найденную критическую точку второго рода (рисунок 6.20).

Определим знаки второй производной на интервалах $(0, e^{3/2})$ и $(e^{3/2}, +\infty)$ области определения функции и укажем интервалы выпуклости графика функции.

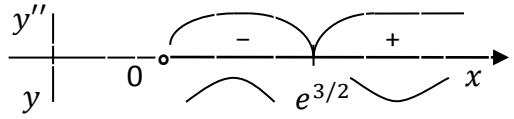


Рисунок 6.20 – Интервалы выпуклости графика к примеру 6.9

$x = e^{3/2}$ – абсцисса точки перегиба графика функции. Вычислим ординату точки перегиба: $y\left(e^{3/2}\right) = 3 \cdot \frac{\ln e^{3/2}}{e^{3/2}} = 3 \cdot \frac{\frac{3}{2}\ln e}{e^{3/2}} = \frac{9}{2e^{3/2}}$.

Следовательно, $B\left(e^{3/2}; \frac{9}{2e^{3/2}}\right)$ – точка перегиба графика функции.

5. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

Абсцисса точки пересечения графика с осью OY равна нулю ($x = 0$). Но точка $x = 0 \notin D(y)$, следовательно, график функции ось OY не пересекает.

Ордината точки пересечения графика с осью OX равна нулю ($y = 0$).

Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью OX:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Следовательно, точка $C(1; 0)$ является точкой пересечения графика с осью абсцисс.

6. Построим эскиз графика функции (рисунок 6.21).

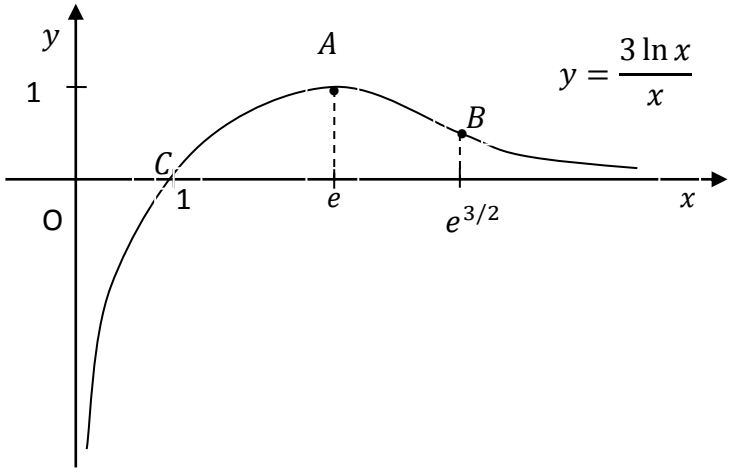


Рисунок 6.21 – Эскиз графика функции к примеру 6.9

6.3 Исследование функций как моделей технических процессов

Рассмотрим примеры исследования функций как моделей различных технических процессов.

Пример 6.10. Электрическая цепь составляется из двух параллельно соединенных сопротивлений. Определить, при каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи будет максимальным, при условии, что при последовательном соединении этих сопротивлений сопротивление электрической цепи равно R.

Решение. Итак, обозначим через R – сопротивление электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных сопротивлений *x* и *y*.

Тогда получаем, что

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{r}.$$

По условию задачи электрическая цепь составляется из двух параллельно соединенных сопротивлений, поэтому

$$x+y=R.$$

Из последнего равенства выразим *y* через *x:*

$$y=R-x$$

и подставим полученное в первое равенство:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{R-x}=\frac{1}{r}.$$

Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{R-x+x}{x\cdot(R-x)}=\frac{1}{r},$$

отсюда

$$\frac{R}{x\cdot(R-x)}=\frac{1}{r}$$

и, наконец

$$r=\frac{x\cdot(R-x)}{R}=r(x).$$

Здесь

$$0 < x < R\,.$$

Найдем производную функции $r(x)$:

$$r' = \left(\frac{x \cdot (R - x)}{R} \right)' = \frac{\left(x \cdot R - x^2 \right)'}{R} = \frac{R - 2x}{R}\,.$$

Определим значение x, при котором производная $r' = \dfrac{R - 2x}{R}$ обращается в нуль:

$$r' = \frac{R - 2x}{R} = 0\,;$$

$$R - 2x = 0\,;$$

$$x = \frac{R}{2}\,.$$

Это значение x и является максимальным значением функции $r(x)$, так как при любом достаточно малом положительном числе ε

$$r'\left(\frac{R}{2} - \varepsilon \right) = \frac{2\varepsilon}{R} > 0\,;$$

$$r'\left(\frac{R}{2} + \varepsilon \right) = -\frac{2\varepsilon}{R} < 0\,.$$

Таким образом, при переходе через точку $x = \dfrac{R}{2}$ производная функции $r(x)$ меняет знак с плюса на минус. А это и есть достаточное условие точки максимума.

Пример 6.11. Сопротивление балки, имеющей прямоугольное поперечное сечение на сжатие, пропорционально площади этого сечения.

Определить, какими должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметра d, чтобы её сопротивление на сжатие было наибольшим.

Решение. Обозначим размеры сечения балки через *x* и *y* (рисунок 6.22).

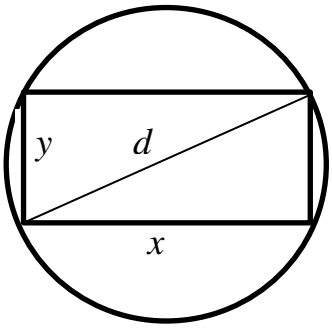


Рисунок 6.22 – Иллюстрация к примеру 6.11

Сопротивление балки вычисляем по формуле

$$R = kxy,$$

где *k* – коэффициент пропорциональности;

x, *y* – размеры сечения балки.

