МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

И.В. Исупова, А.Б. Портаков

Практикум по технической механике

Часть 1

Учебное пособие

Зерноград – 2026

Об издании – 1, 2
Содержание

УДК 539.3 (07)

Печатается по решению методического совета Донского Технико-Технологического колледжа Азово-Черноморского инженерного института – филиала ФГБОУ ВО «Донской ГАУ» в г. Зернограде

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент, преподаватель первой категории ДТТК Белоусов А.В.

Исупова И.В. Практикум по технической механике. Часть 1. [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.В. Исупова, А.Б. Портаков. – Электрон. дан. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2026. – 101 с. Режим доступа: Локальная сеть Библиотеки Азово-Черноморского инженерного института ФГБОУ ВО Донской ГАУ.

ISBN 978-5-91833-197-2

Учебное пособие включает в себя краткий теоретический материал в объеме требований образовательных стандартов в виде общих положений и основных расчетных формул по темам практических занятий по теоретической механике и сопротивлению материалов. Содержит методические материалы для решения 36 задач и примеры их решения, более 100 рисунков и схем, более 80 задач для самостоятельного решения, приложения, список литературных источников и интернет-ресурсов.

Учебное пособие обеспечивает формирование общекультурных и профессиональных компетенций для специальностей: 13.02.07 Электроснабжение, 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств, 35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК) и 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования.

Учебное пособие также может быть полезным для бакалавров и специалистов очной и заочной форм обучения по инженерным специальностям.

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «Физики, механики и землеустройства» Протокол № 7 от 10 марта 2026 г.

Рассмотрены и одобрены методическим советом ДТТК.
Протокол № 7 от 27 марта 2026 г.

© Исупова И.В., Портаков А.Б.
© Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2026

Содержание

Введение…… 5
1 Теоретическая механика…….. 6
1.1 Статика……. 6
Практическое занятие 1. Тема «Сила и система сил. Аксиомы статики. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей сил геометрическим способом. Определение равнодействующей сил аналитическим способом» 6
Практическое занятие 2. Тема: «Пара сил и момент силы относительно точки. Главный вектор и главный момент. Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Определение реакций опор» 10
Практическое занятие 3. Тема: «Понятие о центре тяжести тела. Определение координат центра тяжести тела. Статический момент площади плоской фигуры» 16
1.2 Кинематика…… 21
Практическое занятие 4. Тема: «Кинематика точки. Естественный и координатный способы задания движения точки. Скорость точки» 21
Практическое занятие 5. Тема: «Определение ускорений при естественном и координатном способах задания движения материальной точки» 25
Практическое занятие 6. Тема: «Определение кинематических параметров различных видов движения точки. Равномерное движение. Равнопеременное движение» 29
Практическое занятие 7. Тема: «Простейшие движения твердого тела. Поступательное и вращательное движение» 31
Практическое занятие 8. Тема: «Сложное движение точки и твердого тела. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Метод определения мгновенного центра скоростей» 36
1.3 Динамика …… 39
Практическое занятие 9. Тема: «Силы трения. Применение законов динамики. Движение материальной точки. Сила инерции. Метод кинетостатики» 39
Практическое занятие 10. Тема: «Работа и мощность. Работа силы при прямолинейном движении. Работа силы тяжести. Работа и мощность при вращении. Коэффициент полезного действия» 43
2 Сопротивление материалов…… 48
Практическое занятие 11. Тема: «Центральное растяжение и сжатие. Построение эпюр нормальных сил, напряжений и 48

перемещений»
Практическое занятие 12. Тема: «Расчеты при растяжении и сжатии» 57
Практическое занятие 13. Тема: «Сдвиг (срез). Смятие» 61
Практическое занятие 14. Тема: «Кручение. Внутренние силовые факторы при кручении. Построение эпюр крутящих моментов и углов поворота сечений» 70
Практическое занятие 15. Тема: «Изгиб. Внутренние силовые факторы при изгибе. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил» 80
Практическое занятие 16. Тема: «Изгиб. Подбор сечений. Проверочные расчеты» 86

Приложения

Приложение 1. ГОСТ8510-86 Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент. (С сокращениями) 91
Приложение 2. ГОСТ 2590-2006 Прокат сортовой стальной горячекатаный круглый. Сортамент. (С сокращениями) 92
Приложение 3. ГОСТ 8509-93 Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент. (С сокращениями) 93
Приложение 4. ГОСТ 14802-85 Заклепки (повышенной точности). Диаметры отверстий под заклепки (С сокращениями) 95
Приложение 5. ГОСТ 24839-2012 Конструкции строительные стальные. Расположение отверстий в прокатных профилях (С сокращениями) 95
Приложение 6. ГОСТ 8239-89 Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент. (С сокращениями) 97
Приложение 7. ГОСТ 8240-97 Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент (С сокращениями) 98

Литература 99

ВВЕДЕНИЕ

В процессе проектирования новых сельскохозяйственных орудий и проверки прочности существующих конструкций в различных условиях эксплуатации необходимо исследовать характеристики движения элементов конструкции, их законов передвижения, действующих силовых факторов и напряженно-деформированного состояния. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций включает их расчеты на прочность, жесткость, устойчивость при статических и динамических воздействиях. Анализ напряженно-деформированного состояния элементов позволяет на этапе проектирования оптимизировать конструкции машин и механизмов, используемых в сельскохозяйственном производстве для обеспечения их надежности и долговечности в сложных условиях эксплуатации. Указанные вопросы рассматриваются в курсе «Техническая механика» для различных направлений подготовки специалистов среднего звена, бакалавров, специалистов и магистрантов. Содержание пособия построено на материалах лекций и практических занятий, которые проводятся на кафедре «Механика, физика и землеустройство» по специальностям: 13.02.07 Электроснабжение, 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств, 35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК) и 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования.

В пособии изложены разделы курса: Техническая механика и сопротивление материалов., содержат основные расчетные формулы и положения, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы. Приведены рекомендации по оптимальному проектированию типовых элементов конструкций на прочность и жесткость при различных видах нагружения.

В приложениях приведены справочные данные, необходимые для выполнения практических расчетов.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.1 Статика

Практическое занятие 1.

Тема «Сила и система сил. Аксиомы статики. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей сил геометрическим способом. Определение равнодействующей сил аналитическим способом»

Основные положения и расчетные формулы:

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить по теореме косинусов: $F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi}$, где φ – угол между векторами F_1 и F_2.

Для двух сходящихся сил возможны следующие *частные случаи*:

1. Если векторы F_1 и F_2 взаимно перпендикулярны, то равнодействующую можно найти по теореме Пифагора: $F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

2. Если силы F_1 и F_2 направлены по одной прямой в одну сторону, то угол между ними $\varphi = 0^0$ и $\cos\varphi = 1$, $F_\Sigma = F_1 + F_2$.

3. Если силы F_1 и F_2 направлены по одной прямой в противоположные стороны, то угол между ними $\varphi = 180^0$ и $\cos\varphi = -1$, $F_\Sigma = F_1 - F_2$, если $F_1 > F_2$, и $F_\Sigma = F_2 - F_1$, если $F_1 < F_2$.

Для определения равнодействующей сходящейся системы сил выбирают координатные оси и определяют суммы проекций всех заданных векторов на эти оси.

Равнодействующую находят по теореме Пифагора, направление ее определяют по одной из ее проекций на ось.

$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$.

$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$.

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}$$

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}$$

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на пару любых взаимно перпендикулярных осей, лежащих в этой плоскости, равнялись нулю.

$$\sum_0^n \mathrm{F_x} = 0$$

$$\sum_0^n \mathrm{F_y} = 0$$

Задача 1.1. Два человека тянут за канаты, привязанные к кольцу А (рисунок 1.1) и направленные под прямым углом, один с силой F_1 = 100 Н, другой с силой F_2 = 60 Н. С какой силой должен тянуть третий человек и в какую сторону, чтобы кольцо оставалось неподвижным?

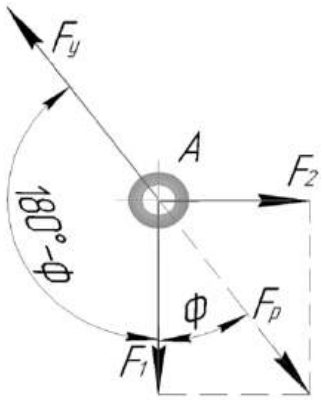


Рисунок 1.1

Решение. Для того чтобы кольцо осталось на месте, необходимо, чтобы третий человек действовал на него с силой, уравновешивающей действие двух других человек. Уравновешивающей будет сила F_y, равная по величине равнодействующей сил F_1 и F_2 и противоположной по направлению F_p (рисунок 1.1).

$$F_{\text{р}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{100^2 + 60^2} = 117\text{Н}.$$

Угол φ определим из силового треугольника:

$\tan\varphi = \frac{F_2}{F_1} = \frac{60}{100} = 0{,}6$, следовательно, φ = 30^{0}57' и угол 180^0-φ = 159^{0}03'.

Следовательно, для того чтобы кольцо оставалось неподвижным, третий человек должен тянуть с силой F_y = 117 Н под углом 180^0-φ = 159^{0}03'.

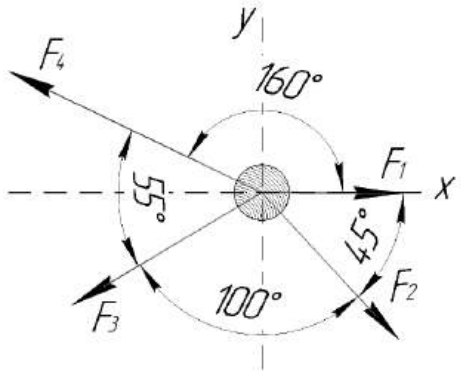


Рисунок 1.2

Задача 1.2. Даны силы: F_1 = 20 Н; F_2 = 30 Н F_3 = 40 Н; F_4 = 50 Н (рисунок 1.2), приложенные к одной точке. Углы между векторами

$$\widehat{F_1,\ F_2} = 45^0;\ \widehat{F_2,\ F_3} = 100^0;$$
$$\widehat{F_3,\ F_4} = 55^0.$$

Определить аналитически равнодействующую этих сил.

Решение. Точку приложения данных сил принимаем за начало координат. Проводим координатные оси *x* и *y*. Определяем проекции всех сил на координатные оси, положительные углы отсчитываем против часовой стрелки:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 0^0 = 20 \cdot 1 = 20\text{Н};$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos(-45^0) = 30 \cdot 0{,}707 = 21{,}2\text{Н};$$
$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos(360^0 - 45^0 - 100^0) = 40 \cdot (-0{,}819) = -32{,}8\text{Н};$$
$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos 160^0 = 50 \cdot (-0{,}94) = -47\text{Н};$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot cos\, 90^0 = 20 \cdot 0 = 0\text{Н};$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos(-90^0 - 45^0) = 30 \cdot (-0{,}707) = -21{,}2\text{Н};$$
$$F_{3y} = F_3 \cdot \cos(360^0 - 90^0 - 45^0 - 100^0) = 40 \cdot (-0{,}543) = -22{,}9\text{Н};$$
$$F_{4y} = F_4 \cdot \cos(-90^0 + 160^0) = 50 \cdot 0{,}342 = 17{,}1\text{Н}.$$

Определяем проекции равнодействующей на оси *x* и *y*.

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 20 + 21{,}2 - 32{,}8 - 47 = -38{,}6\text{Н};$$
$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 - 21{,}2 - 22{,}9 + 17{,}1 = -27\text{Н}.$$

Модуль равнодействующей

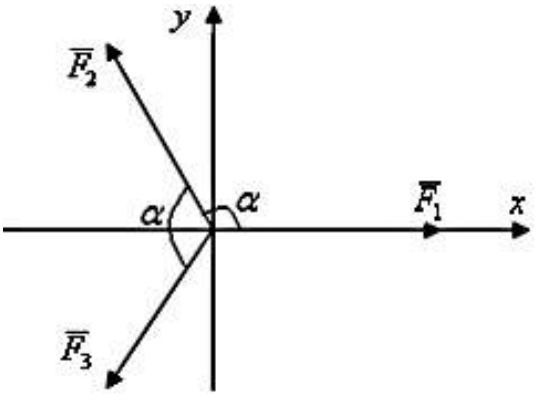
$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} = \sqrt{(-38{,}6)^2 + (-27)^2} = 47{,}1\text{Н}.$$

Направление равнодействующей

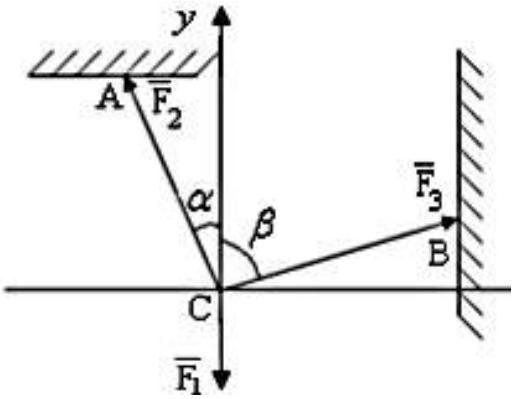
$$\cos\left(\widehat{F_{\Sigma}, x}\right) = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}} = \frac{-38{,}6}{47{,}1} = -0{,}781.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

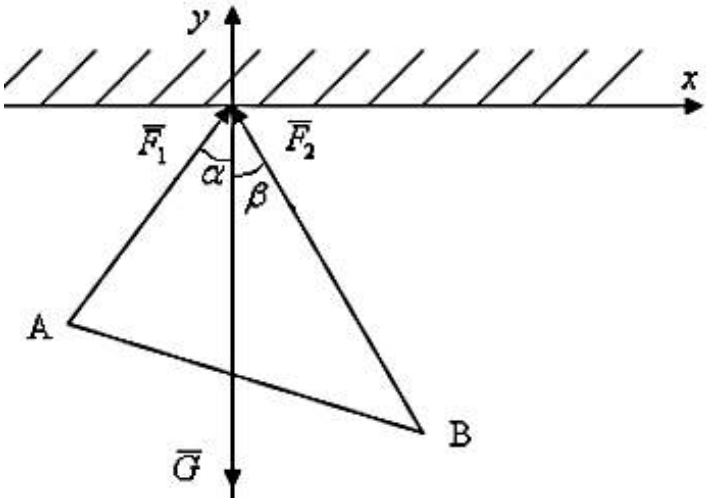
<u>*Задача 1.3*</u> Дана система уравновешенных сходящихся сил F_1; F_2; и F_3. Линии действия сил образуют между собой углы α=120º. Причем F_1=F_2=40 Н. Определить модуль силы F_3.



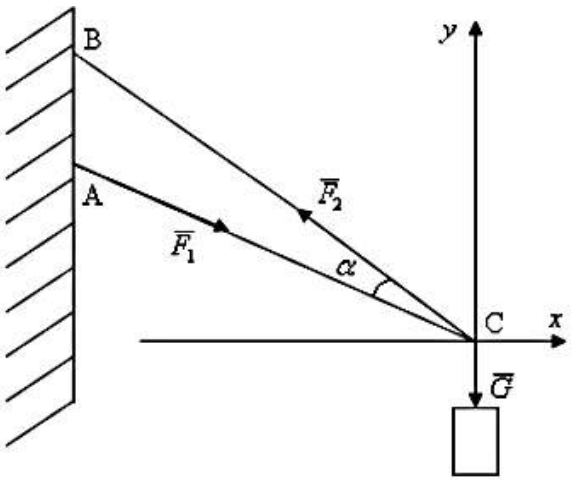
<u>*Задача 1.4*</u> Определить модуль силы F_3 натяжения троса ВС, если известно, что натяжение F_2 троса АС равно 15 Н. В положении равновесия тросы АС и ВС отклонены от вертикали, как показано на схеме, $\alpha = 30^0$ и $\beta = 75^0$.



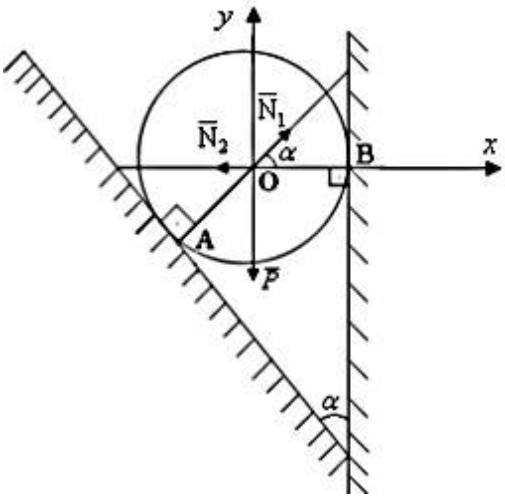
<u>*адача 1.5*</u> Балка АВ подвешена на канатах, силы натяжения которых F_1 и F_2. Определить силу веса G балки, если известны силы натяжения канатов F_1=120 Н и F_2= 80 Н. Углы отклонения от вертикали канатов АС и ВС: α = 45^0 и $\beta = 30^0$ соответственно.



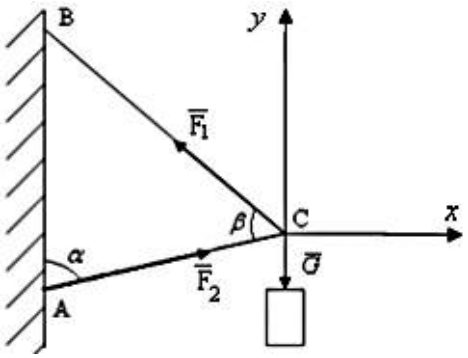
Задача 1.6 Груз весом G удерживается в равновесии двумя стержнями, АС и ВС, шарнирно соединенными в точках А, В и С. Стержень ВС растянут силой F_2=45 Н, а стержень АС сжат силой F_1 = 17 Н. Определить силу веса груза G если α=15º и β = 60º.



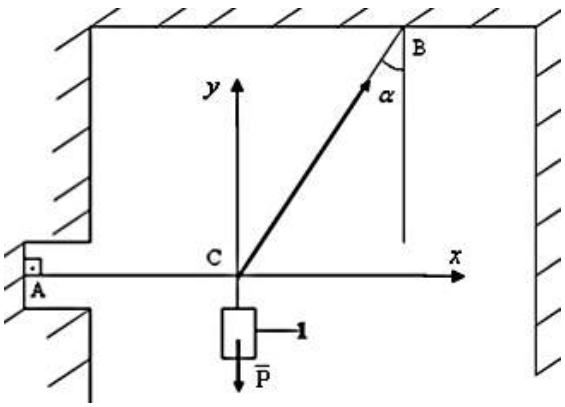
Задача 1.7 Однородный шар весом F= 40 Н опирается на вертикальную и наклонную плоскости, пересекающиеся под углом α= 60°. Определить силу давления шара на наклонную плоскость



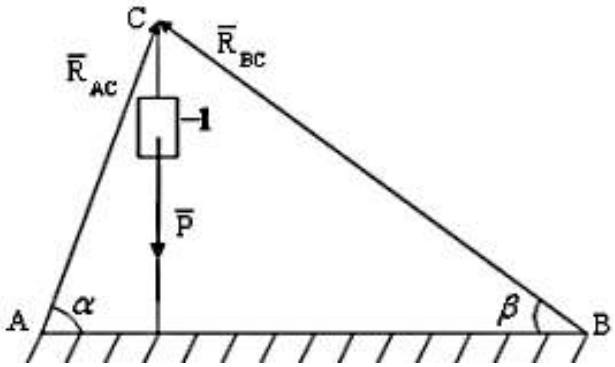
Задача 1.8 Груз удерживается в равновесии двумя стержнями, АС и ВС, шарнирно соединенными в точках А, В и С. Стержень ВС растянут силой F_2=25 Н, а стержень АС сжат силой F_1 = 17 Н. Определить вес груза G если α= 15º и β = 60º.



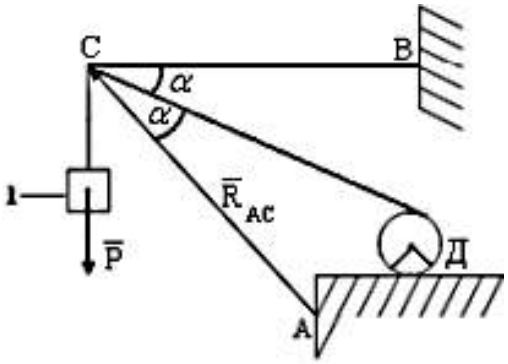
Задача 1.9 Груз1 весом P=2 Н удерживается в равновесии двумя канатами АС и ВС, расположенными в вертикальной плоскости, согласно рисунку. Определить натяжение каната ВС, если угол наклона каната к вертикали α = 30º.



Задача 1.10 Два невесомых стержня АС и ВС соединены в точке С и шарнирно прикреплены к полу. К шарниру С подвешен груз 1. Определить усилие в стержне ВС, если усилие в стержне АС равно 43 Н, углы наклона стержней к горизонту: АС – α = 60º, и ВС – β = 30º.



Задача 1.11 Определить усилие в стержне АС, удерживающего в равновесии груз 1 весом Р=14 Н с помощью цепи, намотанной на барабан Д и перекинутой через блок С, если угол α = 30ºСтержни АС и ВС шарнирно закреплены в обоих концов.



Практическое занятие 2

Тема: «Пара сил и момент силы относительно точки. Главный вектор и главный момент. Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Определение реакций опор»

Основные положения и расчетные формулы:

Парой сил (или просто парой) называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

Абсолютное численное значение момента пары сил равно произведению модуля одной из сил на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (плечо пары).

$$\mathrm{M}(F; F') = \pm F \cdot a.$$

Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линий действия силы.

Перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы, называется плечом силы.

$\mathrm{M_o(F)} = \pm \mathrm{F} \cdot \mathrm{a}$ (Н · м).

Если сила стремится повернуть тело вокруг центра моментов в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, то момент считается положительным, если по ходу часовой стрелки – то отрицательным.

Вектор $\mathrm{F_{гл}}$, равный геометрической сумме всех сил данной системы, является главным вектором этой системы.

$\mathrm{F_{гл}} = \sum \mathrm{F_k}$.

Модуль и направление главного вектора как для равнодействующей :

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}\ .$$

$$\cos\left(\widehat{F_{\Sigma,}\ x}\right) = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}}.$$

Алгебраическая сумма моментов всех данных сил, расположенных произвольно на плоскости, относительно какой-либо точки О называется главным моментом данной плоской системы сил относительно этой точки.

$$M_{гл} = \Sigma\, Mo(F_k).$$

Таким образом: всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы и приложенной к произвольной точке О, и парой, момент которой равен главному моменту данной системы сил относительно той же точки.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно любой точки плоскости действия сил равнялись нулю:

$F_{гл} = \sum F_k = 0,$ $\quad M_{гл} = \Sigma\, Mo(F_k) = 0$Или: $\sum_o^n F_x = 0$, $\sum_o^n F_y = 0$, $\sum_0^n M(F_i) = 0$

Задача 2.1 На концах консолей балки (консолью называется часть балки, выступающая за опору) (рисунок 2.1) действуют две равные параллельные силы F=F' = 20 кН. Определить реакции опор балки, если ее пролет h = 5 м, а длина консолей, a = 2 м. Весом балки пренебречь.

Решение. На данную балку действует пара сил (F, F'), стремящаяся

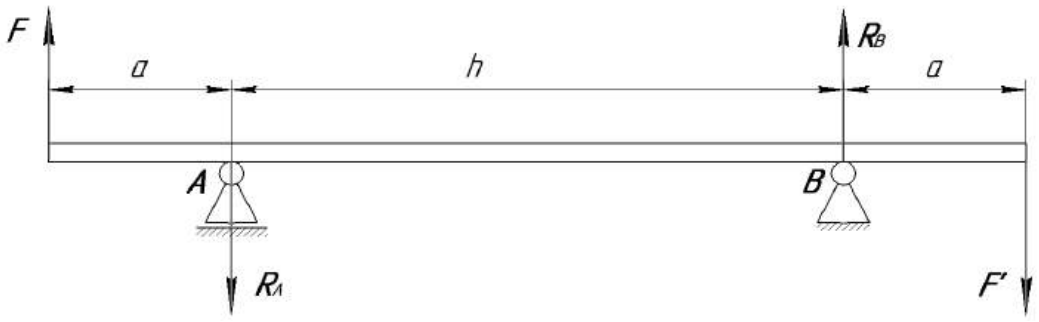


Рисунок 2.1 – Схема нагружения балки

повернуть балку по часовой стрелке. Момент этой пары: $M = -F \cdot (2a + h)$. Так как балка находится в равновесии, а пара может быть уравновешена только парой, то реакции опор R_A и R_B должны образовывать пару (R_A, R_B), стремящуюся повернуть балку в противоположную сторону, т.е. против часовой стрелки. Момент этой пары реактивных сил: $M_R = R_A \cdot h$.

По условию равновесия

$$M_{\Sigma} = 0 = M + M_R = -F \cdot (2a + h) + R_A \cdot h,$$

следовательно, $R_A = R_B = \frac{F \cdot (2a+h)}{h} = \frac{20 \cdot (2 \cdot 2 + 5)}{5} = 36$кН.

Задача 2.2 Брус большой жесткости, деформациями которого можно пренебречь, закреплен с помощью стержней (рисунок 2.2). Требуется,

используя условия равновесия плоской системы сил, определить усилия в стержнях.

Исходные данные к задаче

F_2, кН	q, кН/м	b, м	l, м
40	30	2,1	3,0

Решение. Обозначим реакции в стержнях R_1, R_2 *и* R_3. Направление выбираем произвольное, вдоль стержней.

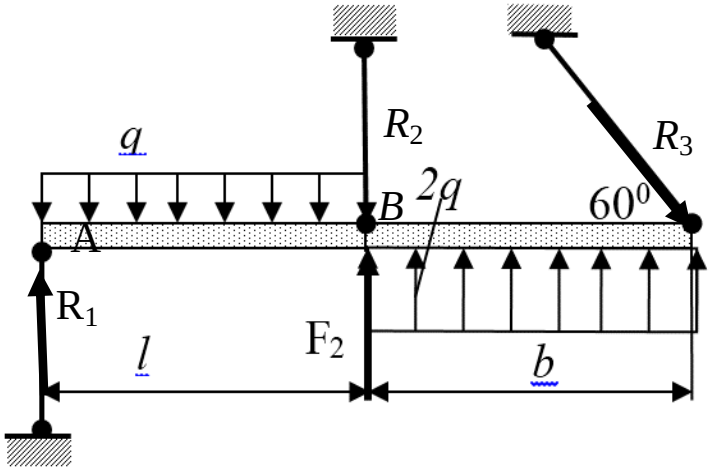


Рисунок 2.2 – Схема нагружения бруса

Используем третью форму условий равновесия для плоской произвольной системы сил:

$$\sum X = 0 = R_3 \cdot \cos 45^0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 = \ -R_2 \cdot l + F_2 \cdot l + 2q \cdot b \cdot (\frac{b}{2} + l) - q \cdot \frac{l^2}{2} \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0 = \ q \cdot \frac{l^2}{2} + 2q \cdot \frac{b^2}{2} - R_3 \sin 45^0 \cdot b - R_1 \cdot l \quad (3)$$

Решим систему уравнений.

Из (1) $R_3 = 0$.

Из (2) $R_2 = \frac{F_2 \cdot l + 2q \cdot b \cdot (\frac{b}{2} + l) - q \cdot \frac{l^2}{2}}{l} = \frac{40 \cdot 3.0 + 2 \cdot 30 \cdot 2.1 \cdot (1.05 + 3.0) - 30 \cdot \frac{3.0^2}{2}}{3.0} = 165{,}1$ кН.

Из (3) $R_1 = \frac{q \cdot \frac{l^2}{2} + 2q \cdot \frac{b^2}{2} - R_3 \sin 45^0 \cdot b}{l} = \frac{30 \cdot \frac{3^2}{2} + 60 \cdot \frac{2.1^2}{2} - 0}{3} = 89{,}1$ кН.

Проверка: $\sum Y = R_1 + F_2 - q \cdot l - R_2 + 2q \cdot b =$

$= 89{,}1 + 40 - 30 \cdot 3 - 165{,}1 + 60 \cdot 2{,}1 = 0$ – реакции и их направления в стержнях определены верно.

Ответ: $R_1 = 89{,}1$кН, $R_2 = 165{,}1$кН, $R_3 = 0$.

Задача 2.3 Однородный стержень длиной 2,5 м и весом G = 500 Н опирается на гладкий горизонтальный пол под углом 60^0 в точке A и на угловые поверхности в точках B и D (рисунок 2.3). Определить реакции опор, если: $AB = BD$ = 1 м и AC = 1,25 м.

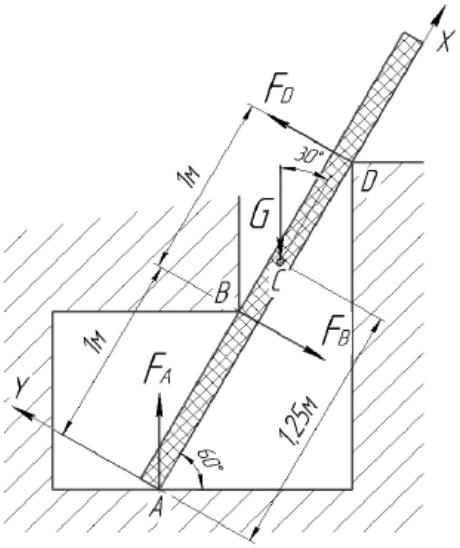


Рисунок 2.3

Решение. Мысленно отбросим связи, заменив их реакциями опор. Реакция F_A направлена перпендикулярно полу, предположительно вверх. Реакции F_B и F_D направлены перпендикулярно поверхности стержня и предположительно в разные стороны, чтобы стержень не двигался по горизонтали. Рассматриваем стержень как свободный и находящийся в равновесии. Все силы – реакции опор и сила тяжести располагаются в одной плоскости. Проведем координатные оси XAY, как показано на рисунке 2.3.

Используем третью форму условий равновесия для плоской произвольной системы сил:

$$\sum X = 0 = F_A \cdot \cos 30^0 - G \cdot \cos 30^0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 = -F_B \cdot |AB| - G \cdot \sin 30^0 \cdot |AC| + F_D \cdot (|AB| + |BD|) \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0 = -F_A \cdot \sin 30^0 \cdot |AB| - G \cdot \sin 30^0 \cdot (|AC| - |AB|) + F_D \cdot |BD| \quad (3)$$

Решим систему уравнений.

Из (1) $F_A = G = 500$ Н.

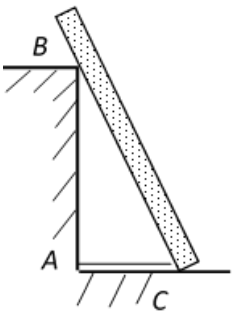
Из (3) $F_D = \frac{F_A \cdot \sin 30^0 \cdot |AB| + G \cdot \sin 30^0 \cdot (|AC| - |AB|)}{|BD|} = \frac{500 \cdot 0{,}5 \cdot 1 + 500 \cdot 0{,}5 \cdot (1{,}25 - 1)}{1} = 312{,}5$ Н.

Из (2) $F_B = \frac{-G \cdot \sin 30^0 \cdot |AC| + F_D \cdot (|AB| + |BD|)}{|AB|} = \frac{-500 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}25 + 312{,}5 \cdot (1+1)}{1} = 312{,}5$ Н.

Проверка:

$\sum Y = F_A \cdot \sin 30^0 - F_B - G \cdot \sin 30^0 + F_D = 500 \cdot 0{,}5 - 312{,}5 - 500 \cdot 0{,}5 + 312{,}5 = 0$ – реакции и их направления найдены верно.

Задачи для самостоятельного решения:

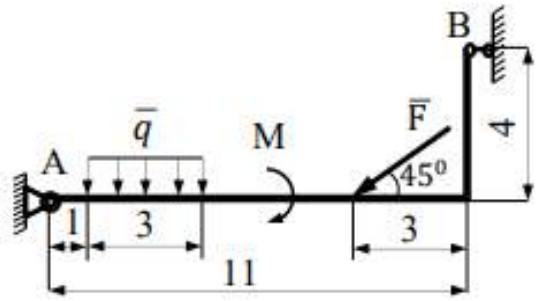


Задача 2.4 Однородная балка веса 600 Н и длины 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой В – на столб высоты 3 м, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении веревкой АС, протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить

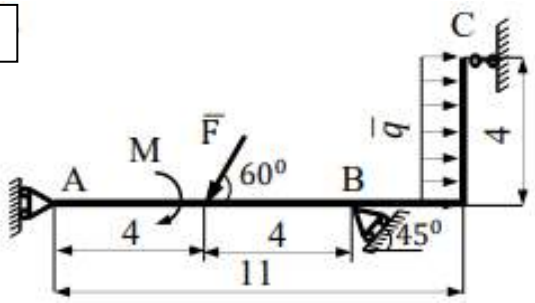
натяжение веревки T и реакции R_B столба и R_C пола.

Задача 2.5 Для представленных на схемах 1; 2; 3; 4 тел определить реакции опор. Приведённые на схемах нагрузки имеют следующие величины: сила F=7кН, момент пары сил M=5 кН·м, интенсивность распределённой нагрузки q=4кН/м. Размеры указаны в метрах. Весом тела следует пренебречь.

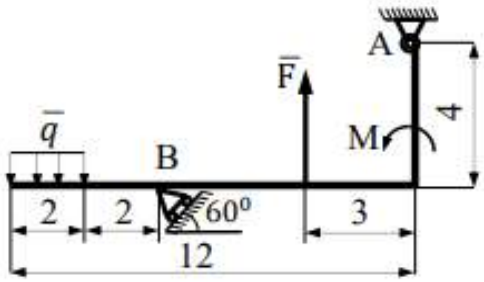
1



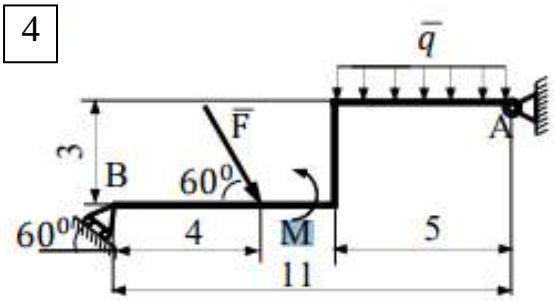
2



3



4

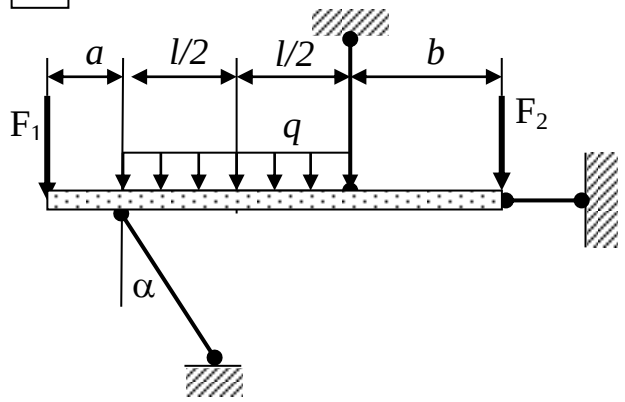


Задача 2.6 Невесомая жесткая балка поддерживается тремя невесомыми стержнями, шарнирно закрепленными с двух концов и испытывает внешние нагрузки: сосредоточенные силы F_1, и F_2; момент пары сил M, равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q. Определить реакции опор.