Так как диаметр бревна является диагональю прямоугольника (см. рисунок), то, по теореме Пифагора, *x*, *y* и *d* связаны формулой

$$d^2 = x^2 + y^2.$$

Отсюда

$$y = \sqrt{d^2 - x^2},$$

$$R = kx\sqrt{d^2 - x^2}.$$

Итак, мы получили зависимость сопротивления *R* от величины *x:*

$$R(x) = kx\sqrt{d^2 - x^2}.$$

Определим, при каком значении *x* сопротивление *R* будет наибольшим. Для этого дважды продифференцируем функцию *R*(*x*):

$$R'(x) = \left(kx\sqrt{d^2 - x^2} \right)' = (kx)' \cdot \sqrt{d^2 - x^2} + kx \cdot \left(\sqrt{d^2 - x^2} \right)' =$$

$$= k \cdot \sqrt{d^2 - x^2} + kx \cdot \frac{\left(d^2 - x^2\right)'}{2\sqrt{d^2 - x^2}} = k \cdot \sqrt{d^2 - x^2} + kx \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{d^2 - x^2}} =$$

$$= k \cdot \sqrt{d^2 - x^2} - \frac{kx^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = = \frac{k \cdot \left(\sqrt{d^2 - x^2}\right)^2 - kx^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{k \cdot \left(d^2 - x^2\right) - kx^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \frac{kd^2 - kx^2 - kx^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \frac{kd^2 - 2kx^2}{\sqrt{d^2 - x^2}}.$$

Полученная дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, то есть

$$kd^2 - 2kx^2 = 0,$$

$$d^2 - x^2 \neq 0.$$

Поскольку x не может быть равен d по условию задачи, то остается решить уравнение

$$kd^2 - 2kx^2 = 0.$$

$$2kx^2 = kd^2;$$

$$x^2 = \frac{d^2}{2};$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Теперь найдем значение *y:*

$$y = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{2d^2 - d^2}{2}} = \frac{\sqrt{d^2}}{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, чтобы сопротивление балки на сжатие было наибольшим, необходимо, чтобы размеры сечения балки были следующими:

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}};$$

$$y = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Контрольные вопросы

1. Приведите формулировку теоремы Лагранжа.
2. Изложите известные вам признаки возрастания и убывания функции.
3. Докажите, что функция $y = \cos x - x$ убывает на любом промежутке.
4. Изложите правила нахождения экстремумов функции.
5. Приведите пример функции, имеющей критическую точку, не являющуюся точкой экстремума.
6. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции?
7. Какие виды асимптот графика функции вы знаете?
8. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика?

ГЛАВА 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1 Евклидово пространство

7.1.1 Понятие n-мерного евклидова пространства

Как известно, расстояние между двумя точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ на плоскости определяется по формуле

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Аналогичная формула имеет место для точек пространства.

Точки на плоскости описываются парами чисел, а в пространстве – тройками (координатами).

Обобщая эти понятия, введем следующее определение.

Определение. Множество всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел $M(x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть n-мерным евклидовым пространством и обозначать $\mathbb{E}^n$.

Элементы $\mathbb{E}^n$ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют его точками, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ – их координатами.

Расстояние между любыми n-мерными точками $A(x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A)$ и $B(x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B)$ по аналогии со случаями $n = 2, n = 3$ определим формулой

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_1^A - x_1^B)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2 + \cdots + (x_n^A - x_n^B)^2}. \qquad (7.1)$$

7.1.2 Множества в евклидовом пространстве

Определение. N-мерным замкнутым шаром радиуса R с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(M, M_0) \le R \text{ или } \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_1 - x_n^0)^2} \le R. \quad (7.2)$$

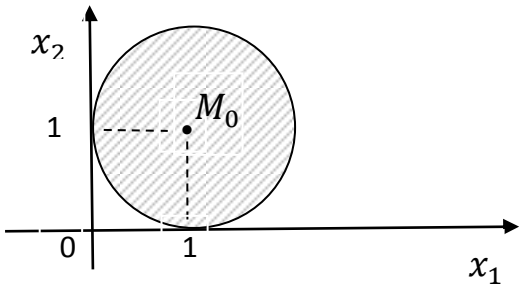


Рисунок 7.1 – Двумерный шар

На рисунке 7.1 изображен двумерный шар радиуса $R = 1$ с центром в точке $M_0(1;1)$.

Если в (7.2) неравенство строгое, то шар называют открытым.

Определение. ε-окрестностью точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называют открытый n-мерный шар радиуса ε с центром в точке M_0.

Пусть $D \subset \mathbb{E}^n$ (некоторое множество точек пространства $\mathbb{E}^n$).

Определение. Точка M_1 называется внутренней точкой множества D, если существует ε-окрестность этой точки, все точки которой принадлежат множеству D (рисунок 7.2).

Определение. Точка $M_2 \in \mathbb{E}^n$ называется граничной точкой множества D, если любая её ε-окрестность содержит как точки множества D, так и точки, ему не принадлежащие (рисунок 7.2).

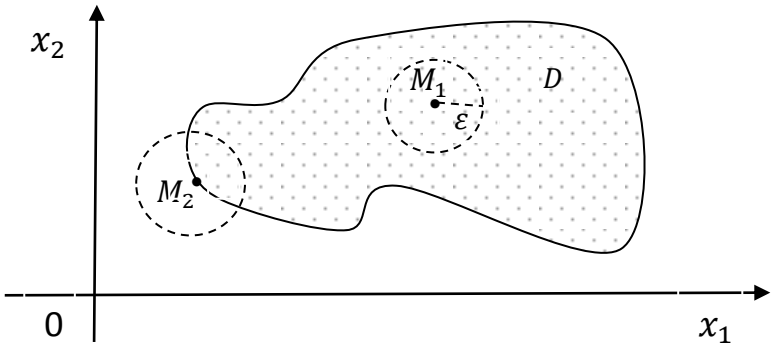


Рисунок 7.2 – Граничная и внутренняя точки множества на плоскости

Определение. Множество D пространства $\mathbb{E}^n$ называется открытым, если все его точки являются внутренними.