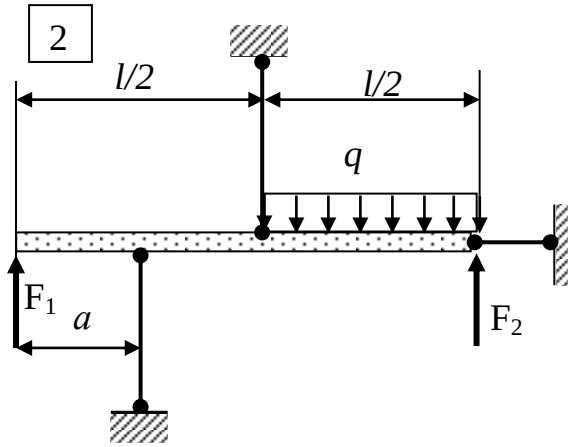
Таблица 2.1 – Исходные данные к задаче 2.6

№ п/п		F_1, кН	F_2, кН	q, кН/м	M, кН·м	a, м	b, м	l, м	α, °	β, °
1		20	45	35	10	2,0	2	2,0	25	30
2		25	40	30	12	3,0	0,6	2,5	35	40
3		35	20	40	15	0,4	1,2	3,0	50	45
4		40	25	45	16	1,0	0,8	2,6	55	60
5		45	30	25	18	0,6	1,1	2,8	65	20
6		30	25	20	20	0,5	0,7	1,5	70	25
7		70	50	10	10	0,8	0,5	1,0	40	30
8		50	40	30	15	1,4	2,1	3,0	45	45
9		60	35	17	21	0,7	1,7	3,2	20	35
10		35	28	20	15	0,9	1,9	2,5	60	40

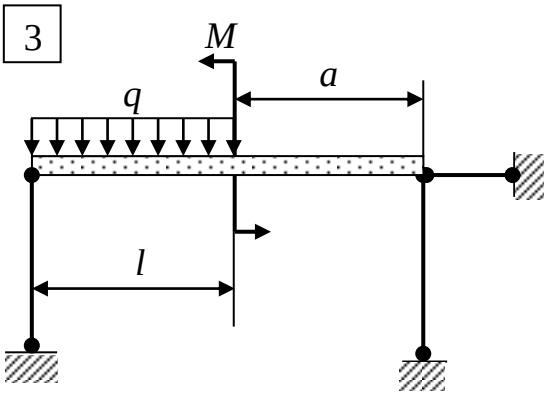
1


a
l/2
l/2
b
F1
F2
q
α

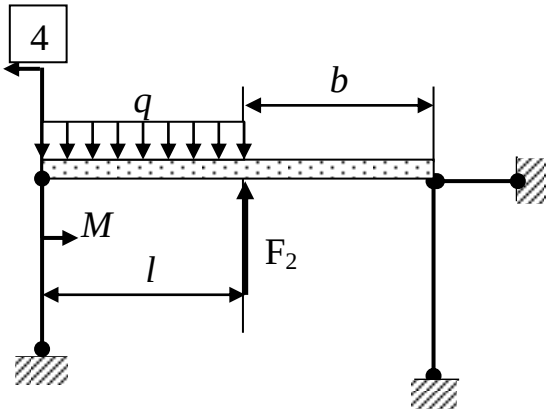
2


l/2
l/2
q
F1
a
F2

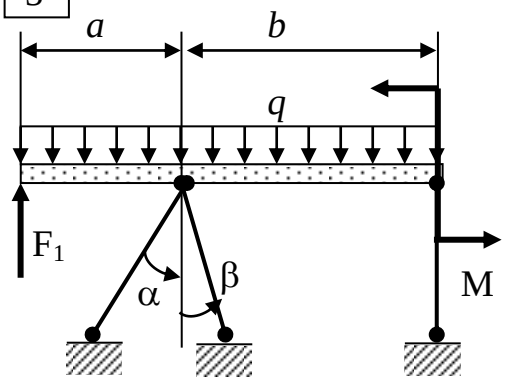
3


M
q
a
l

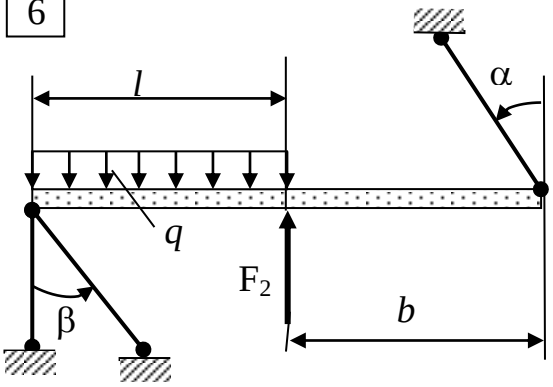
4


q
b
M
F2
l

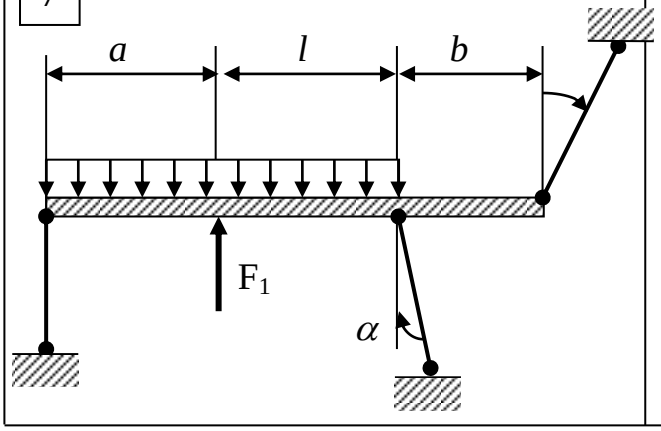
5


a
b
q
F1
α
β
M

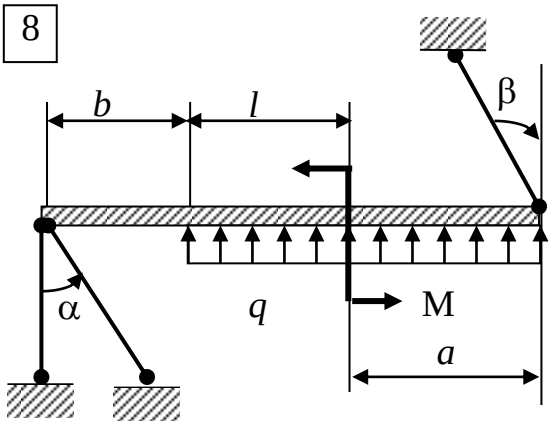
6


l
α
q
F2
β
b

7


a
l
b
F1
α

8


b
l
β
α
q
M
a

Практическое занятие 3

Тема: «Понятие о центре тяжести тела. Определение координат центра тяжести тела. Статический момент площади плоской фигуры»

Основные положения и расчетные формулы:

Равнодействующая сил тяжести всех отдельных частиц тела называется силой тяжести тела.

Центр тяжести тела есть такая, неизменно связанная с этим телом, точка, через которую проходит линия действия силы тяжести данного тела при любом положении тела в пространстве. При этом центр тяжести не является материальной частицей тела, к которой непосредственно приложена сила тяжести.

Для определения положения центра тяжести тела выбираются вспомогательные оси координат *XYZ*.

Координаты центра тяжести тела относительно выбранных осей координат определяются по формулам:

$X_C = \frac{\sum G_k \cdot x_k}{\sum G_k} = \frac{\sum G_k \cdot x_k}{G}$; $Y_C = \frac{\sum G_k \cdot y_k}{\sum G_k} = \frac{\sum G_k \cdot y_k}{G}$;

$Z_C = \frac{\sum G_k \cdot z_k}{\sum G_k} = \frac{\sum G_k \cdot z_k}{G}$,

где X_C, Y_C, Z_C – координаты центра тяжести тела;

G_k – сила тяжести произвольной части тела;

x_k, y_k, z_k – координаты этой частицы;

G – сила тяжести всего тела.

Центр тяжести однородной тонкой пластины постоянной толщины, имеющей очертания плоской фигуры, называется центром тяжести площади данной плоской фигуры.

Его координаты:

$X_C = \frac{\sum A_k \cdot x_k}{A}$, $Y_C = \frac{\sum A_k \cdot y_k}{A}$,

где A_k – площадь произвольного элемента фигуры;

x_k, y_k – координаты этого элемента;

A – площадь всей фигуры.

Произведение площади элемента фигуры на кратчайшее расстояние от ее центра тяжести до какой-либо оси, лежащей в той же плоскости, называется статическим моментом элемента фигуры относительно этой оси.

Сумма статических моментов всех отдельных элементов, на которые разбита данная площадь, взятых относительно какой-либо одной оси, называется статическим моментом площади данной фигуры относительно этой оси.

$S_x = \sum A_k \cdot x_k$ и $S_y = \sum A_k \cdot y_k$.

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяют по формулам:

$$X_C = \frac{\sum A_k \cdot x_k}{A} = \frac{S_x}{A}, \quad \text{и} \quad Y_C = \frac{\sum A_k \cdot y_k}{A} = \frac{S_y}{A}.$$

Задача 3.1 Для бруса, состоящего из трех стержней (схема расположения стержней показана на рисунке), определить положение центра тяжести сложного сечения относительно вспомогательных осей и показать его на рисунке.

Исходные данные:

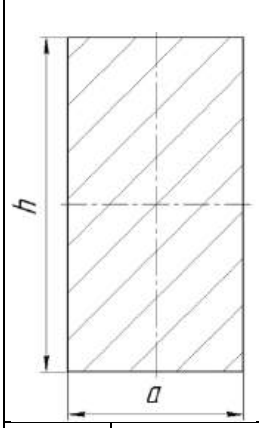
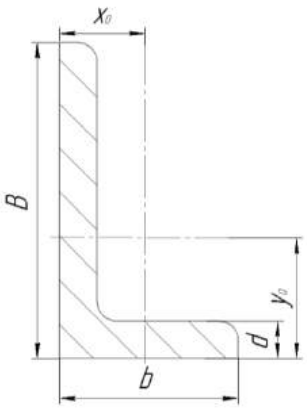
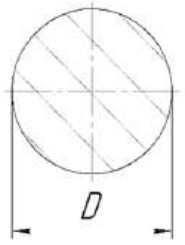
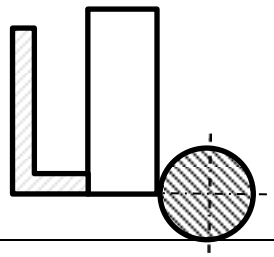
Прямоугольник		Уголок, ГОСТ8510-72						Круг, ГОСТ 2590-71
								
h, мм	*a*, мм	*B*, мм	*b*, мм	*d*, мм	x_0, мм	y_0, мм	*A*, см^2	*D*, мм
70	20	90	56	8	13,6	30,4	11,18	25

Схема расположения стержней



Решение.

1. Для определения положения центра тяжести сложной фигуры необходимо выбрать вспомогательные оси. В качестве вспомогательных осей выбираются любые координатные, но, при этим желательно, чтобы все центры тяжести составляющих фигур находились в положительной четверти координатных осей.

Чтобы все центры тяжести стержней имели положительные координаты, выберем в качестве вспомогательных осей оси X_3 и Y_2. Покажем их жирной линией (рисунок 3.1).

Площадь прямоугольника $A_1 = a \cdot h = 20 \cdot 70 = 1400$ мм^2.

Площадь уголка 90×56×8 $A_2 = 1118$ мм^2.

Площадь сплошного круглого сечения $A_3 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 491$мм^2.

2. Определим положение общего центра тяжести сложного сечения относительно вспомогательных осей.

Определение координат центров тяжести составляющих сечение фигур относительно вспомогательных осей показано на рисунке 1.6 в соответствии с таблицей исходных данных.

При этом координаты $X_2 = 0$ и $Y_3 = 0$, т.к. центры тяжести уголка и круга лежат на вспомогательных осях.

$$X_c = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1400 \cdot 52{,}4 + 1118 \cdot 0 + 491 \cdot 74{,}9}{1400 + 1118 + 491} = 36{,}6\text{мм} \quad ;$$

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1400 \cdot 35 + 1118 \cdot 30{,}4 + 491 \cdot 0}{1400 + 1118 + 491} = 27{,}6\text{мм} \quad .$$

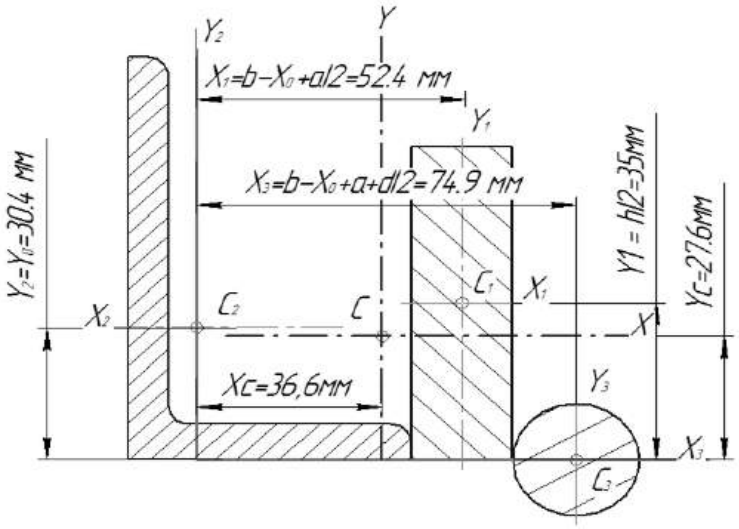
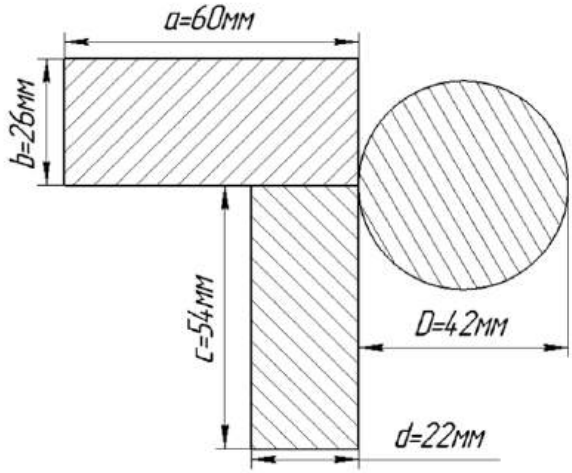


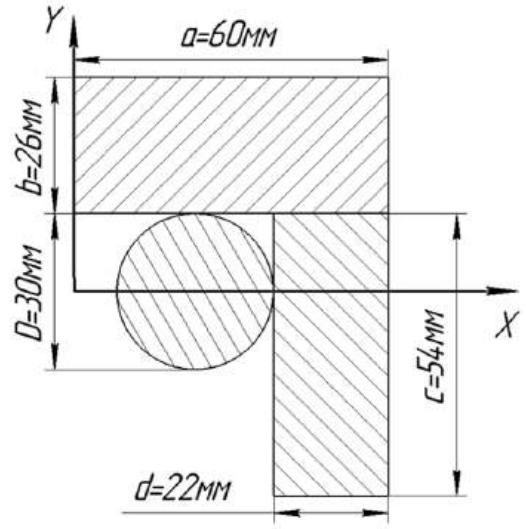
Рисунок 3.1 – Определение положения центра тяжести сложного сечения

Задачи для самостоятельного решения:

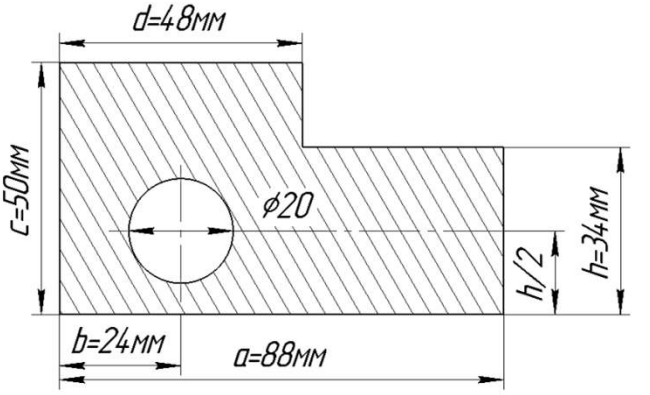
Задача 3.2 Определить положение центра тяжести сложного сечения



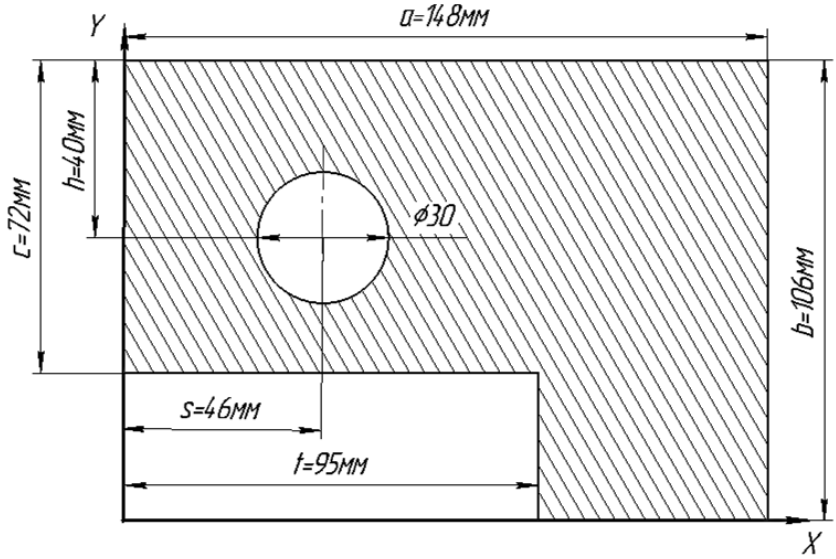
Задача 3.3 Определить положение центра тяжести сложного сечения относительно заданных осей



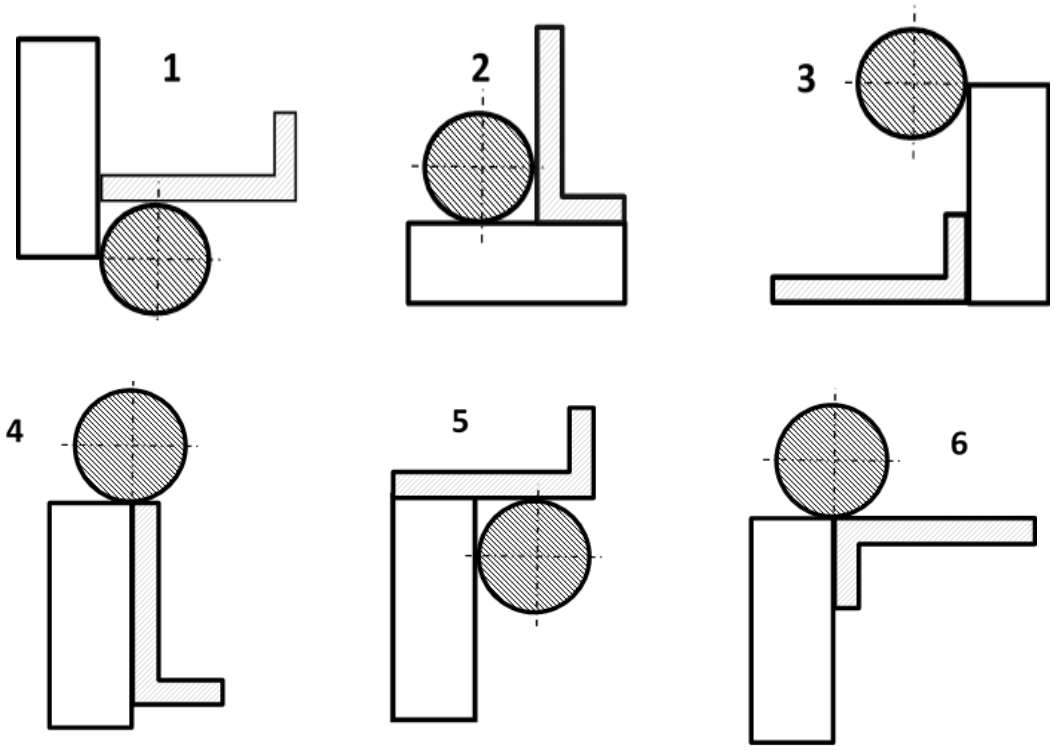
Задача 3.4 Определить положение центра тяжести сложного сечения



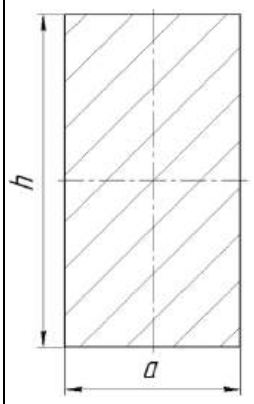
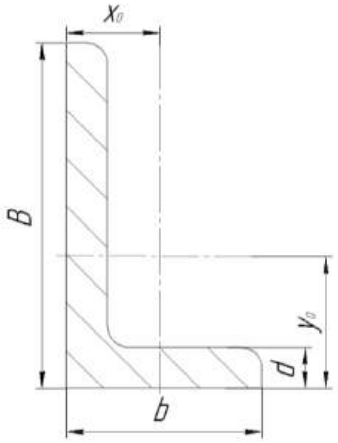
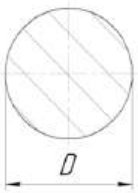
Задача 3.5 Определить статические моменты сложного сечения относительно заданных осей



Задача 3.6. Для заданного сложного сечения определить положение центра тяжести относительно произвольных осей координат. Размеры составных частей приведены в таблице.



Таблица– Размеры составных частей сечения

	Прямоугольник		Уголок, ГОСТ8510-86						Круг, ГОСТ 2590-2006
									
Вариант	h, мм	a, мм	B, мм	b, мм	d,мм	x_0, мм	y_0, мм	F, см^2	D, мм
1	15	10	25	16	3	4,2	8,6	1,16	10
2	20	10	32	20	4	5,3	11,2	1,94	10
3	20	14	45	28	4	6,8	15,1	2,8	15
4	30	25	63	40	8	10,7	22	7,68	20
5	30	20	70	45	5	10,5	22,8	5,59	22
6	40	25	75	50	8	12,9	25,2	9,47	25
7	30	25	80	50	6	11,7	26,5	7,58	25
8	70	20	90	56	8	13,6	30,4	11,18	25

1.2 Кинематика

Практическое занятие 4

Тема: «Кинематика точки. Естественный и координатный способы задания движения точки. Скорость точки»

Основные положения и расчетные формулы:

Твердое тело, по отношению к которому с помощью системы координат определяется положение других тел в разные моменты времени, называется системой отсчета.

Момент времени, в который определяются параметры движения, называют данный момент времени и обозначают t_1, t_2 и т.д.

Разница моментов времени называется промежутком времени.

Траектория точки – линия, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве.

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее и положение точки в указанный момент времени определяется зависимостью $s=f(t)$.

При этом расстояние s точки от начала отсчета нельзя смешивать с длиной пути S, пройденного точкой за соответствующий промежуток времени, так как, если направление движения точки по траектории изменяется, то ее расстояние s от начала отсчета будет с течением времени то увеличиваться, то уменьшаться. В то же время пройденный точкой путь может только увеличиваться.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки относительно некоторой системы отсчета может быть задано при помощи определенной совокупности чисел, называемых ее координатами.

Наибольшее применение на практике получила прямоугольная система координат, когда положение точки в пространстве можно определить по трем координатам: x, y и z. При движении точки ее координаты изменяются с течением времени. Уравнения, выражающие функциональные зависимости между координатами точки (x, y и z) и временем t ее движения, называются уравнениями движения точки в прямоугольных координатах:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

Если точка движется по плоскости, то в любой момент времени t ее положение на плоскости определяется двумя координатами:

$$x = f_1(t), y = f_2(t).$$

Если точка совершает прямолинейное движение, то можно принять прямую, по которой движется точка, за одну из координатных осей, например, ось x, тогда прямолинейное движение определяется одним уравнением:

$$x = f_1(t).$$

Уравнения движения точки в прямоугольных координатах определяют траекторию точки. Исключая время t из заданных уравнений движения точки, получаем уравнение ее траектории, то есть, траекторию на плоскости можно представить уравнениями: $y = f(x)$ или $x = f(y)$.

Скорость точки – векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения точки по траектории.

Постоянное для данного движения отношение пути S, пройденного точкой за некоторый промежуток времени, к величине t этого промежутка представляет собой модуль V скорости точки при ее равномерном движении.

$$V = \frac{S}{t}.$$

В случае прямолинейного движения точки вектор ее скорости направлен по траектории в сторону движения.

При криволинейном движении скорость – вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения.

При естественном способе задания движения точки скорость в данный момент времени определяют как производную пути по времени

$$V = \frac{dS}{dt} \ (м/с).$$

При координатном способе задания движения проекции скорости точки на неподвижные координатные оси равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad V_y = \frac{dy}{dt}.$$

Векторы V_x и V_y перпендикулярны друг другу, поэтому суммарный вектор, т.е. вектор скорости точки, в определенный момент времени можно найти по формуле

$$V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2}.$$

Направление вектора скорости определяется его направляющими косинусами:

$$\cos\left(\widehat{V,x}\right) = \frac{V_x}{V} \ \text{ и } \cos\left(\widehat{V,y}\right) = \frac{V_y}{V} \ .$$

Задача 4.1 По заданным уравнениям движения точки *M* определить ее траекторию и показать ее на рисунке.

Дано: $x = 2 - \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, $y = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

Решение. Выводим из уравнений движения функции, связанные с $\left(\frac{\pi t}{6}\right)$. Получим:

$$\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y}{2} \text{ и } \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{2-x}{1}.$$

Возведем оба уравнения во вторую степень и сложим:

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \ldots^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{(2-x)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} \text{ или } 1 = \frac{(2-x)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2}.$$

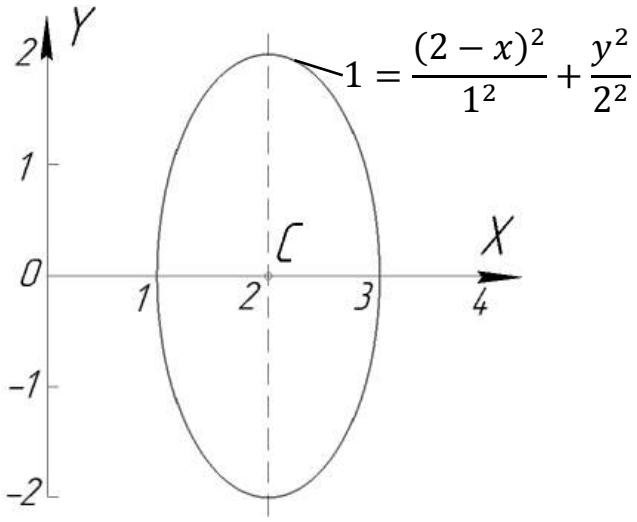


Рисунок 4.1

Получили траекторию эллипса с полуосями $x = \pm 1$ см и $y = \pm 2$ см и координатами центра *C*(2;0) (рисунок 4.1).

Поскольку траектория представляет собой замкнутую линию, начало движения и его направление не указывается, так как условия задачи этого не требуют.

Задача 4.2 Точка движется по заданной криволинейной траектории по закону $S = 4\sin(\pi t)$, *t* – в секундах, *S* – в сантиметрах. Определить модуль и направление скорости в момент *t* = 3 с.

Решение. Определим начальное положение точки. При *t* = 0 с, $S = 4\sin(0) = 0$. В момент времени *t* = 3 с, $S = 4\sin(3\pi) = 0$, следовательно точка возвращается в начало отсчета.

Определим скорость точки $V = \frac{dS}{dt} = (4\,sin(\pi t))' = 4\pi\cos(\pi t)$.

В момент времени *t* = 3 с, скорость точки

$$V = 4\pi\cos(3\pi) = 4\pi \cdot (-1) = -12{,}6\,{}^{\text{см}}/_{\text{с}}.$$

Отрицательное значение показывает, что в этот момент точка движется по траектории в сторону, противоположную той, которая принята за положительную при отсчете расстояний *S*.

Ответ: искомая скорость точки в момент времени *t* = 3 с равна $12{,}6\,{}^{\text{см}}/_{\text{с}}$ и направлена по касательной к ее траектории в сторону, противоположную положительной стороне отсчета.

Задача 4.3 Точка *M* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям движения: $x = t - 2$ (1) и $y = 4\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ (2), *t* – в секундах, *x*, *y* – в сантиметрах. Определить скорость точки в момент времени t_1 = 1 с и показать вектор скорости на рисунке.

Решение. Определим траекторию движения точки. Из (1) $t = x + 2$, подставим в (2) $y = 4\sin\left(\frac{\pi(x+2)}{4}\right)$ – уравнение синусоиды. Определим начало траектории при *t* = 0 с, x_0 = -2 см, $y_0 = 4\sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{4}\right) = 0$см.

Определим положение точки M_1 в момент времени t_1 = 1 с, подставив заданное значение *t* в уравнения (1) и (2).

$$x_1 = 1 - 2 = -1\text{см},\ y_1 = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}83\text{см}.$$

Построим часть траектории около точки M_1 (рисунок 4.2).

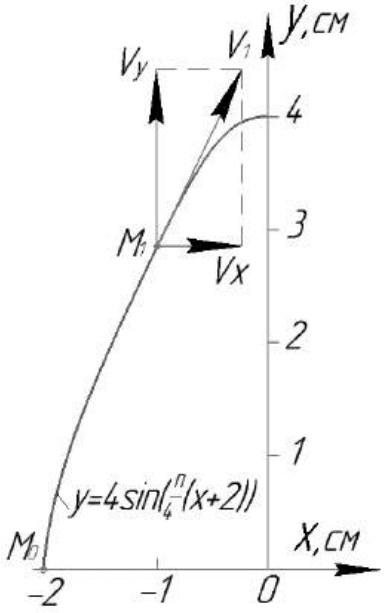


Рисунок 4.2

Определим скорость точки M_1 по ее проекциям на оси координат:

$V_x = \frac{dx}{dt} = (x+2)' = 1\text{см/с}$ – скорость вдоль оси *Ox* постоянна.

$V_y = \frac{dy}{dt} = \left(4\,sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right)' = \pi\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$,

При $t_1 = 1$ с, $V_y = \pi\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}83\text{см/с}$ скорость точки M_1

$V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}83^2} = 3{,}0\text{см/с}.$

Покажем полученные векторы на рисунке. Сначала показываем из точки M_1 в масштабе векторы V_x и V_y. Значения их положительны, поэтому их направления совпадают с положительными направлениями осей координат *Ox* и *Oy*. Сложив их геометрически, получаем вектор *V*. Он направлен в сторону движения точки и расположен по касательной к ее траектории.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 4.4 По заданным уравнениям x=f(t) и y=f(t) движения точки *M* определить ее траекторию и показать ее на рисунке

$x=4\cos^2(\frac{\pi}{3}\cdot t) + 2$

$y=4\sin^2(\frac{\pi}{3}\cdot t)$

Задача 4.5 Точка *M* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям движения: $x=4\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot t)$; $y=3\cdot\sin(\frac{\pi}{3}\cdot t)$ (*t* – в секундах, *x*, *y* – в сантиметрах). Построить траекторию движения, показать положение точки. Определить скорость точки в момент времени t_1 = 1 с, показать вектор скорости V и проекции V_x и V_y вектора скорости на рисунке.

Задача 4.6 Точка движется по дуге окружности радиуса R=20 см. Закон ее движения по траектории: $s=20\cdot\sin(\pi t)$ (t – в секундах, s – в сантиметрах). Найти величину скорости V точки в момент t=5 с.

Задача 4.7 Точка *M* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям движения: x=x(*t*), y=y(*t*) указанным в таблице ниже (*t* – в секундах). Построить траекторию движения , показать положение точки M. Определить скорость V точки и проекции V_x и V_y скорости в момент времени t_1 =2 с. Показать все вектора на рисунке.

Вариант	Координаты точки	
	x = x (*t*), см	y = y (*t*), см
1	$3\cdot t$	$4\cdot t^2+1$
2	$-2\cdot t^2+3$	$-5\cdot t$
3	$4\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot t)$	$3\cdot\sin(\frac{\pi}{3}\cdot t)$
4	$7\cdot\sin^2(\frac{\pi}{6}\cdot t)-5$	$7\cos^2(\frac{\pi}{6}\cdot t)$
5	$2\cdot t$	$t-3\cdot t^2$
6	$3\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot t^2)$	$3\sin(\frac{\pi}{3}\cdot t^2)$
7	$4\cdot t^2+1$	$12\cdot t$
8	$6\cdot\sin(\frac{\pi}{6}\cdot t^2)-2$	$6\cdot\cos(\frac{\pi}{6}\cdot t^2)+3$

Практическое занятие 5

Тема: «Определение ускорений при естественном и координатном способах задания движения материальной точки»

Основные положения и расчетные формулы:

Ускорение точки – векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.

Средним за данный промежуток времени ускорением точки называется вектор, равный отношению вектора приращения скорости точки за соответствующий промежуток времени к этому промежутку.

$$a_{ср} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Вектор ускорения всегда направлен вовнутрь вогнутости траектории.

При криволинейном движении обычно рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное.

Нормальное ускорение всегда направлено по нормали в сторону вогнутости траектории, т.е. к центру кривизны и определяется по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{r},$$

где r – радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение характеризует изменение направления вектора скорости.

Касательное ускорение a_τ характеризует изменение скорости во времени и всегда направлено по касательной к траектории.

Численное значение касательного ускорения точки равно производной по времени от численного значения скорости:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

При ускорении его направление совпадает с направлением скорости, при замедлении – направлено противоположно вектору скорости.

Направление полного ускорения определяют по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

При координатном способе задания движения $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$, скорость точки в проекции на оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad V_y = \frac{dy}{dt}.$$

Проекции ускорения точки на неподвижные координатные оси равны первым производным по времени от проекций скорости точки на соответствующие координатные оси или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{и} \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Модуль полного ускорения точки определится по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

а его направление определится из формул:

$$\cos(\widehat{a,x}) = \frac{a_x}{a} \quad \text{и} \quad \cos(\widehat{a,y}) = \frac{a_y}{a}.$$

Касательная составляющая ускорения определяется по формуле:

$$a_{\tau 1} = \frac{V_{x1} \cdot a_{x1} + V_{y1} \cdot a_{y1}}{V_1}$$

Задача 5.1 Точка *M* движется по окружности радиуса r = 8 *м* по закону $S = 4t^4$ (S – в метрах, t – в секундах (рисунок 5.1) по часовой стрелке. Найти модуль *a* ускорения точки и показать его на рисунке через 1 с после начала движения и определить его положение относительно вектора скорости.

Решение. Определим модуль скорости точки

$$V = \frac{dS}{dt} = (4t^4)' = 16t^3,$$

При t_1 = 1 с $V_1 = 16t^3 = 16 \cdot 1^3 = 16\text{м/с}$.

Определим ускорения:

касательное ускорение $a_\tau = \frac{dV}{dt} = (16t^3)' = 48t^2$ и

$a_{\tau 1} = 48 \cdot 1^2$= 48 *м/с*^{2} – ускорение положительное, значит направлено в ту же сторону, что и вектор скорости;

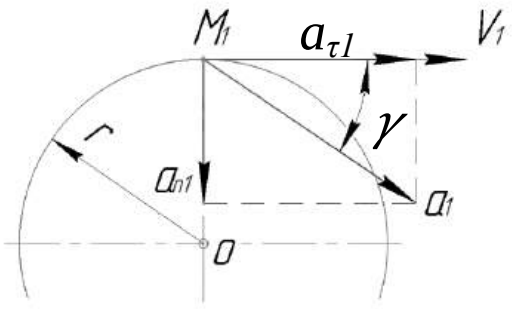


Рисунок 5.1 – Скорости и ускорения точки

нормальное ускорение $a_{n1} = \frac{{V_1}^2}{r} = \frac{16^2}{8} = 32\text{м/с}^2$ – вектор ускорения направлен по радиусу к центру траектории;

полное ускорение точки $a_1 = \sqrt{a_{\tau 1}^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{48^2 + 32^2} = 57{,}7\text{м/с}^2$.

Так как направления вектора скорости и касательного ускорения

совпадают, направление вектора a_1 относительно вектора скорости можно определить из прямоугольного треугольника:

$$\cos\gamma = \frac{a_{\tau 1}}{a_1} = \frac{48}{57{,}7} = 0{,}832$$
$$\Rightarrow \gamma = 33{,}7^0.$$

Задача 5.2 Используем условия задачи 4.3 и определим ускорение точки в указанный момент времени и покажем его на рисунке 5.2.

Решение. При решении получили, что проекции скорости точки на координатные оси меняются в зависимости от времени:

$V_x = 1\text{см/с}$ – скорость вдоль оси *Ox* постоянна.

$$V_y = \pi\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

Определим проекции ускорений на координатные оси *xOy*:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = (1)' = 0\ \text{см/с}^2,$$
$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \left(\pi\, cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right)' = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

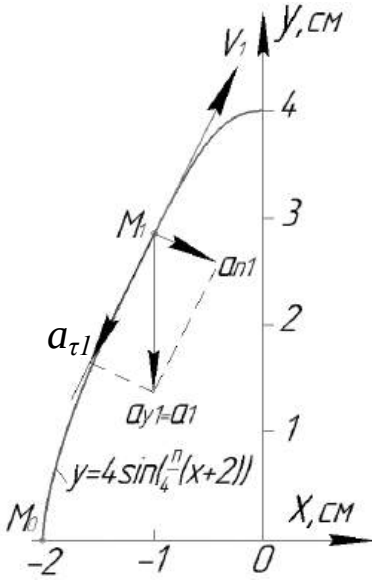


Рисунок 5.2

При t_1 = 1 с, $a_{y1} = -\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1{,}74\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ – вектор направлен в сторону отрицательного направления оси *Oy*.Суммарное ускорение точки

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{0^2 + (-1{,}74)^2} =$$
$$1{,}74\text{см/с}^2 \text{ или } \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_{y1}}.$$

Определим касательную и нормальную составляющую вектора $\overrightarrow{a_1}$.