Определение. Множество D пространства $\mathbb{E}^n$ называется замкнутым, если ему принадлежат все его граничные точки.

Например. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(a,b) = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$$

образует одномерное евклидово пространство $\mathbb{E}^1$.

Интервал (a,b) из $\mathbb{E}^1$ является открытым множеством, а отрезок $[a,b]$ – замкнутым множеством, при этом точки a и b являются граничными для этих числовых множеств.

Определение. Множество D пространства $\mathbb{E}^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный шар, содержащий все точки этого множества.

Определение. Непрерывной кривой L в пространстве $\mathbb{E}^n$ будем называть множество точек $\{M(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, координаты которых являются непрерывными функциями параметра t:

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{7.3}$$

Говорят, что точки $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ пространства $\mathbb{E}^n$ можно соединить непрерывной кривой L, если существует такая непрерывная кривая вида (7.3), что координаты этих точек удовлетворяют системе равенств

$$x_i' = \varphi_i(\alpha), x_i'' = \varphi_i(\beta) \;\; i = \overline{1,n}. \tag{7.4}$$

Определение. Множество D пространства $\mathbb{E}^n$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству D.

Пример связного множества в $\mathbb{E}^2$ изображен на рисунке 7.3.

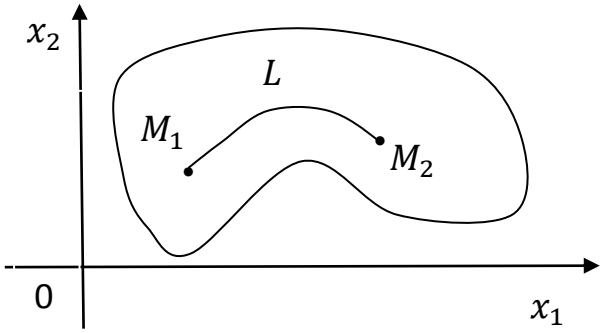


Рисунок 7.3 – Связное множество

7.2 Функции нескольких переменных

7.2.1 Понятие функции нескольких переменных

Определение. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества $D \subset \mathbb{E}^n$ по некоторому правилу или закону f ставится в соответствие некоторое единственное число $u \in \mathbb{R}$, то будем говорить, что на множестве D задана функция $u = f(M)$ или $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При этом множество D называется областью определения функции $f(M)$.

Как известно, график функции одной переменной изображается на плоскости, то есть в двумерном пространстве. Функцию двух переменных $z = f(x, y)$ также можно изобразить графически. Ее график является поверхностью в трехмерном пространстве.

При этом область определения функции представляет собой некоторое множество D точек плоскости xOy (рисунок 7.4).

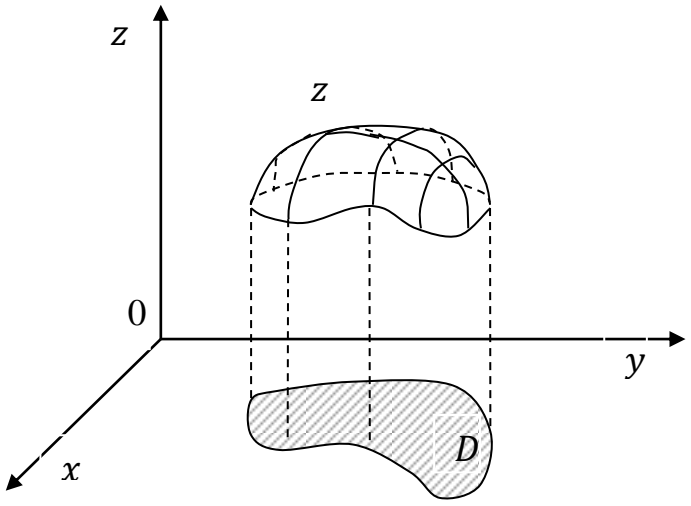


Рисунок 7.4 – График функции двух переменных

Для примера можно рассмотреть функцию $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Очевидно, что данная функция определена для любой пары значений переменных (x, y). Поэтому областью определения этой функции является множество всех точек плоскости *OXY*, т.е. $D(f) = \mathbb{E}^2$.

Графиком данной функции является поверхность, называемая параболоидом (рисунок 7.5).

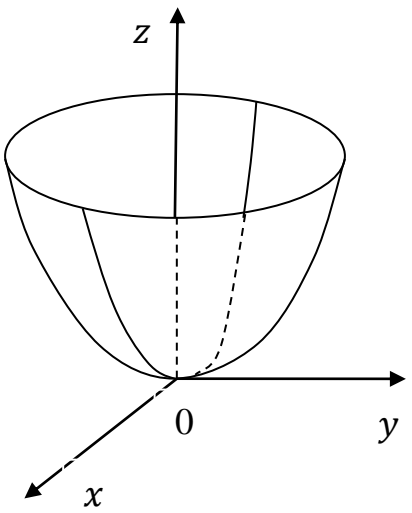


Рисунок 7.5 – Параболоид

7.2.2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена на множестве D евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{E}^n$ такую, что любая ε-окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества D, отличную от M_0.

Определение. Число b называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (пределом, при $M \to M_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек M множества D, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$, при этом пишут: $\lim_{M \to M_0} f(M) = b$.

Определение. Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $R > 0$, что для всех точек M множества D, удовлетворяющих неравенству $\rho(M, O) > R$ (находящихся вне ε-окрестности точки O), выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$, при этом пишут: $\lim_{M\to\infty} f(M) = b$.

Пусть функция $f(M)$ определена на множестве $D \subset \mathbb{E}^n$.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0 \in D$, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Определение. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной на множестве $D \subset \mathbb{E}^n$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

7.2.3 Частные производные функций нескольких переменных

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{E}^n$.

Определим приращение переменной x_i по формуле

$$\Delta x_i = x_i - x_i^0.$$

При изменении переменной x_i от x_i^0 до $x_i^0 + \Delta x_i$ функция $u = f(M)$ изменится на величину

$$\Delta_{x_i} f = f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0\right).$$

Эта разность называется частным приращением функции u по переменной x_i в точке M_0.

Определение. Если существует предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x_i} f$ в точке M_0 к соответствующему приращению аргумента Δx_i, при $\Delta x_i \to 0$, то он называется частной производной функции $u = f(M)$ в точке M_0 по переменной x_i и обозначается одним из символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \qquad f'_{x_i}(M_0), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{M_0}.$$

Согласно последнему определению

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}.$$

Из данного определения также следует, что частная производная функции

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

по переменной x_i является обычной производной функции одной переменной x_i при фиксированных значениях других переменных.

Пример 7.1. Найти частные производные функций:

1. $z = 5x^2 + 6xy - 4y^3$.
2. $z = x^5 y^3 + e^{3x} - \ln(2y - 1)$.
3. $z = \sin(3x^3 - 2y^4)$.

Решение. Считая y постоянной, находим производные по x:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(5x^2 + 6xy - 4y^3\right)'_x = 5 \cdot 2x + 6y \cdot 1 - 0 = 10x + 6y$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(x^5 y^3 + e^{3x} - \ln(2y - 1)\right)'_x = y^3 \cdot 5x^4 + e^{3x} \cdot 3 - 0 = 5x^4 y^3 + 3e^{3x}$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(\sin\left(3x^3 - 2y^4\right)\right)'_x = \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(3x^3 - 2y^4\right)'_x =$

$= \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(3 \cdot 3x^2 - 0\right) = 9x^2 \cos\left(3x^3 - 2y^4\right)$.

Считая x постоянной, находим производную по y:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(5x^2 + 6xy - 4y^3\right)'_y = 0 + 6x \cdot 1 - 4 \cdot 3y^2 = 6x - 12y^2$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(x^5 y^3 + e^{3x} - \ln(2y-1)\right)'_y = x^5 \cdot 3y^2 + 0 - \dfrac{(2y-1)'_y}{2y-1} =$

$= 3x^5 y^2 - \dfrac{2}{2y-1}$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(\sin\left(3x^3 - 2y^4\right)\right)'_y = \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(3x^3 - 2y^4\right)'_y =$

$= \cos\left(3x^3 - 2y^4\right) \cdot \left(0 - 2 \cdot 4y^3\right) = -8y^3 \cos\left(3x^3 - 2y^4\right)$.

7.2.4 Дифференциал функций нескольких переменных

Для упрощения записи определим понятие дифференциала функций двух переменных. Для функций большего числа переменных определения аналогичны.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy. Для произвольной точки $M(x, y)$ этой окрестности рассмотрим приращения аргументов функции $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, тогда

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Определение. Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 называют разность

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon \cdot \rho, \qquad (7.5)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$,

A и B – числа.

Определение. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то линейная функция

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

переменных Δx и Δy называется дифференциалом этой функции в точке M_0.

Обозначив $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, получим

$$dz = Adx + Bdy. \qquad (7.6)$$

Теорема. (Необходимое условие дифференцируемости функции двух переменных). Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то она имеет частные производные по x и по y в этой точке, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = A, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = B.$$

Из данной теоремы и формулы (7.6) следует, что дифференциал функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ можно записать в виде

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy$$

или, опуская рассматриваемую точку,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (7.7)$$

Пример 7.2. Найти дифференциал функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Найдем частные производные функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = 2x,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = 2y.$$

Тогда по формуле (7.7) получим

$$dz = 2xdx + 2ydy.$$

7.2.5 Градиент

Пусть множество $D \subset \mathbb{E}^3$. Рассмотрим функцию трех переменных $f(x, y, z)$: $D \to \mathbb{R}$, дифференцируемую в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$.

Определение. Градиентом функции $f(x, y, z)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называют вектор, координаты которого соответственно равны значениям частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ в этой точке, то есть

$$grad\, f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0);\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0); \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right),$$

или, опуская рассматриваемую точку,

$$grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right). \qquad (7.8)$$

Пример 7.3. Найти градиент функции $z = 2e^{xy+4} + 3y^2$ в точке $M_0(-2; 2)$.

Решение. 1. Найдём частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(2e^{xy+4} + 3y^2\right)'_x = 2e^{xy+4} \cdot (xy+4)'_x + 0 = 2e^{xy+4} \cdot (y \cdot 1 + 0) = 2ye^{xy+4}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(2e^{xy+4} + 3y^2\right)'_y = 2e^{xy+4} \cdot (xy+4)'_y + 3 \cdot 2y =$$

$$= 2e^{xy+4} \cdot (x \cdot 1 + 0) + 6y = 2xe^{xy+4} + 6y.$$

2. Вычислим значения частных производных в точке $M_0(-2; 2)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 2 \cdot 2e^{-2 \cdot 2+4} = 4, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2 \cdot 2+4} + 6 \cdot 2 = 8.$$

3. Воспользуемся формулой (7.8):

$$\text{grad}\, z(M_0) = (4; 8) \ \text{ или } \ \text{grad}\, z(M_0) = 4\bar{i} + 8\bar{j}.$$

Пример 7.4. Найти градиент функции $f(x;y;z)=x^3+xy^2+z$ в точке $M(1;2;3)$.