Касательная составляющая определяется по формуле (данные берем из задачи 1.9):

$$a_{\tau 1} = \frac{V_{x1}\cdot a_{x1} + V_{y1}\cdot a_{y1}}{V_1} = \frac{1\cdot 0 + 2{,}83\cdot(-1{,}74)}{3{,}0} =$$
$$-1{,}64\text{см/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что вектор касательного ускорения $\overrightarrow{a_{\tau 1}}$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости V_1. Опустим перпендикуляр из конца вектора $\overrightarrow{a_1}$ на касательную к траектории в точке M_1. Для определения нормального ускорения опустим перпендикуляр из конца вектора $\overrightarrow{a_1}$ на нормаль к вектору $\overrightarrow{a_{\tau 1}}$. Модуль нормального ускорения определим по формуле

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{1{,}74^2 - (-1{,}64)^2} = 0{,}6\text{см/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения $\overrightarrow{a_{n1}}$ направлен по радиусу кривизны траектории, величина которого определяется по формуле

$$\rho_1 = 15\ см. \quad \frac{^2}{;} = 15\text{см}.$$

Покажем векторы на рисунке 5.2.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 5.3 Точка *M* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям движения: $x=4\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot t)$; $y=3\cdot\sin(\frac{\pi}{3}\cdot t)$ (t – в секундах, x, y – в сантиметрах). Построить в масштабе траекторию движения, показать положение точки. Определить проекции вектора ускорения a_x и a_y точки М в заданный момент времени и вектор полного ускорения a. Определить нормальное a_n и касательное a_τ ускорение точки в момент времени t_1 = 2 с. Все вектора ускорений для точки М показать на схеме.

Задача 5.4 Точка движется по дуге окружности радиуса R=20 см. Закон ее движения по траектории: $s=20\cdot\sin(\pi\cdot t)$ (t – в секундах, s – в сантиметрах). Найти величину нормального a_n, касательного a_τ и полного ускорения a точки в момент t=5 с.

Задача 5.5 Точка *M* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям движения: x=x (t), y = y (t) из таблицы (t – в секундах). Построить траекторию движения, показать положение точки. Определить проекции a_x и a_y ускорения точки, нормальное a_n, касательное a_τ и полное ускорение a в момент времени t_1=2 с. Все вектора показать на рисунке.

Вариант	Координаты точки	
	x = x (t), см	y = y (t), см
1	$3\cdot t$	$4\cdot t^2+1$
2	$-2\cdot t^2+3$	$-5\cdot t$
3	$4\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot t)$	$3\cdot\sin(\frac{\pi}{3}\cdot t)$
4	$7\cdot\sin^2(\frac{\pi}{6}\cdot t)-5$	$7\cos^2(\frac{\pi}{6}\cdot t)$
5	$2\cdot t$	$t-3\cdot t^2$

Практическое занятие 6

Тема: «Определение кинематических параметров различных видов движения точки. Равномерное движение. Равнопеременное движение»

Основные положения и расчетные формулы:

Равномерным движением точки называется такое движение, при котором точка за любые равные промежутки времени проходит равные расстояния.

Закон равномерного прямолинейного движения точки описывается уравнением

$S = S_0 + V \cdot t$ (S_0 – путь, пройденный точкой до начала отсчета).

Скорость точки постоянна $V = const$, следовательно, $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$, нормальное ускорение $a_n = \frac{V^2}{r}$ (при прямолинейном движении при r→∞), следовательно, и $a_n = 0$.

Если точка совершает прямолинейное равномерное движение, то она не имеет никакого ускорения.

Если точка совершает криволинейное равномерное движение, то ее ускорение $a = a_n = \frac{V^2}{r}$.

Равнопеременное движение – движение с постоянным касательным ускорением.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = const.$$

Скорость точки определяется по зависимости:

$V = V_0 + a_\tau \cdot t$ (V_0 – начальная скорость движения).

Ускорение a_τ – положительное при ускоренном движении и отрицательное – при замедленном движении.

Закон равнопеременного движения представляет уравнение параболы:

$$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}.$$

Задача 6.1 Поезд движется прямолинейно со скоростью $V_0 = 72\ км/ч$. При торможении он получает замедление a = –0,4 м/с^2. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение?

Решение. Так как все точки поезда при прямолинейном движении движутся с одинаковыми скоростями, примем его за материальную точку и используем формулу для определения скорости при равноускоренном движении: $V = V_0 + a \cdot t$. Конечная скорость поезда при остановке $V = 0$, скорость в начале отсчета времени $V_0 = \frac{72км}{ч} = 72 \cdot \frac{1000м}{3600с} = 20\ м/с$.

Тогда $t = -\frac{V_0}{a} = -\frac{20}{-0.4} = 50\ с$ – необходимо начать торможение за 50 с до прибытия на станцию.

Расстояние определим по зависимости $S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}$, где $S_0 = 0$, $a_\tau = a = -0{,}4 м/с^2$, тогда $S = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 20 \cdot 50 - \frac{0{,}4 \cdot 50^2}{2} = 500$ м – необходимо начать торможение за 500 м до прибытия на станцию.

Задача 6.2 Поезд движется равно замедленно по дуге окружности радиуса R = 800 *м* и проходит путь S = 800 *м*, имея начальную скорость V_0 = 54 *км/ч* и конечную V = 18 *км/ч*. Определить полное ускорение поезда в начале и в конце дуги, а также время движения по этой дуге.

Решение. Выразим скорости в м/с.

$V_0 = 54\frac{км}{ч} = 54 \cdot \frac{1000м}{3600с} = 15$ м/с и $V = 18\frac{км}{ч} = 18 \cdot \frac{1000м}{3600с} = 5$ м/с.

Из выражения $V = V_0 + a_\tau \cdot t$ следует $t = \frac{V-V_0}{a_\tau}$. Подставим в выражение пути: $S = V_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2} = \frac{V_0(V-V_0)}{a_\tau} + \frac{a_\tau \cdot (V-V_0)^2}{2a_\tau{}^2} = \frac{2V_0(V-V_0)+(V-V_0)^2}{2a_\tau}$ или

$a_\tau = \frac{2V_0(V-V_0)+(V-V_0)^2}{2 \cdot S} = \frac{2 \cdot 15(5-15)+(5-15)^2}{2 \cdot 800} = -0{,}125$ *см/с*^{2} – ускорение постоянно на протяжении всей дуги.

Определим нормальные ускорения поезда:

– в начале дуги $a_{n0} = \frac{{V_0}^2}{R} = \frac{15^2}{800} =$ 0,281 *см/с*^{2};

– в конце дуги $a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{5^2}{800} =$ 0,031 *см/с*^{2}.

Полные ускорения поезда:

– в начале дуги $a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n0}^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}281^2} =$ 0,308 *см/с*^{2};

– в конце дуги $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}031^2} =$ 0,128 *см/с*^{2}.

Время движения по дуге $t = \frac{V-V_0}{a_\tau} = \frac{5-15}{-0{,}125} = 80$ с.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 6.3 Скорость автомобиля 90 км/ч. Определить длину пути торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля равно 3 м/с^2.

*Задача 6.*4 Точка движется по окружности радиуса r = 200 м из состояния покоя с постоянным касательным ускорением 1 м/с^2 . Определить полное ускорение точки в момент времени t = 20 с.

Задача 6.5 Точка, двигаясь равнозамедленно по окружности, в течение 0,5 с прошла путь 2 м, равный половине длины окружности. Определить скорость, полное, касательное и нормальное ускорения в конце пути, если начальная скорость точки 5 м/с.

Задача 6.6 При прямолинейном движении судна его скорость в пункте А была 5 м/с, а в пункте В стала 15 м/с. Расстояние между пунктами А и В равно 3,2 км. Считая движение судна равноускоренным, определить время движения судна на данном расстоянии, а также модуль его ускорения.

Задача 6.7 Точка движется по прямой из состояния покоя с постоянным ускорением 0,2 м/с^2. Определить путь, который точка пройдет за промежуток времени от 4 до 10 секунд.

Задача 6.8 Точка, двигаясь равно замедленно по окружности, в течение 0,5 с прошла путь 2 м, равный половине длины окружности. Определить скорость, полное, касательное и нормальное ускорения в конце пути, если начальная скорость точки 5 м/с.

Задача 6.9 Два автомобиля, расстояние между которыми в начальный момент времени 1200 м, движутся прямолинейно по шоссе навстречу друг другу: первый – с ускорением 0,2 м/с^2 , а второй – с замедлением 0,3 м/с^2 . Какова должна быть начальная скорость второго автомобиля, чтобы в момент встречи он остановился, если первый автомобиль имел начальную скорость 80 км/ч?

Практическое занятие 7

Тема: «Простейшие движения твердого тела. Поступательное и вращательное движение»

Основные положения и расчетные формулы:

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая линия на теле при движении остается параллельной своему начальному положению.

Скорость и ускорение, общие для всех точек поступательно движущегося тела, называются скоростью и ускорением этого тела.

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными.

Угол φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения тела, неподвижную и неизменно связанную с вращающимся телом, называется углом поворота тела.

Угол поворота при вращении тела изменяется во времени и является некоторой функцией времени:

$$\varphi = f(t).$$

Уравнение, устанавливающее зависимость между углом поворота тела и временем его движения, называется уравнением вращательного движения тела.

Угол поворота в механике определяют в безразмерных единицах – радианах.

$$1 \text{ рад} = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} = 57^0 17' 45''.$$

Изменение угла поворота в единицу времени (рад/с) называется средней угловой скоростью

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловой скоростью тела в данный момент времени называется предел, к которому стремится средняя угловая скорость тела при $\Delta t \to 0$.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость тела в данный момент равна производной от угла поворота тела по времени.

В технике для оценки быстроты вращения используют частоту вращения (обороты в минуту) n, тогда угловая скорость в рад/с определяется по зависимости

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

угловая скорость ω изменяется с течением времени, т.е.

$\omega = f_1(t)$.

Изменение угловой скорости во времени определяется средним угловым ускорением $\varepsilon_{ср}$ (рад/с^2):

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Предел, к которому стремится среднее угловое ускорение тела при $\Delta t \to 0$, называется угловым ускорением тела в данный момент.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла поворота тела по времени.

Если знак углового ускорения тела совпадает со знаком его угловой скорости, то тело вращается ускоренно, если же знаки различны, то тело вращается замедленно.

Уравнение равномерно переменного вращения тела в общем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Задача 7.1 Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускорено. Через 10 минут после начала движения оно имеет угловую скорость $\omega = 4\pi$рад/с. Сколько оборотов N сделало колесо за эти 10 минут?

Решение. Т.к. в начале отсчета времени колесо находилось в покое, то $\varphi_0 = 0$ и $\omega_0 = 0$. Формула угловой скорости колеса примет вид:

$$\omega = \varepsilon \cdot t \text{ или } \varepsilon = \frac{\omega}{t}.$$

Поставив все значения в уравнение равномерно переменного вращения тела, получим $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega t^2}{2t} = \frac{\omega t}{2}$ рад.

Один полный оборот составляет 2π радиан, тогда, приняв t = 10 мин = = 600 с, получим

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{4\pi} = \frac{4\pi \cdot 600}{4\pi} = 600 \text{ оборотов}.$$

Задача 7.2 Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную угловую скорость $\omega_0 = 2\pi$ рад/с. Сделав N = 10 оборотов, оно, вследствие трения в подшипниках, остановилось. Определить угловое ускорение ε колеса, считая его постоянным.

Решение. Полный угол поворота колеса за указанное время составит:

$\varphi = 2\pi N = 20\pi$ рад. Запишем уравнения угловой скорости и вращения колеса.

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t & (1) \\ \varphi = \omega_0 \cdot t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Из (1) при конечной скорости $\omega = 0$ следует $0 = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$ или $\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}$. Подставим найденные значения в (2):

$$20\pi = \omega_0 \cdot t - \frac{\omega_0 t^2}{2t} = \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{2\pi t}{2} = \pi t \;\Rightarrow\; t = 20\ c.$$

Тогда угловое ускорение: $\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{2\pi}{20} = -0{,}1\ \text{рад/с}^2$.

Задача 7.3 Вращение диска вокруг неподвижной оси определяется уравнением $\varphi = 180t - 15t^2$. Найти угловые скорости ω и угловое ускорение ε диска в моменты времени $t_1 = 0$ с, $t_2 = 6$ с и $t_3 = 7$ с.

Решение. Определим уравнение угловой скорости:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (180t - 15t^2)' = 180 - 30t\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

При $t_1 = 0$ с, $\omega_1 = 180 - 30 \cdot 0 = 180\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

При $t_2 = 6$ с, $\omega_2 = 180 - 30 \cdot 6 = 0\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

При $t_3 = 7$ с, $\omega_1 = 180 - 30 \cdot 7 = -30\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Определим угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (180 - 30t)' = -30\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = const.$$

В начальный момент времени при $t = 0$ угловая скорость и угловое ускорение диска имеют разные знаки, следовательно, диск вращается замедленно. При $t_2 = 6$ с угловая скорость диска обращается в нуль, после чего он начинает вращаться ускоренно (угловая скорость и угловое ускорение имеют одинаковые знаки).

Задача 7.4 Тело вращается вокруг неподвижного шарнира *O* (рису-нок 7.1). Положительное направление вращения указано стрелкой. Изменение угла поворота задано функцией: $\varphi = \frac{\pi}{6}(3 + 4t^2)$. Для точки *C* (начальное положение ее обозначено C_0, $|OC| = R = 35\ см$) определить в момент времени $t_1 = 1\ c$:

1. Положение точки (угол поворота φ_1) и показать ее на рисунке.
2. Угловую скорость ω_1 и показать ее направление.
3. Угловое ускорение ε_1 и показать его направление.
4. Окружную скорость V_{c1} и построить вектор скорости.
5. Тангенциальное $a_{\tau 1}$, нормальное a_{n1} и полное ускорение a_{c1} и построить векторы ускорений.

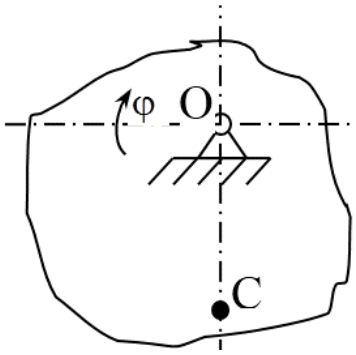


Рисунок 7.1

Решение. Определим положение точки в момент времени t_1 = 1 с и покажем ее на рисунке 7.2.

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}(3 + 4{t_1}^2) = \frac{\pi}{6}(3 + 4 \cdot 1^2) = \frac{7\pi}{6}.$$

Угол получился положительным, поэтому из положения C в направлении φ откладываем угол $\varphi_1 = \frac{7\pi}{6}$ и получаем точку C_1.

Определим угловую скорость точки C_1 и покажем ее направление.

$$\omega = \varphi' = \left(\frac{\pi}{6}(3 + 4t^2)\right)' = \frac{8\pi t}{6} = \frac{4\pi t}{3} \quad .$$

$$\omega_1 = \frac{4\pi \cdot 1}{3} = 4{,}2\ c^{-1}.$$

Угловая скорость положительна, значит тело вращается в положительном направлении φ.

Определим угловое ускорение ε_1 и покажем его направление.

$$\varepsilon = \omega' = \left(\frac{4\pi t}{3}\right)' = \frac{4\pi}{3} = 4{,}2\ c^{-2}.$$

Угловое ускорение положительно и не зависит от времени, следовательно, тело вращается равноускорено в сторону положительного направления вращения.

Определим окружную скорость V_{c1} и построим вектор скорости.

$$V_{c1} = \omega_1 \cdot |\mathrm{OC}| = 4{,}2 \cdot 35 = 147\ {}^{\text{см}}/_{\text{с}}.$$

Вектор скорости точки C_1 проводим перпендикулярно радиусу вращения OC в сторону положительного вращения тела.

Определим тангенциальное $a_{\tau 1}$, нормальное a_{n1}, полное ускорение a_{c1} и построим векторы ускорений.

$$a_{\tau 1} = \varepsilon_1 \cdot R = 4{,}2 \cdot 35 = 147\ {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

Вектор тангенциального ускорения направлен перпендикулярно радиусу вращения OC в сторону вектора скорости.

$$a_{n1} = \frac{V_{c1}^2}{R} = \frac{147^2}{35} = 617\ {}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}.$$

.

Вектор нормального ускорения направлен к центру вращения (по отрезку *OC*).

$$a_{c1} = \sqrt{a_{\tau 1}^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{147^2 + 617^2} = 634\,{}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}$$

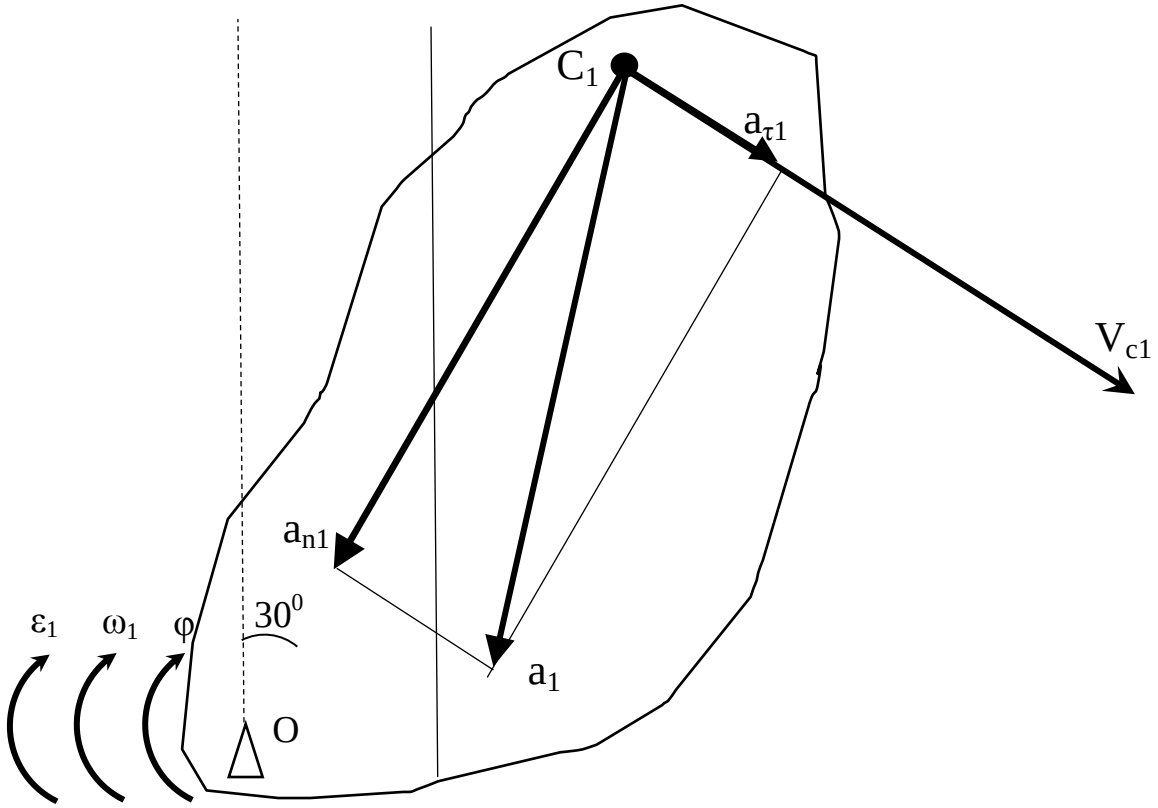


Рисунок 7.2 – Скорости и ускорения точки C_1

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

<u>Задача 7.5</u> Вал начинает вращаться равно ускоренно из состояния покоя; в первые 5 с он совершает 12,5 оборотов. Какова будет его угловая скорость по истечении этих 5 с?