Решение. 1. Найдём частные производные данной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(y,z=C)=3x^2+y^2;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=(x,z=C)=2xy;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=(x,y=C)=1.$$

2. По формуле (7.8) получаем:

$$grad\ f=(3x^2+y^2;\ 2xy;\ 1).$$

3. Подставим в полученное выражение координаты заданной точки:

$$grad\ f(1;2;3)=(3\cdot 1^2+2^2;\ 2\cdot 1\cdot 2;\ 1)=(7;\ 4;\ 1)$$

или

$$grad\ f(1;2;3)=7\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}\,.$$

Основное свойство градиента: градиент функции в точке указывает направление максимальной скорости возрастания функции.

7.2.6 Частные производные высших порядков

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена на множестве $D\subset\mathbb{E}^2$, и пусть в каждой точке $M(x,y)\in D$ существуют частные производные f'_x и f'_y. Тогда частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ являются функциями с областью определения D. Они называются частными производными первого порядка.

Определение. Частные производные от функций f'_x и f'_y называются частными производными второго порядка функции $f(x,y)$, то есть

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x;\quad f''_{xy}=(f'_x)'_y;\quad f''_{yx}=\left(f'_y\right)'_x;\quad f''_{yy}=\left(f'_y\right)'_y$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Пример 7.5. Найти частные производные второго порядка функции

$$f(x;y) = 3x^2 + 5xy^2 - 6y^3.$$

Решение. 1. Сначала найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y = C) = 6x + 5y^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x = C) = 10xy - 18y^2.$$

2. Найдём производные второго порядка по определению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x + 5y^2) = (y = C) = 6;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6x + 5y^2) = (x = C) = 10y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(10xy - 18y^2) = (y = C) = 10y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(10xy - 18y^2) = (x = C) = 10x - 36y.$$

Пример 7.6. Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin\frac{8x-3}{y}$.

Решение. 1. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = C) = \left(\sin\frac{8x-3}{y}\right)'_x = \cos\frac{8x-3}{y} \cdot \left(\frac{8x-3}{y}\right)'_x = \cos\frac{8x-3}{y} \cdot \frac{8}{y} = \frac{8}{y} \cdot \cos\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = C) = \left(\sin\frac{8x-3}{y}\right)'_y = \cos\frac{8x-3}{y} \cdot \left(\frac{8x-3}{y}\right)'_y = \cos\frac{8x-3}{y} \cdot \left(-\frac{8x-3}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{8x-3}{y^2} \cdot \cos\frac{8x-3}{y}.$$

2. По определению найдём производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{8}{y}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)=\left(\frac{8}{y}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x=\left(y=C\right)=\frac{8}{y}\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x=$$

$$=\frac{8}{y}\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x=\frac{8}{y}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_x=\frac{8}{y}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\frac{8}{y}=$$

$$=-\frac{64}{y^2}\sin\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{8x-3}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)=\left(-\frac{8x-3}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y=\left(x=C\right)=$$

$$=\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)'_y\cdot\cos\frac{8x-3}{y}+\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{2(8x-3)}{y^3}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}-\frac{8x-3}{y^2}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{2(8x-3)}{y^3}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}+\frac{8x-3}{y^2}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}\cdot\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)=$$

$$=\frac{2(8x-3)}{y^3}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}-\left(\frac{8x-3}{y^2}\right)^2\cdot\sin\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{8x-3}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)=\left(-\frac{8x-3}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x=\left(y=C\right)=$$

$$=\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)'_x\cdot\cos\frac{8x-3}{y}+\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right)\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_x=$$

$$=-\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}-\frac{8x-3}{y^2}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_x=$$

$$=-\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}+\frac{8x-3}{y^2}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}\cdot\frac{8}{y}=-\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}+\frac{8(8x-3)}{y^3}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{8}{y}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right) = \left(\frac{8}{y}\cdot\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y = (x = C) =$$

$$= \left(\frac{8}{y}\right)'_y \cdot \cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8}{y}\cdot\left(\cos\frac{8x-3}{y}\right)'_y = -\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} +$$

$$+\frac{8}{y}\cdot\left(-\sin\frac{8x-3}{y}\right)\cdot\left(\frac{8x-3}{y}\right)'_y = -\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} - \frac{8}{y}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}\cdot\left(-\frac{8x-3}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{8}{y^2}\cdot\cos\frac{8x-3}{y} + \frac{8(8x-3)}{y^3}\cdot\sin\frac{8x-3}{y}.$$

Определение. Частная производная второго порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной производной.

В приведённых примерах мы получили, что смешанные производные равны, то есть

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Это равенство не случайно. В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть частные производные f'_x и f'_y дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),$$

то есть значение смешанной производной в точке M_0 не зависит от порядка дифференцирования.

7.2.7 Экстремум. Исследование функций двух переменных с помощью частных производных

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена и непрерывна на некотором множестве $D \subset \mathbb{E}^2$.

Определение. Точка $M_0 \in D$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, в которой для любой точки $M(x,y)(\in D)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(M) \le f(M_0)\ \big(f(M) \ge f(M_0)\big).$$

Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума или точками экстремума.

На рисунке 7.6 M_1 – точка локального минимума, M_2 – точка локального максимума.

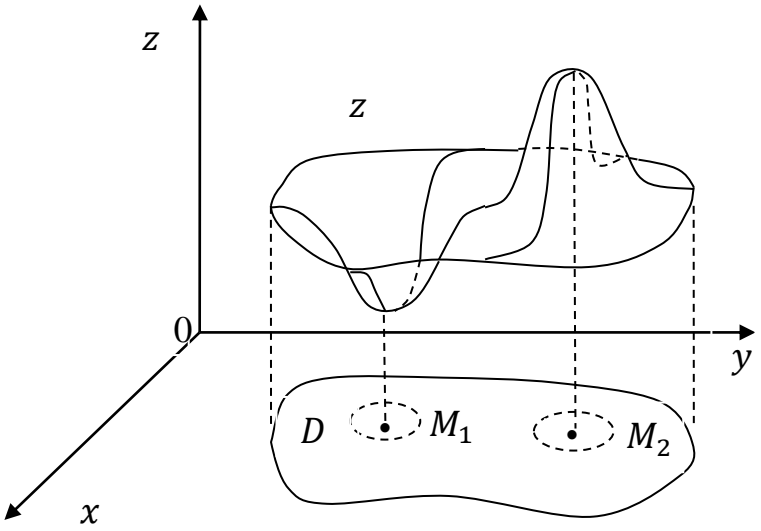


Рисунок 7.6 – Точки локального экстремума

Теорема. (Необходимое условие экстремума функции двух переменных). Если функция $f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ локальный экстремум и частные производные первого порядка, то

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0. \qquad (7.9)$$

Определение. Точки, в которых выполняется равенство (7.9), называются стационарными или точками возможного экстремума.

Стационарные точки можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x;y) = 0, \\ f'_y(x;y) = 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Для того чтобы выяснить, какие из стационарных точек являются точками экстремума, пользуются следующей теоремой.

Теорема. (Достаточное условие экстремума функции двух переменных). Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0,y_0)$, причем

$$f''_{xx}(M_0) = A;\ \ f''_{xy}(M_0) = B;\ \ f''_{yy}(M_0) = C,$$

и пусть

$$\Delta = AC - B^2. \tag{7.11}$$

Тогда,

- если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный экстремум, причем при $A < 0$ – локальный максимум, а при $A > 0$ – локальный минимум;
- если $\Delta < 0$, то точка M_0 не является точкой экстремума.

Определение. Выражение (7.11) называется дискриминантом.

Пример 7.7. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 - y^3 - 3xy.$$

Решение. 1. Очевидно, что данная функция определена для любой пары значений переменных $(x;y)$. Поэтому областью определения этой функции является множество всех точек плоскости *OXY*, то есть $D(z) = \mathbb{E}^2$.

2. Найдем частные производные первого порядка:

$$f'_x = 3x^2 - 3y;\ \ f'_y = -3y^2 - 3x.$$

3. Найдем стационарные точки, решив систему (7.10):

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3y^2 - 3x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$$

1) $x^2 - y = 0 \implies y = x^2$.

2) $y^2 + x = 0 \implies (x^2)^2 + x = 0 \Leftrightarrow x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0$.

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -1.$$

3) Так как $y = x^2$, то

$$y_1 = 0^2 = 0, \qquad y_2 = (-1)^2 = 1.$$

Следовательно, решениями данной системы являются пары чисел $(0; 0)$ и $(-1; 1)$.

Таким образом, мы нашли две стационарные точки $M_1(0; 0)$ и $M_2(-1; 1)$.

4. Проверим, достигает ли функция локальных экстремумов в этих точках. Для этого воспользуемся достаточным условием экстремума. Сначала найдём дискриминант (7.11) в каждой стационарной точке.

1) найдём частные производные второго порядка:

$$f''_{xx} = 6x; \; f''_{xy} = -3; \; f''_{yy} = -6y.$$

2) вычислим значения частных производных второго порядка в точке $M_1(0; 0)$:

$$A_1 = f''_{xx}(0,0) = 0; \; B_1 = f''_{xy}(0,0) = -3; \; C_1 = f''_{yy}(0,0) = 0.$$

Тогда по формуле (7.11):

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0 - 9 = -9.$$

Так как $\Delta_1 = -9 < 0$, то точка M_1 не является точкой экстремума.

3) вычислим значения частных производных второго порядка в точке $M_2(-1; 1)$:

$$A_2 = f''_{xx}(-1,1) = -6; \; B_2 = f''_{xy}(-1,1) = -3; \; C_2 = f''_{yy}(-1,1) = -6.$$

Тогда по формуле (7.11):

$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-6) \cdot (-6) - (-3)^2 = 27.$$

Так как $\Delta_2 = 27 > 0$, то в точке M_2 функция достигает локального экстремума, причем $A_2 = -6 < 0$, значит, M_2 является точкой локального максимума.

5. Вычислим локальный максимум функции:

$$z_{max} = z(-1;1) = (-1)^3 - 1^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 - 1 + 3 = 1.$$

7.2.8 Условный экстремум

В некоторых задачах требуется найти экстремум функции двух переменных $z = f(x;y)$, при условии, что аргументы этой функции связаны между собой определенным соотношением $\varphi(x;y) = 0$.

Уравнение, задающее указанное соотношение, называется уравнением связи, а сами экстремумы называются условными.

Нахождение условного экстремума означает, что точки условного экстремума находятся не на всей области определения функции $D(f)$, а только на множестве тех точек из $D(f)$, которые удовлетворяют уравнению связи.

Для нахождения точек условного экстремума составляют функцию Лагранжа:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y),$$

где λ – пока неизвестный числовой множитель.

Затем находят стационарные точки функции Лагранжа, решив систему:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x;y) + \lambda \cdot \varphi'_x(x;y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x;y) + \lambda \cdot \varphi'_y(x;y) = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x;y) = 0. \end{cases} \tag{7.12}$$

Пусть $P_0(x_0;y_0)$, λ_0 – любое из решений этой системы и

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & L''_{xx}(P_0;\lambda_0) & L''_{xy}(P_0;\lambda_0) \\ \varphi'_y(P_0) & L''_{xy}(P_0;\lambda_0) & L''_{yy}(P_0;\lambda_0) \end{vmatrix}. \tag{7.13}$$

Тогда,

– если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке P_0 условный максимум;

– если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке P_0 условный минимум.