<u>Задача 7.6</u> Маятник центробежного регулятора, вращающийся вокруг вертикальной оси АВ, делает 120 об/мин. В начальный момент угол поворота был равен π/6 рад. Найти угол поворота и угловое перемещение маятника за время t=1/2 с.

<u>Задача 7.7</u> Касательное ускорение точки обода махового колеса в данный момент a_τ=10,3 м/с^2 . Угол наклона полного ускорения этой точки к радиусу равен 60^0 . Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии r =0, 5 м. Радиус махового колеса R=1 м.

<u>Задача 7.8</u> Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10 + 5t - t^3$ рад. Определить ускорение точки А тела, находящейся на расстоянии r = 0,1м

от оси вращения в момент времени, при котором скорость этой точки равна 0,2 м/с.

Практическое занятие 8

Тема: «Сложное движение точки и твердого тела. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Метод определения мгновенного центра скоростей»

Основные положения и расчетные формулы:

При сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной (V_e) и относительной (V_r) скоростей.

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cdot \cos\alpha}\,,$$

где α – угол между векторами $\overrightarrow{V_e}$ и $\overrightarrow{V_r}$..

Плоскопараллельным или плоским называют такое движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной системы отсчета плоскости (например, колесо, катящееся прямолинейно в вертикальной плоскости).

Метод разложения сложного движения:

Плоскопараллельное движение раскладывают на два движения: поступательное вместе с некоторым полюсом (переносную) и вращательное относительно этого полюса (относительную).

Метод определения мгновенного центра скоростей:

Мгновенным центром скоростей называется неизменно связанная с плоской фигурой точка, абсолютная скорость которой в данный момент равна нулю.

Задача 8.1 В кулисном механизме при качании кривошипа *OC* вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун *A*, перемещаясь вдоль кривошипа *OC*, приводит в движение стержень *AB*, движущийся в вертикальных направляющих *K* (рисунок 8.1). Расстояние |*OK*| = *l*. Определить скорость движения ползуна относительно кривошипа *OC* в функции от угловой скорости *ω* и угла поворота кривошипа *φ*.

Решение. Рассмотрим движение ползуна *A*. С одной стороны он движется вместе с кривошипом (переносится им) с переносной скоростью $\overrightarrow{V_e}$. Если рассматривать качательные движения кривошипа как часть вращательного движения, то вектор скорости $\overrightarrow{V_e}$ направлен перпендикулярно кривошипу *OC* в сторону его движения и определится по формуле

$$V_e = \omega \cdot R = \omega \cdot |OA| = \omega \cdot \frac{l}{cos\varphi}.$$

Покажем его на рисунке 8.1.

Одновременно с этим ползун *A* перемещается относительно кривошипа *OC*. Если принять кривошип за подвижную систему координат, то скорость $\overrightarrow{V_r}$ является относительной.

Сумма этих двух векторов составляет абсолютную скорость ползуна *A*, вектор которой направлен вдоль отрезка *AK*. Для определения его величины, из конца вектора $\overrightarrow{V_e}$ проведем линию, параллельную *AC* до пересечения с отрезком *AK*. Точка пересечения и есть конец вектора абсолютной скорости $\vec{V}$ ползуна *A*.

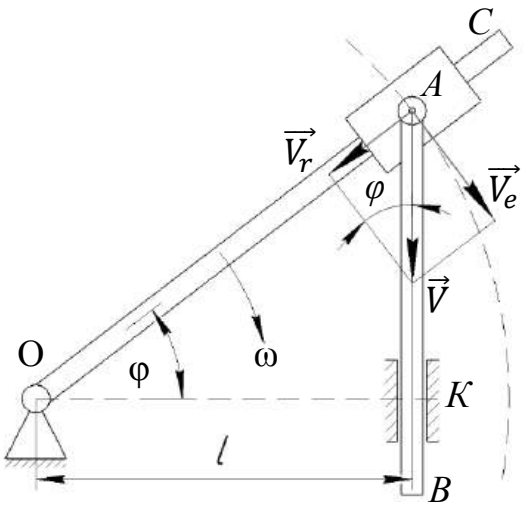


Рисунок 8.1

Для определения направления вектора $\overrightarrow{V_r}$ опустим перпендикуляр из конца вектора $\vec{V}$ на кривошип *OC*, полученная точка соответствует концу вектора относительной скорости. Из геометрического положения векторов следует (рисунок 8.1):

$$V_r = V_e \cdot \tan\varphi = \frac{\omega \cdot l \cdot \tan\varphi}{cos\varphi}.$$

Задача 8.2 Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 (рисунок 8.2) соединены нерастяжимой нитью. Груз *K*, прикрепленный к концу этой нити, опускается по вертикали вниз по закону $x = 2t^2$ *м*. Определить скорости точек *C, B, Д* и *E*, лежащих на ободе подвижного блока в момент *t* = 1 с в положении, показанном на рисунке, а также скорость точки *O*, если радиус подвижного блока R_1 = 0,2 *м*.

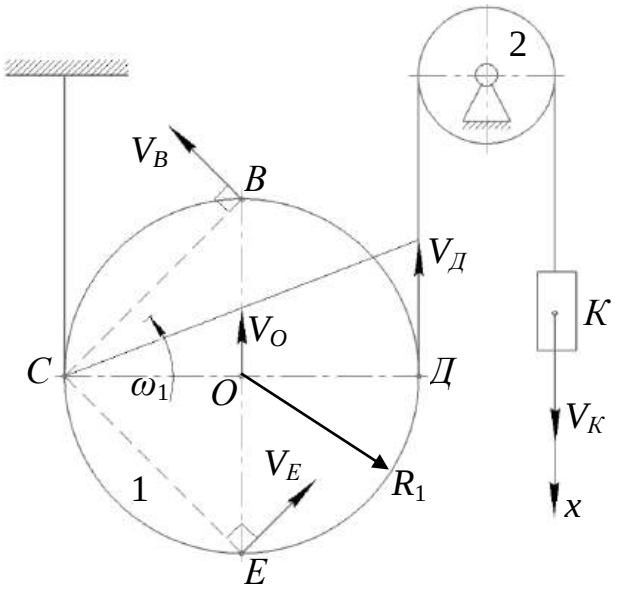


Рисунок 8.2

Решение. Определим скорость точки К.

$$V_К = \frac{dx}{dt} = (2t^2)' = 4t.$$

В указанный момент времени при *t* = 1 с скорость точки *K*

$$V_К = 4t = 4 \cdot 1 = 4 м/с.$$

Точка *Д* связана с точкой *K* нерастяжимой нитью, следовательно,

$$V_К = V_Д = 4\ см/с.$$

Векторы скоростей направлены вдоль нити: $V_К$ – вниз (в сторону положительного направления оси *x*), а вектор $V_Д$ – вверх (при вращении блока 2 по часовой стрелке).

В указанном положении точка *C* неподвижна, т.е. является мгновенным центром скоростей, а подвижный блок 1 как бы вращается вокруг него с угловой скоростью ω_1, определим ее:

$$\omega_1 = \frac{V_Д}{2R_1} = \frac{4}{2 \cdot 0{,}2} = 10\ рад/с.$$

Направление ω_1 совпадает с направлением вектора $V_Д$.

Скорости точек *B* и *E*:

$$V_B = \omega_1 \cdot |CB| = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{\cos 45^0} = 10 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}707} = 2{,}83\ м/с,$$

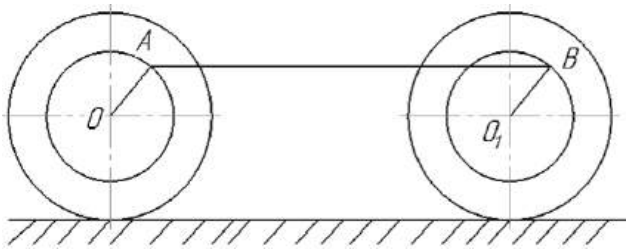
$$V_E = \omega_1 \cdot |CE| = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{\cos 45^0} = 10 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}707} = 2{,}83\ м/с,$$

векторы скоростей направлены перпендикулярно отрезкам $|CB|$ и $|CE|$ в сторону ω_1.

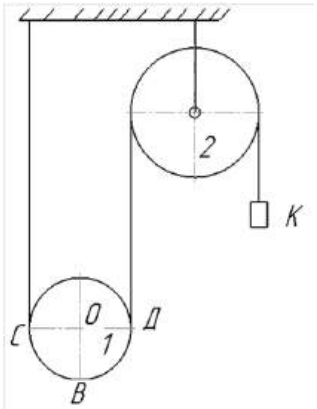
Скорость точки *O*: $V_0 = \omega_1 \cdot R_1 = 0{,}5 \cdot V_Д = 2 м/с$, направление вектора совпадает с направлением $V_Д$.

Задачи для самостоятельного решения:

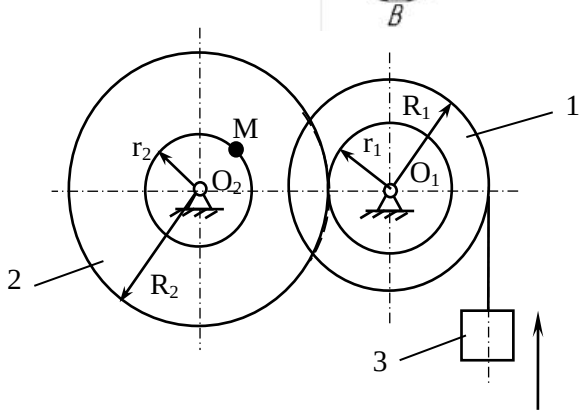
Задача 8.3 Найти абсолютную скорость какой-либо точки М спарника АВ, соединяющего кривошипы ОА и O_1В осей О и O_1, если радиусы колес одинаковы: R=1 м; радиусы кривошипов: ОА=O_1В=0,5 м. Скорость экипажа v_0=20 м/с. Скорость точки М определить для четырех моментов, когда кривошипы ОА и O_1В либо вертикальны, либо горизонтальны. Колеса катятся по рельсам без скольжения.



Задача 8.4 Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз К, прикрепленный к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону $x=5t^2+2t$ м. Определить ускорение точек С, В и D, лежащих на ободе подвижного блока 1, в момент t=1,5 с в положении, указанном на рисунке, если OB⊥CD, а радиус подвижного блока 1 равен 0,4 м.



Задача 8.5 Дано уравнение движения груза 3 $S_3=3t^3-2t^2$, радиусы шкивов 1 и 2 r_1=0,05м; r_2=0,025м; R_1=0,8; R_2=0,9м. Определить скорость и ускорение точки М при t=1с.



1.3 Динамика

Практическое занятие 9

Тема: «Силы трения. Применение законов динамики. Движение материальной точки. Сила инерции. Метод кинетостатики»

Основные положения и расчетные формулы:

Первая аксиома (принцип инерции)

Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Вторая аксиома (второй закон Ньютона – основной закон динамики)

Ускорение, сообщенное материальной точке силой, пропорционально величине силы и совпадает с направлением силы.

$$F = m \cdot a \ (Н = кг{\cdot}м/с^2),$$

где m – масса материальной точки, кг;

a – ускорение материальной точки, м/с^2.

На все тела на Земле действует сила тяжести, направленная к центру Земли.

$$G = m \cdot g,$$

где $g = 9{,}81 \text{м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Третья аксиома (третий закон Ньютона)

Силы взаимодействия двух тел (материальных точек) равны по величине и направлены по одной прямой (соединяющей данные точки) в противоположные стороны. Модули ускорений, сообщаемых друг другу двумя материальными точками, обратно пропорциональны массам этих точек.

Четвертая аксиома (закон независимости действия сил)

Ускорение, получаемое материальной точкой при одновременном действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы эта точка под действием каждой из данных сил в отдельности.

Другими словами, каждая сила системы сил действует на материальную точку так, как она действовала бы одна.

$$ma = \sum_1^n \vec{F_i}.$$

Трение – сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого.

Максимальное значение силы трения прямо пропорционально силе нормального давления одного тела на другое

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N,$$

N – сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;

f – коэффициент трения скольжения.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную движению.

Сила инерции – сила, возникающая при разгоне или торможении тела (материальной точки) и направленная в сторону, противоположную ускорению.

$$F_{\text{ин}} = |m \cdot a|.$$

При криволинейном движении могут возникнуть две составляющие силы инерции: нормальная и касательная.

Принцип кинетостатики: Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:

$$\sum_0^n F + \sum_0^n R + F_{\text{ин}} = 0$$

Задача 9.1 На деревянном настиле (рисунок 9.1), образующим с горизонтальной опорной поверхностью угол $\propto = 50^0$, находится деревянный ящик с грузом, общим весом $G = 2{,}0$ кН. Ящик удерживается тросом, перекинутым через блок, как показано на рисунке. Определить усилие в тросе F, если коэффициент трения дерева по дереву $f = 0{,}4$. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы усилие в тросе равнялось нулю, т.е. ящик удерживался на настиле с помощью силы трения?

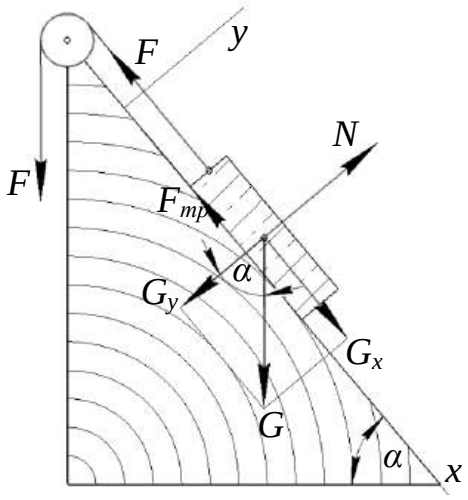


Рисунок 9.1

Решение. На ящик действуют силы: сила веса G (направлена вертикально вниз), реакция опоры N (направлена перпендикулярно опорной поверхности), сила трения $F_{\text{тр}} = f \cdot N$ (направлена вдоль опорной поверхности в противоположную сторону возможного перемещения ящика) и усилие со стороны троса F. Проведем координатные оси XY. Проекции силы G на эти оси: $G_y = G \cdot \cos\alpha$, $G_x = G \cdot \sin\alpha$. Ящик находится в покое, поэтому справедливы выражения:

$$\Sigma X = G_x - F - F_{\text{тр}} = G \cdot sin\,\alpha - F - f \cdot N = 0\,; \quad (1)$$

$$\Sigma Y = N - G_y = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует $N = G_y = G \cdot \cos\alpha$, $\text{N} = \text{G}_\text{y} = \text{G} \cdot \cos\alpha$ подставим в (1), тогда

$G \cdot \sin\alpha - F - f \cdot G \cdot \cos\alpha = 0$, следовательно,

$F = G \cdot \sin\alpha - f \cdot G \cdot \cos\alpha$ (3), подставив значения, получаем усилие в тросе $F = 2 \cdot sin\,50^0 - 0{,}4 \cdot 2 \cdot cos\,50^0 = 1{,}02$ *кН*.

Коэффициент трения, при котором усилие в тросе $F = 0$, определим из (3):

$0 = G \cdot \sin\alpha - f \cdot G\cdot\cos\alpha 0 = \mathrm{G}\cdot\sin\alpha - \mathrm{f}\cdot\mathrm{G}\cdot\cos\alpha \Rightarrow f \geq \frac{G\cdot\sin\alpha}{G\cdot\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 50^0 = 1{,}2,$ следовател $\alpha_{\max}$ выражение $f = \tan\alpha_{max}$ – справедливо.

Задача 9.2 Автомобиль массы m движется прямолинейно с ускорением a'(рисунок 9.2). Определить вертикальное давление передних и задних колес автомобиля, если его центр масс C находится на высоте h от поверхности грунта. Расстояния от передней и задней осей колес автомобиля от вертикали, проходящей через центр масс, соответственно равны a и b. Как должен двигаться автомобиль, чтобы давление передних и задних колес оказались равными?

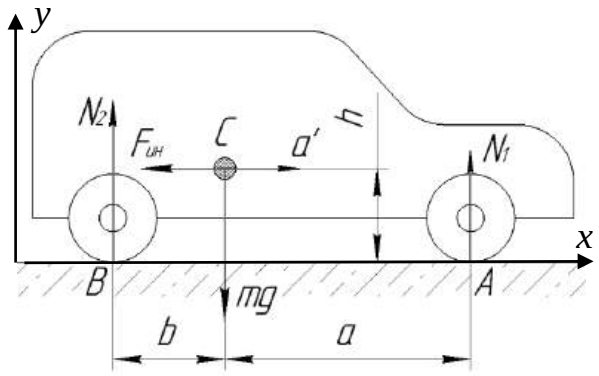


Рисунок 9.2

Решение. Покажем реакции дороги на колеса N_1 и N_2, силу тяжести автомобиля mg и условно приложим силу инерции $F_{\text{ин}}$, направленную в сторону, противоположную ускорению автомобиля a'.