Пример 7.8. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению связи $x + y = 2$.

Решение. В нашем случае $f(x; y) = x^2 + y^2$; $\varphi(x; y) = x + y - 2$.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x + y - 2).$$

2. Частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = 2x + \lambda;\ \ L'_y = 2y + \lambda;\ L'_\lambda = x + y - 2.$$

3. Найдём стационарные точки функции Лагранжа, для этого составим и решим систему вида (7.12):

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0; \\ 2y + \lambda = 0; \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

1) Вычтем второе уравнение системы из первого и перейдем к системе:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0; \\ x + y - 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0; \\ x + y = 2. \end{cases} \qquad (7.14)$$

2) Сложим уравнения последней системы и получим:

$$2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

3) Подставим $x = 1$ в первое уравнение системы (7.14), получим: $y = 1$.

4) Так как $2x + \lambda = 0$, то $\lambda = -2x$, следовательно, $\lambda = -2$.

Мы получили точку $P(1; 1)$ возможного условного экстремума, причём $\lambda = -2$.

4. Найдём элементы определителя (7.13):

$$\varphi'_x = 1;\ \varphi'_y = 1;\ L''_{xx} = 2;\ L''_{xy} = 0;\ L''_{yy} = 2.$$

Тогда по формуле (7.13)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\left(0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = -(-2 - 2) = 4.$$

Так как $\Delta > 0$, то точка $P(1;1)$ является точкой условного минимума.

5. Значение условного минимума $z(1;1) = 1^2 + 1^2 = 2$.

Геометрический смысл нахождения точки условного минимума в примере 7.8 состоит в том, что мы искали экстремум функции не на всей плоскости *OXY*, а на множестве точек прямой $x + y - 2 = 0$ этой плоскости (рисунок 7.7).

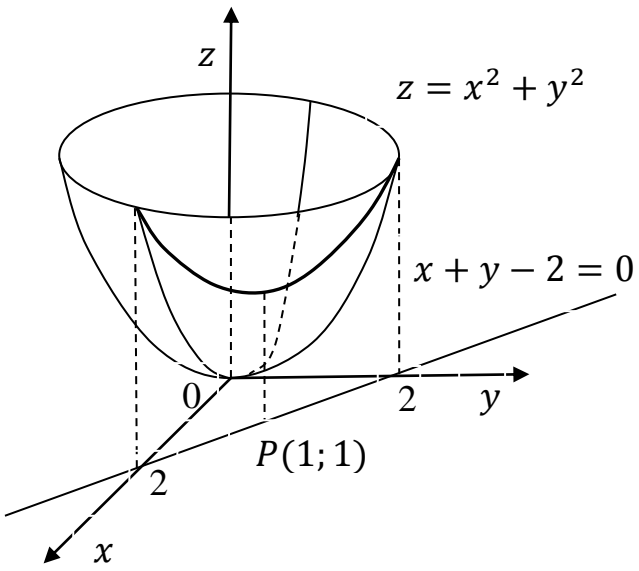


Рисунок 7.7 – Условный экстремум

7.3 Метод дифференциального исчисления функции двух переменных в агроинженерных задачах

Метод наименьших квадратов – это метод, который часто используют при обработке экспериментальных данных в тех случаях, когда теория дает закон, определяющий уравнение связи между физическими величинами, но с некоторыми неопределенными параметрами, для определения которых проводятся эксперименты.

Например, удлинение ΔL линейного образца с начальной длиной L_0 и начальной температурой T_0 прямо пропорционально приращению его температуры T: $\Delta L = \alpha L_0 (T - T_0)$, где α − коэффициент линейного расширения, который определяется экспериментально.

В соответствии с законом Гука имеет место линейная связь между напряжениями и деформациями упругого деформируемого тела.

В случае линейной связи двух физических величин x, y применим соотношение

$$Y(x) = ax + b \tag{7.15}$$

с двумя параметрами a, b, для определения которых проводят эксперименты и для заданных значений $x_1, x_2,\ldots, x_n$ определяют соответствующие им значения $y_1, y_2,\ldots y_n$.

Полученные результаты записывают в таблицу

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Если полученные данные нанести на график как точки с координатами (x, y) на плоскости Oxy, то в результате получится, что эти точки не лежат на одной прямой (рисунок 7.8). Это можно объяснить наличием погрешностей эксперимента.

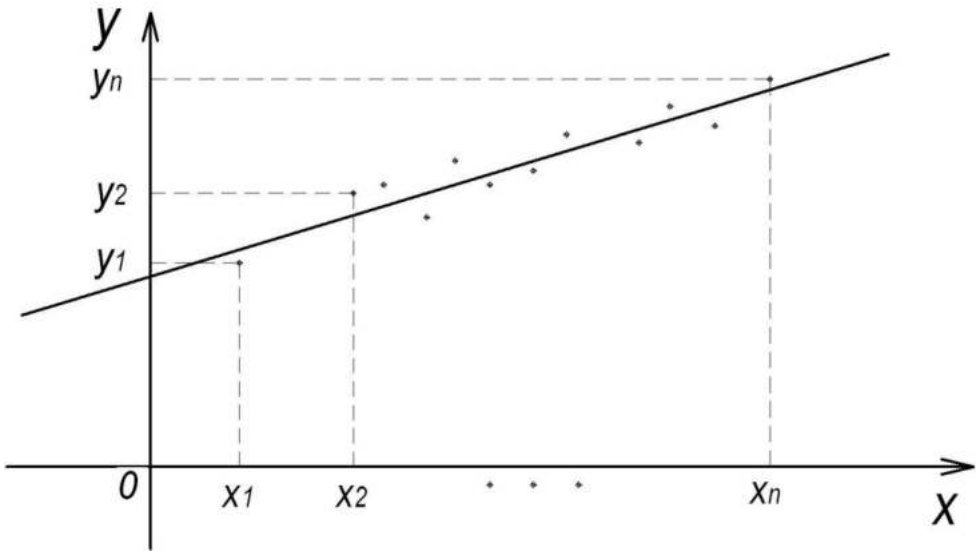


Рисунок 7.8 – Иллюстрация метода наименьших квадратов

Для определения параметров a и b уравнения (7.15) используется метод наименьших квадратов. Суть данного метода заключается в том, что неизвестные коэффициенты a и b определяются таким образом, чтобы сумма

квадратов отклонений всех точек, полученных экспериментально, от теоретической прямой (7.15) была наименьшей.