Сила инерции $F_{\text{ин}} = ma'$.

Выбираем систему координат, и, применяя метод кинетостатики, рассматриваем автомобиль в равновесии. Запишем условия равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma y = N_1 + N_2 - mg = 0 & (1) \\ \Sigma M_A = F_{\text{ин}}\cdot h + mg\cdot a - N_2\cdot(a+b) = 0 & (2) \\ \Sigma M_B = N_1\cdot(a+b) - mg\cdot b + F_{\text{ин}}\cdot h = 0 & (3) \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow N_2 = \frac{F_{\text{ин}}\cdot h + mg\cdot a}{(a+b)} = \frac{ma'\cdot h + mg\cdot a}{(a+b)} = \frac{m(a'\cdot h + g\cdot a)}{(a+b)}$.

Из (3) $\Rightarrow N_1 = \frac{mg\cdot b - F_{\text{ин}}\cdot h}{(a+b)} = \frac{mg\cdot b - ma'\cdot h}{(a+b)} = \frac{m(g\cdot b - a'\cdot h)}{(a+b)}$.

Проверка: подставим найденные реакции в (1):

$\Sigma y = \frac{mg\cdot b - ma'\cdot h + ma'\cdot h + mg\cdot a}{(a+b)} - mg = 0$ – реакции найдены верно.

Из условия задачи требуется, чтобы $N_1 = N_2$ или

$$\frac{m(g\cdot b - a'\cdot h)}{(a+b)} = \frac{m(a'\cdot h + g\cdot a)}{(a+b)} \Big| : \frac{m}{(a+b)},$$

$$g\cdot b - a'\cdot h = a'\cdot h + g\cdot a,$$

$$2a'\cdot h = g\cdot b - g\cdot a,$$

$a' = \frac{g(b-a)}{2h}$ – для силы инерции.

Так как сила инерции направлена противоположно ускорению, то для автомобиля $a' = \frac{g(a-b)}{2h}$ – при таком ускорении давление на дорогу передних и задних колес будет одинаково.

Задача 9.3 Груз *A* массой m_1, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок *C*, груз *B* массы m_2. Определить силу давления стола *Д* на пол, если масса стола равна m_3. Массой нити и силами трения пренебречь (рисунок 9.3).

Решение. Покажем силы тяжести, направление ускорения $\vec{a}$. Силы инерции, действующие на тела *A* и *B*, направим в сторону, противоположную ускорению, при этом

$$F_{ин1} = m_1 a, \quad F_{ин2} = m_2 a.$$

Рассмотрим силы, действующие на тела *A* и *B*, и запишем для них условия равновесия.

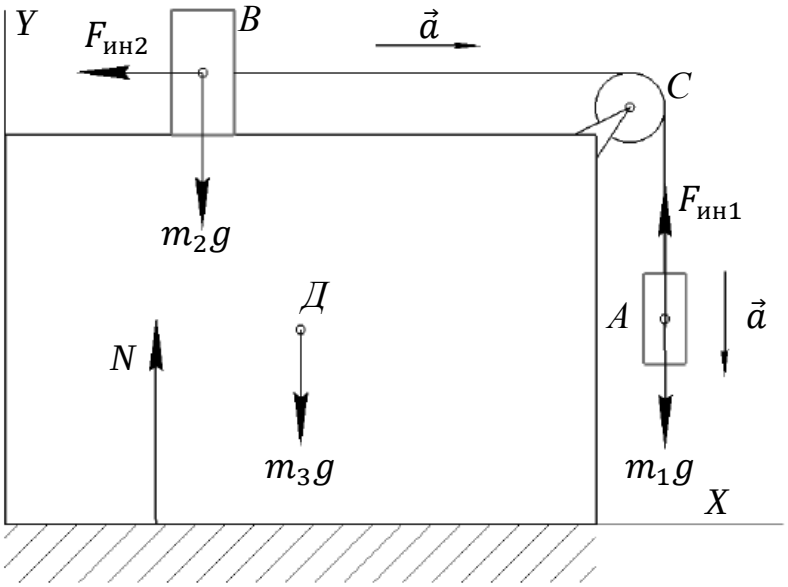


Рисунок 9.3

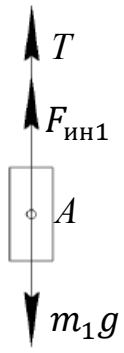


Рисунок 9.4

1) тело *A*: на него, кроме силы тяжести и силы инерции, действует сила натяжения нити *T* (рисунок 9.4)

$$\Sigma Y = F_{ин1} + T - m_1 g = 0, \text{ следовательно,}$$

$$T = m_1 g - F_{ин1} = m_1 (g - a) \qquad (1)$$

2) тело *B*: на него действуют сила тяжести, сила инерции, сила реакции нормальной стола N_B и сила натяжения нити *T* (рисунок 9.5)

$$\Sigma X = T - F_{ин2} = T - m_2 a \Rightarrow T = m_2 a. \qquad (2)$$

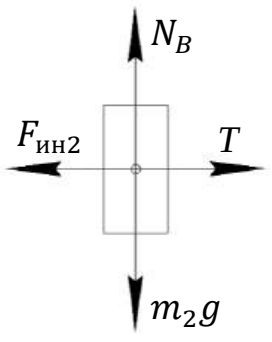


Рисунок 9.5

Приравняем (1) и (2):

$$m_1 (g - a) = m_2 a$$

$$m_1 g - m_1 a = m_2 a$$

$$m_1 g = m_1 a + m_2 a$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad F_{ин1} = m_1 a = \frac{{m_1}^2 g}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

По принципу Даламбера для всей рассматриваемой системы (рисунок 9.3).

$\Sigma Y = N - m_1 g - m_2 g - m_3 g + F_{ин1} = 0$, подставив (3), получим $N = g(m_1 + m_2 + m_3 - \frac{{m_1}^2}{m_1 + m_2})$.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 9.4 Лифт массой m=420 кг опускается равно ускоренно . В первые 10 с он опустился на 40 м. Определить силу натяжения каната, который удерживает лифт.

Задача 9.5 На столе лежит груз массой 2,5 кг. К нему привязали нить и стали поднимать вверх. Нить выдерживает силу натяжения до 42 Н. Какое ускорение необходимо придать грузу, чтобы нить оборвалась?

Задача 9.6 Гиря массы 0,3 кг висит на нити длиной 1 м. После толчка в горизонтальной плоскости гиря получила скорость 6 м/с. Найти натяжение нити в этот момент времени.

Задача 9.7 Движение материальной точки массой m = 8 кг происходит согласно уравнениям x = 0,05 t3, y = 0,3 t2 (в метрах) в плоскости Oxy.
Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени t = 4 с.

Задача 9.8 Шарик, масса которого равна 200г падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением $x = 4{,}9t - 2{,}45 \cdot (1 - e^{-2t})$. Ось OX направлена вертикально вниз. Определить силу сопротивления воздуха R=f(t).

Практическое занятие 10

Тема: «Работа и мощность. Работа силы при прямолинейном движении. Работа силы тяжести. Работа и мощность при вращении. Коэффициент полезного действия»

Основные положения и расчетные формулы:

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна произведению модуля силы на длину пути, пройденного ее точкой приложения, и на косинус угла между направлением силы и направлением движения ее точки приложения.

$$A = FS\cos\alpha.$$

Единицы измерения работы: 1Дж (Джоуль) =1 Н·м.

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты и равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки:

$$A(G) = G(h_1 - h_2) = G\Delta h = mgh.$$

При опускании тела – работа положительна, при подъеме – отрицательна.

Работа силы при вращении тела определяется как произведение момента этой силы на угол поворота тела

$$A(F_\tau) = F_\tau \cdot r \cdot \varphi = M_{\text{вр}} \cdot \varphi,$$

где $M_{\text{вр}}$ – вращающий момент силы F_τ;

φ - центральный угол, измеряется в радианах.

Средняя мощность силы за некоторый промежуток времени t равна отношению совершенной ею за это время работы А к данному промежутку времени:

$$P(N) = \frac{A}{t}.$$

Единица измерения мощности в системе СИ: 1 Вт (Ватт) =1 Дж/с = 1 Нм/с.

Средняя мощность при поступательном движении равна произведению модуля силы на среднюю скорость перемещения и на косинус угла между направлениями силы и скорости.

$$P = FV_{\text{ср}} \cos\alpha .$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на среднюю угловую скорость тела

$$P = \text{M}_{\text{вр}} \cdot \omega_{\text{ср}} .$$

Отношение полезной работы к полной работе или полезной мощности к затраченной мощности называется коэффициентом полезного действия (КПД).

$$\eta = \frac{\text{P}_{\text{пол}}}{\text{P}_{\text{затр}}}.$$

КПД выражается в частях единицы или в процентах $\eta = \frac{\text{P}_{\text{пол}}}{\text{P}_{\text{затр}}} \cdot 100\%$ и всегда меньше единицы или меньше 100%.

Задача 10.1 Тело *M* весом *G* = 50 кН равномерно перемещается вверх по наклонной плоскости, длина которой l = 4 м и угол подъема $\alpha = 20^0$. Определить работу, производимую силой, направленной параллельно наклонной плоскости. Коэффициент трения $f = 0{,}2$.

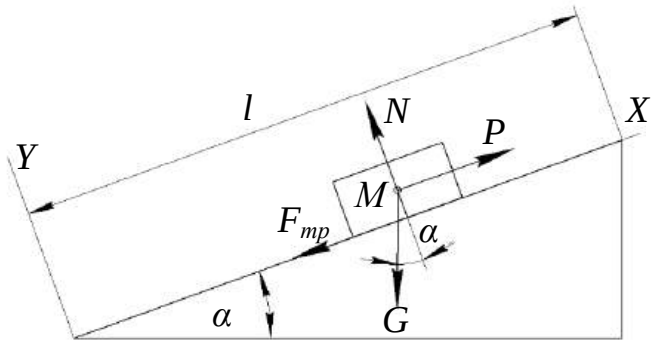


Рисунок 1.20

Решение. Покажем силы, действующие на тело *M* (рисунок 1.20). Это сила тяжести *G*, реакция опорной поверхности *N*, сила трения $F_{mp} = f \cdot N$ и движущая сила *P*. Тело движется равномерно, значит все силы уравновешены. Проведем оси *X* и *Y*. Запишем условия равновесия тела *M* и определим движущую силу.

$$\Sigma X = P - F_{\text{тр}} - G \cdot \sin\alpha = 0. \quad (1)$$

$$\Sigma Y = N - G \cdot \cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Из (2) $\Rightarrow N = G \cdot \cos\alpha$.

Из (1) $\Rightarrow$

$P = G \cdot \sin\alpha + F_{\text{тр}} = G \cdot \sin\alpha + f \cdot G \cdot \cos\alpha = G \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha)$.

Работа движущей силы, со направленной с направлением движения $A(P) = P \cdot l = G \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) \cdot l = 50 \cdot (0{,}342 + 0{,}2 \cdot 0{,}94) =$ 1,04 кДж.

Задача 10.2 Какой мощности электродвигатель необходимо поставить на лебедку, чтобы она смогла поднять клеть со строительными материалами общей массой m = 1200 кг на высоту 20 м за 30 с? Коэффициент полезного действия лебедки $\eta = 0{,}72$.

Решение. Определяем полезную мощность лебедки:

$$N_{\text{пол}} = \frac{A_{\text{пол}}}{t} = \frac{mgh}{t}.$$

Требуемая мощность двигателя с учетом потерь

$$N_{\text{дв}} = \frac{N_{\text{пол}}}{\eta} = \frac{mgh}{t \cdot \eta} = \frac{1200 \cdot 9.81 \cdot 20}{30 \cdot 0.72} = 10{,}9 \cdot 10^3\ Вт.$$

Двигатель должен быть мощностью $N_{\text{дв}} \geq 10{,}9$ кВт.

Задача 10.3 Когда теплоход идет по озеру со скоростью 15 узлов (1 узел = 0,5144 м/с), двигатель его развивает мощность $N_{\text{дв}} = 3.8 \cdot 10^3$кВт. Определить силу сопротивления воды R движению теплохода, зная, что коэффициент полезного действия двигателя и винта катера $\eta = 0{,}41$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Так как теплоход движется в неподвижной воде с постоянной скоростью, то можно считать, что он находится в состоянии равновесия и работа двигателя направлена на преодоление только силы сопротивления воды. Определим скорость передвижения теплохода в м/с.

$$V = 15 \cdot 0.5144 = 7.72\ \text{м/с}.$$

Полезная мощность по преодолению силы R при поступательном движении

$$N_{\text{пол}} = \frac{A}{t} = \frac{R \cdot S}{t} = R \cdot V.$$

Полезная мощность двигателя и винта

$$N_{\text{пол}} = N_{\text{дв}} \cdot \eta.$$

Тогда $R \cdot V = N_{\text{дв}} \cdot \eta$, следовательно, $R = \frac{N_{\text{дв}} \cdot \eta}{V} = \frac{3.8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}41}{7{,}72} = 202\ кН$.

Задача 10.4 Ведущий шкив диаметром 0,5 *м* вращается с угловой скоростью ω = 16 *рад/с* и передает мощность P = 11 *кВт*.

Определить вращающий момент $M_{вр}$ на шкиве и окружное усилие F_t.

Решение. Мощность при вращательном движении: $P = \text{М}_{\text{вр}} \cdot \omega_{\text{ср}}$, следовательно, вращающий момент на шкиве

$$\text{М}_{\text{вр}} = \frac{P}{\omega} = \frac{11 \cdot 10^3}{16} = 687\ Нм.$$

Вращающий момент $M_{вр} = F_t \cdot r = F_t \cdot \frac{d}{2}$, следовательно, окружное усилие $F_t = \frac{2M_{вр}}{d} = \frac{2 \cdot 687}{0.5} =$ 2,75 *кН.*

Задача 10.5 Шлифовальный круг (рисунок 10.1) диаметра d = 0,6 *м* делает n = 120 *об/мин*. Потребляемая при этом мощность N = 1,2 *кВт*. Коэффициент трения шлифовального круга о деталь $f = 0{,}2$. С какой силой круг прижимает шлифуемую деталь?

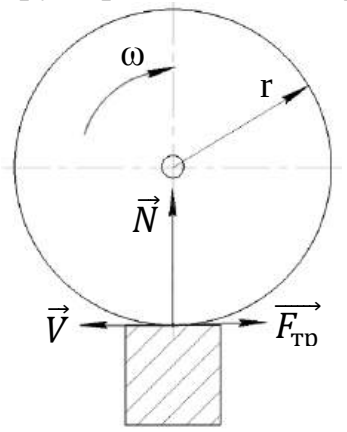


Рисунок 10.1

Решение. Мощность тратится на преодоление силы трения $F_{тр} = N \cdot f$, следовательно, потребляемая мощность $P_{потр} = F_{тр} \cdot V$, где $V = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2}$. Угловая скорость $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, тогда

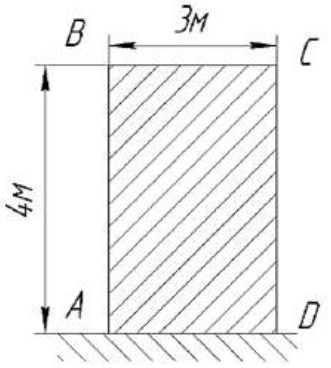
$P_{потр} = N \cdot f \cdot \omega \cdot \frac{d}{2} = \frac{N \cdot f \cdot \pi \cdot n \cdot d}{60}$ и сила прижатия детали кругом

$$N = \frac{P_{потр} \cdot 60}{f \cdot \pi \cdot n \cdot d} = \frac{1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 60}{0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 120 \cdot 0{,}6} = 1592\text{Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 10.6 Тело М весом 2 кН равномерно перемещается вверх по наклонной плоскости, длина которой 8 м и угол подъема 30^0, под действием горизонтальной силы. Определить работу, производимую силой. Коэффициент трения f=0,2,

Задача 10.7 Бетонный блок ABCD, размеры которого указаны на рисунке, имеет массу 2000 кг. Определить работу, которую необходимо затратить на опрокидывание его через ребро D.



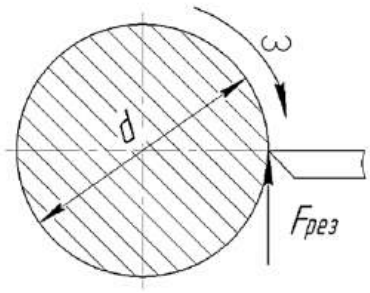
Задача 10.8 Для того, чтобы поднять $5 \cdot 10^3$ $м^3$ воды на высоту 3 м, поставили насос с двигателем 2 л.с. Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если КПД насоса 0,8.

Задача 10.9 Поршень двигателя перемещается на 20 см под давлением 800 кПа. Определите работу, совершаемую двигателем за один ход поршня, если площадь поршня 150 $см^2$.

Задача 10.10 Трактор равномерно тянет плуг, прилагая силу в 10 кН. За 10 мин он проходит путь 1,2 км. Определить мощность, развиваемую трактором.

Задача 10.11 Рабочий вращает рукоятку лебёдки силой F = 200 Н, перпендикулярной радиусу вращения. Найти работу, затраченную в течение времени t = 25 секунд, если длина рукоятки r = 0,4 м, а её угловая скорость $\omega = \pi/3$ рад/с.

Задача 10.12 Определите работу силы резания за 3 мин. Скорость вращения детали 120 об/мин, диаметр обрабатываемой детали 40 мм, сила резания 1 кН.



Задача 10.13 С плотины высотой 30м каждую минуту падает 150 кубических метров воды. Найдите мощность потока воды.

Задача 10.14 Поезд массой 600 т движется под гору с уклоном 0,3о и за 1 минуту развивает скорость 18 км/ч. Коэффициент трения равен 0,01. Определить среднюю мощность локомотива.

2 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Практическое занятие 11

Тема: «Центральное растяжение и сжатие. Построение эпюр нормальных сил, напряжений и перемещений»

Основные положения и расчетные формулы:

При расчете деформируемых тел в сопротивлении материалов заменять распределенную нагрузку сосредоточенной не следует, т.к. характер деформации зависит от способа приложения силы.

Также нельзя переносить пару сил в другую точку детали, перемещать сосредоточенную силу вдоль линии действия, нельзя систему сил заменять равнодействующей при определении перемещений.

Внутренние силы определяются основным методом сопротивления материалов – методом сечений.