Поскольку у нас имеются значения x_i и y_i, то

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2,$$

это функция переменных *a* и *b*:

$$f\ (a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2. \quad (7.16)$$

Чтобы определить параметры *a* и *b*, воспользуемся необходимыми условиями экстремума функции двух переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Продифференцировав равенство (7.16) по переменным *a* и *b* и приравняв результаты к нулю, получим:

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0;$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0.$$

Таким образом, параметры *a* и *b* определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i\,, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \quad (7.17)$$

Покажем, что для найденных значений параметров *a* и *b* функция $f\ (a,b)$ имеет минимум:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2n, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 = 4\sum_{\substack{i,j \\ i<j}}(x_i - x_j)^2 > 0, \qquad A > 0.$$

Таким образом, согласно достаточному условию существования экстремума, функция $f\ (a, b)$ имеет минимум.

Подставляя найденные значения a и b в равенство (7.15), получим линейную функцию, наилучшим образом отражающую зависимость между величинами x и y, найденными экспериментально.

Пример 7.9. Описать с помощью линейной зависимости $y = ax + b$ следующие экспериментальные данные:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Решение. Для составления системы (7.17) и определения коэффициентов a и b вычислим следующие величины:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 21;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 39;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 11;$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 10.$$

Тогда система (7.17) примет вид

$$\begin{cases} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, определим параметры:

$$a = -\frac{26}{35};$$

$$b = \frac{159}{35}.$$

Подставим полученные значения в (7.15). Получим искомую зависимость

$$Y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

Пример 7.10. Скорость истечения газа через отверстие в сосуде, в котором находится этот газ под давлением p_0, вычисляется по формуле

$$w = \sqrt{kRT_0\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)},$$

где T_0 – температура в сосуде,

p_0 – давление в сосуде,

p_1 – давление в окружающей среде,

k, R – величины, зависящие от химического состава газа.

При заданных значениях

$$k = 1{,}5,\ R = 294,\ p_1 = 0{,}1,\ p_0 = 100,\ T_0 = 617,\ w_0 = 500$$

вычислить скорость истечения газа, если давление в сосуде p_0 изменится до 108, температура в сосуде T_0 изменится до 600, а величина R изменится до 300.

Решение. $w \approx w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial p_0}\right)\Delta p_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial T_0}\right)\Delta T_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial R}\right)\Delta R.$

Найдем требуемые производные при заданных значениях переменных:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial p_0}\right)_0 = \frac{1}{2w_0}\left(kRT_0\left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}-1}\right)\left(\frac{p_1}{p_0^2}\right) = 0{,}0817;$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial T_0}\right)_0 = \frac{1}{2w_0}\left(kR\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)\right) = 0{,}397;$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial R}\right)_0 = \frac{1}{2w_0}\left(kT_0\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)\right) = 0{,}833,$$

где

$$\Delta p_0 = 108 - 100 = 8;$$

$$\Delta T_0 = 600 - 617 = -17;$$

$$\Delta R = 300 - 294 = 6.$$

Тогда получаем

$$w = 500 + 0{,}0817 \cdot 8 + 0{,}397 \cdot (-17) + 0{,}0833 \cdot 6 = 498{,}89.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение функции нескольких переменных.
2. Дайте определения частных производных функции нескольких переменных.
3. Запишите формулу градиента функции двух переменных.
4. Каковы необходимые условия экстремума функции двух переменных?
5. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на наличие экстремума.
6. Что такое условный экстремум?
7. Приведите функцию Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для вузов / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. − М.: Юрайт, 2015.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учебник для вузов / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. − М.: Юрайт, 2015.
3. Баврин И.И. Основы высшей математики / И.И. Баврин. − М.: Высшая школа, 2004.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1989.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.Е. Гмурман. − М.: Юрайт, 2014.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие. − Ч. 1, 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2007.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др. − М.: Астрель, 2003.
9. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. − М.: Наука, 1986.
11. Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.Н. Калинина. − М.: Юрайт, 2013.
12. Луканкин Г.Л. Высшая математика: учебник для вузов / Г.Л. Луканкин. − М.: Высшая школа, 2009.
13. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / В.П. Минорский. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н.С. Пискунов. – Т. 1–2. − М.: Наука, 1985.
15. Сборник задач по математике для втузов / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович и др. – Ч. 1, 2. − М.: Наука, 1986.
16. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. − М.: Высшая школа, 2003.
17. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Шипачев. − М.: Юрайт, 2014.

Учебное издание

Серёгина Виктория Викторовна

Середина Марина Николаевна

Удинцова Надежда Михайловна

Степовой Дмитрий Владимирович

Жидченко Татьяна Викторовна

Грачёва Наталья Николаевна

Руденко Нелли Борисовна

Математические основы решения задач в агроинженерии

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Н.П. Лучинкина
Верстка Н.В. Гвоздик
Художественный редактор С.П. Вдовикина

Подписано в печать 10.12.2024 г.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 12,0. Тираж 500 экз. Заказ № 3.

Отдел информационных технологий и издательской деятельности
Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВО Донской ГАУ
347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15.