Метод сечений заключается в мысленном рассечении тела плоскостью и рассмотрении равновесия любой из отсеченных частей.

Величину интенсивности внутренних сил в точке поперечного сечения называют механическим напряжением или, другими словами: напряжением называется внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке сечения.

В технических расчетах единица измерения напряжения: 1 МПа (Мега Паскаль) = 1 Н/мм^2.

Центральным растяжением или сжатием называют вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила (N).

Условно знак продольной силы определяют в зависимости от деформации: при растяжении – «плюс», при сжатии – «минус».

Полное (абсолютное) удлинение $\Delta l = l_1 - l$.

Отношение полного (абсолютного) удлинения к первоначальной длине бруса называется относительной продольной деформацией ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила в сечении, Н;

А – площадь поперечного сечения, мм^2.

Закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

где E – модуль продольной упругости материала (модуль Юнга), Н/мм^2.

Абсолютное удлинение участка бруса при его центральном растяжении (сжатии) прямо пропорционально длине участка и напряжению в нем и

обратно пропорционально модулю упругости материала, из которого он изготовлен

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \sigma \cdot \frac{l}{E}.$$

Задача 11.1 Стальной ступенчатый брус (рисунок 11.1) защемлен одним концом и нагружен сосредоточенными силами $P_1 = 50$ *кН* и $P_2 = 70$ *кН*. Площади его поперечных сечений: $A_1 = 400$ *мм*^{2} и $A_2 = 2A_1$.

Длины участков равны $a = 20$ *мм*, $b = 50$ *мм*, $c = 30$ *мм* и $d = 40$ *мм*.

Требуется: 1) построить эпюру нормальных сил *N*;

2) построить эпюру напряжений σ;

3) построить эпюру перемещений Δl;

4) определить полное перемещение свободного конца бруса Δl.

Решение.

1. Определение нормальных сил *N*.

Между заделкой и брусом (рисунок 11.1, *а*) возникает реакция связи *R*. Реакция *R* для бруса является внешней нагрузкой, величина которой не известна.

Нормальная сила *N* является внутренней силой. Внутренние силы на участках определяются методом сечений. Брус разбит на четыре участка. Участок *1* длиной *a,* участок *2* длиной *b,* участок *3* длиной *c* и участок *4* длиной *d*. Найдем нормальные силы *N* на участках.

Участок 1. Мысленно рассечем брус, в любом месте первого участка, сечением *1–1*, перпендикулярно оси *X* бруса. Отбросим левую часть бруса, так как к ней приложена неизвестная реакция связи *R*. Действие отброшенной части заменяем внутренним усилием N_1 (рисунок 11.1, *б*). Направление действия силы N_1 выбираем произвольно, но так, чтобы ее линия действия совпадала с осью *X*. Рассмотрим равновесие правой части. На оставленную часть внешние нагрузки не действуют. Поэтому на первом участке внутренняя сила N_1 действующая со стороны отброшенной левой части, будет равна нулю.

Участок 2. Мысленно рассечем брус, в любом месте второго участка (рисунок 11.1, *в*), сечением *2–2*, перпендикулярно оси *X*. Отбросим левую часть. Так как до рассечения брус находился в равновесии (покое), то после рассечения оставленная часть тоже должна находиться в равновесии. Заменим действие отброшенной части внутренней силой N_2 (рисунок 11.1, *в*). Направление действия силы N_2 выбираем произвольно, но так, чтобы ее линия действия совпадала с осью *X*. Проецируем все силы, действующие на рассматриваемую часть, на ось *X*

$$\sum_1^n X = 0. \; -P_1 + N_2 = 0. \; -50 + N_2 = 0. \; N_2 = 50 \text{ кН}.$$

Получено положительное значение силы N_2. Следовательно, направление действия силы N_2 выбрано правильно.

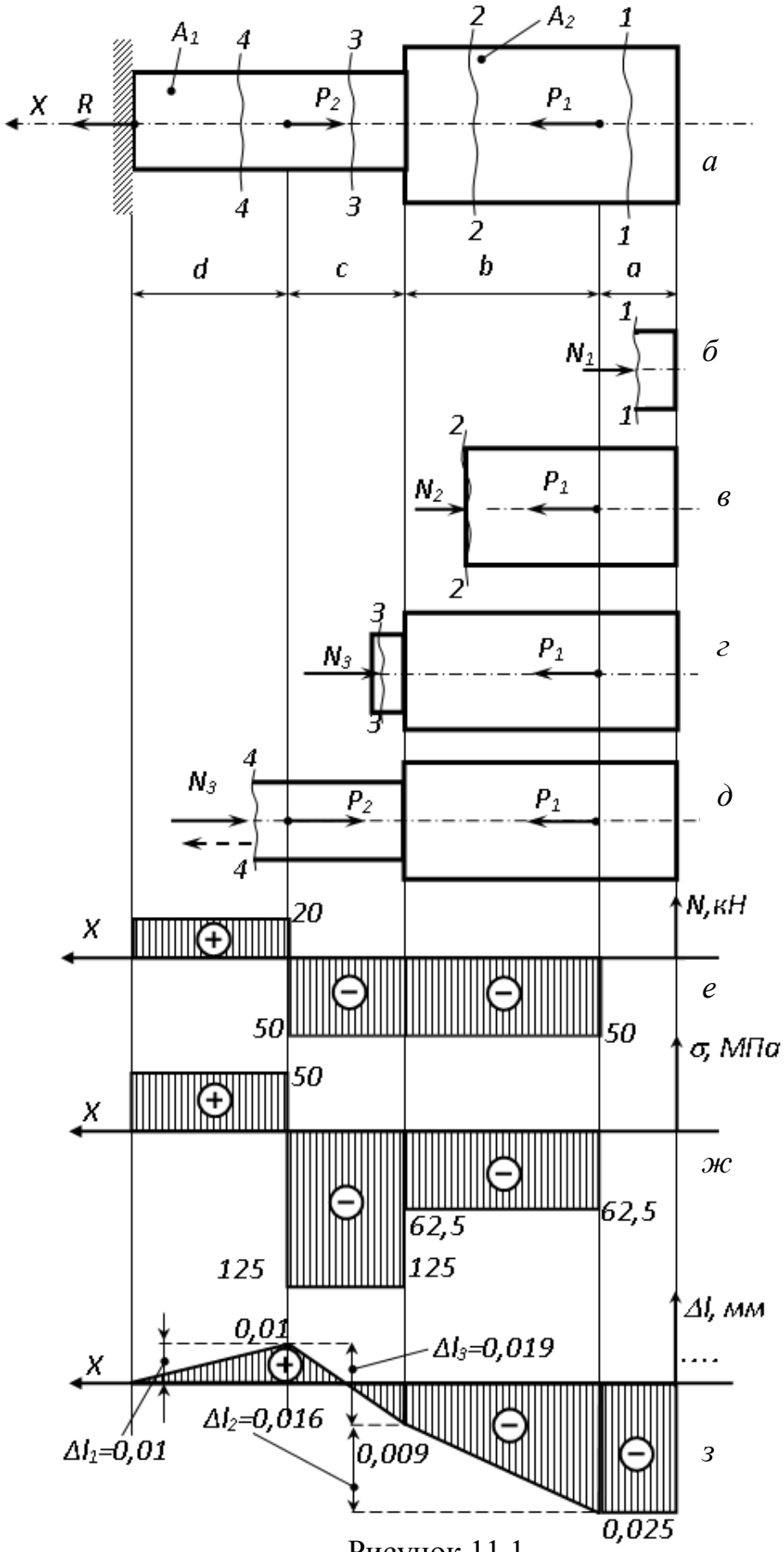

A1
A2
X
R
P2
P1
d
c
b
a
N1
N2
N3
N,кН
20
50
σ, МПа
62,5
125
Δl, мм
0,01
Δl3=0,019
Δl2=0,016
Δl1=0,01
0,009
0,025
а
б
в
г
д
е
ж
з

Рисунок 11.1

В сопротивлении материалов принято следующее обозначение положительных и отрицательных сил. Если под действием продольной силы N возникает деформация растяжения (вектор силы N направлен от сечения), то сила положительна и обозначается знаком (+), а если сжатия (вектор силы N направлен к сечению), – отрицательна и обозначается знаком (**–**).

Под действием силы N_2 в стержне возникает деформация сжатия, следовательно, она отрицательна $N_2 = -50$ *кН*.

Участок 3. Мысленно рассечем брус в любом месте третьего участка (рисунок 11.1, *а*) сечением *3–3*, перпендикулярно оси *X* бруса. Отбросим левую часть (рисунок 11.1, *г*). Действие отброшенной части на оставленную заменим внутренней силой N_3. Направление действия силы N_3 выбираем произвольно. Проецируем все силы, действующие на рассматриваемую часть, на ось *X:*

$$\sum_{1}^{n} X = 0.\ -P_1+N_3=0.\ -50+N_3=0.\ N_3=50\ кН.$$

Получено положительное значение силы N_3. Следовательно, направление действия силы N_3 выбрано правильно.

Участок 4. Мысленно рассечем брус в любом месте третьего участка (рисунок 11.1, *а*) сечением *4–4*, перпендикулярно оси *X* бруса. Отбросим левую часть (рисунок 11.1, *д*). Действие отброшенной части на оставленную заменим внутренней силой N_4. Проецируем все силы, действующие на рассматриваемую часть, на ось *X:*

$$\sum_{1}^{n} X = 0.\ -P_1+P_2+N_4 = 0.\ -50+70+N_4 = 0.\ N_4 = 50-70.\ N_4 = -20\ кН.$$

Получено отрицательное значение силы N_4, следовательно, направление ее действия выбрано неверно. Направим силу N_4 в противоположную сторону, то есть влево от сечения (для наглядности верное направление силы N_4 показано пунктиром). С учётом правила знаков, под действием силы N_4 возникает деформация растяжения. Окончательно получаем $N_4 = 20$ *кН*.

По результатам расчетов построим эпюру (рисунок 11.1, *е*) нормальных сил. Для этого под схемой бруса проведем оси. Горизонтальная ось является нулевой линией (*0–0*), которую обозначим *X*. Вертикальная ось – ось продольных сил *N*. Положительные силы *N* в масштабе будем откладывать вверх от нулевой линии, а отрицательные – вниз.

В любом поперечном сечении первого участка нормальная сила $N_1 = 0$. Она совпадет с нулевой линией.

В начале второго участка сила $N_2 = -50$ *кН*. Отложим величину этой силы вниз от нулевой линии. В последующих сечениях, в том числе и в конце этого участка, величина силы не изменяется. Отложим силу $N_2 = -50$ *кН* в конце второго участка вниз. Полученные точки соединим горизонтальной линией.

Учитывая знаки деформаций и величины сил N_3 и N_4, аналогично построим эпюры для третьего и четвёртого участков бруса.

Построенные фигуры (прямоугольники) заштрихуем вертикальными линиями, соответствующие знаки деформаций покажем в поле эпюр. Вертикальные линии штриховки указывают на величину силы в соответствующем поперечном сечении бруса. На углах прямоугольников эпюры укажем величину отложенных сил.

Проверим правильность построения эпюры нормальных сил. Сосредоточенные внешние силы дают скачки на эпюре нормальных сил. Действительно, в сечении, где к брусу приложена сосредоточенная сила P_1= 50 *кН*, на эпюре сил имеет место скачок нормальной силы N_2 от нуля до 50 *кН*. В сечении, где приложена сила P_2, скачок равен (20 + 50 = 70**)** величине внешней силы P_2 = 70 *кН*. Следовательно, эпюра нормальных сил построена правильно.

2. Определение нормальных напряжений σ.

Нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях бруса, определим по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Знак напряжения имеют тот же, что и нормальная сила.

Участок 1. $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_2}$. В соответствии с проведенными расчетами и рисунком 11.1 *е,* на первом участке нормальная сила N_1=0, следовательно, напряжения на этом участке тоже равны нулю $\sigma_1 = \frac{0}{2 \cdot 400(мм^2)} = 0$.

Участок 2. В соответствии с проведенными расчетами и рисунком 11.1, *е*, в любом поперечном сечении второго участка нормальная сила N_2 величина постоянная. Тогда напряжение на втором участке составит:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-50 \cdot 10^3(Н)}{2 \cdot 400(мм^2)} = -62{,}5 \ МПа \ (Н/мм^2).$$

Участок 3. $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{-50 \cdot 10^3(Н)}{400(мм^2)} = -125 \ МПа.$

Участок 4. $\sigma_4 = \frac{N_4}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3(Н)}{400(мм^2)} = 50 \ МПа.$

По результатам расчетов построим эпюру нормальных напряжений σ (рисунок 11.1, *ж*). Для этого под эпюрой нормальных сил параллельно оси *X* проведем нулевую линию (*0–0*), которую обозначим *X*. Покажем ось напряжений *σ*. В начале и конце каждого участка, с учетом знаков, отложим вверх и вниз полученные значения напряжений. Соседние нанесенные точки соединим прямыми линиями. Полученные прямоугольники заштрихуем вертикальными линиями.

Вся фигура называется эпюрой нормальных напряжений и из нее видно, что наиболее напряженным участком является участок *с*, где напряжения достигают самого большого значения, а значит и относительная

деформация будет самой большой (по закону Гука). Опасным участком, в данном случае, является участок *d*, где напряжение положительное, участок растягивается и может произойти разрыв бруса, т.е. его разрушение.

3. Определение полного перемещения свободного конца бруса *Δl*.

Деформация бруса при центральном растяжении (сжатии) определяется по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

где l – длина бруса или его участка,

E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга). Примем для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Из формулы видно, что деформация зависит от нормальной силы, длины бруса и площади его поперечных сечений. Так как брус состоит из участков, у которых длины, площади поперечных сечений и продольные силы различны, то, пользуясь принципом независимости действия сил, определим деформации участков, а результат просуммируем:

Участок 1. $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_2} = \dfrac{0(H) \cdot 20(мм)}{2 \cdot 10^5 (H/мм^2) \cdot 2 \cdot 400(мм^2)} = 0\ мм.$

Участок 2. $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = \dfrac{-50 \cdot 10^3 (H) \cdot 50(мм)}{2 \cdot 10^5 (H/мм^2) \cdot 2 \cdot 400(мм^2)} = -0{,}016\ мм.$

Участок 3. $\Delta l_3 = \dfrac{N_3 \cdot c}{E \cdot A_1} = \dfrac{-50 \cdot 10^3 (H) \cdot 30(мм)}{2 \cdot 10^5 (H/мм^2) \cdot 400(мм^2)} = -0{,}019\ мм.$

Участок 4. $\Delta l_4 = \dfrac{N_4 \cdot d}{E \cdot A_1} = \dfrac{20 \cdot 10^3 (H) \cdot 40(мм)}{2 \cdot 10^5 (H/мм^2) \cdot 400(мм^2)} = 0{,}01\ мм.$

Тогда полное перемещение свободного конца бруса

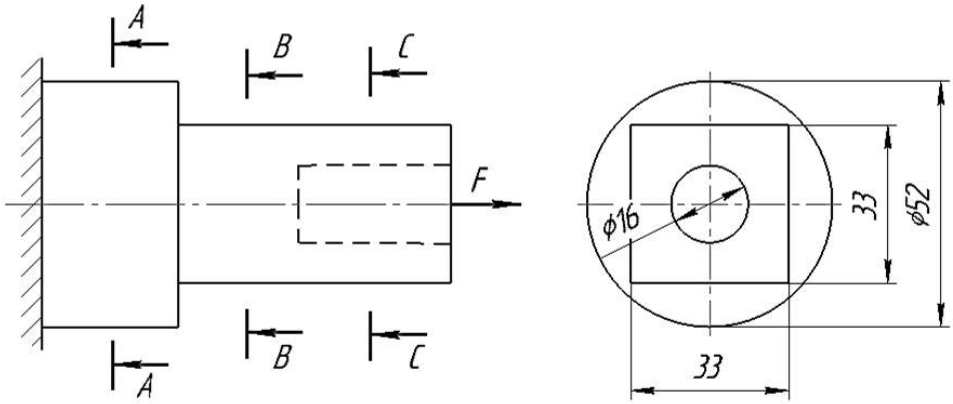
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0 - 0{,}016 - 0{,}019 + 0{,}01 = -0{,}025\ мм.$$

Для построения эпюры перемещений под эпюрой напряжений проведем нулевую линию (*0–0*), которую обозначим X (рисунок 11.1, *з*). Покажем ось абсолютной деформации и обозначим ее *Δl*. Сечение в заделке не перемещается. Так как его перемещение равно нулю, то это сечение принимаем за начало четвёртого участка и точку отсчёта эпюры. Отложим перемещение $\Delta l_4 = 0{,}01$ мм конца четвёртого участка вверх от нулевой линии (положительная величина) и соединим полученные точки. К отложенной деформации 0,01 мм (пунктирная линия) прибавим перемещение $\Delta l_3 = -0{,}019$ мм конца последующей части третьего участка. Эту величину отложим вниз, так как она отрицательна. Соединим нанесенные точки. К полученному результату последовательно прибавим перемещение $\Delta l_2 = -0{,}016$ мм конца следующей части второго и $\Delta l_1 = 0$ первого участков. Точки соединим. Получили эпюру перемещений поперечных сечений бруса. По эпюре можно определить не только полную деформацию бруса, но и перемещение сечений бруса. Они будут соответствовать длине штриха на эпюре в заданном сечении. Так,

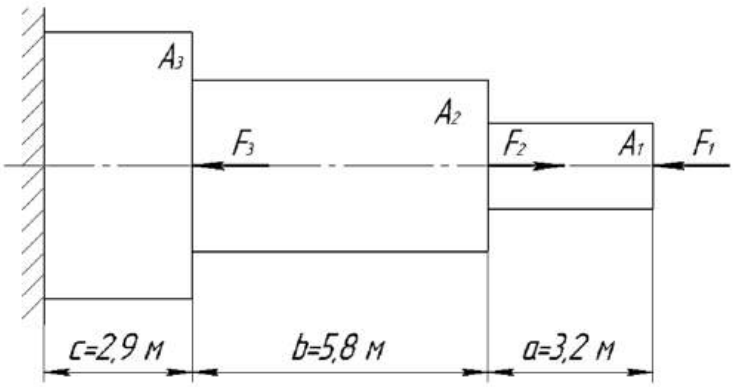
сечение на участке *c*, соответствующее точке пересечения нулевой линии эпюры, останется неподвижным несмотря на деформацию участков бруса.

Задачи для самостоятельного решения:

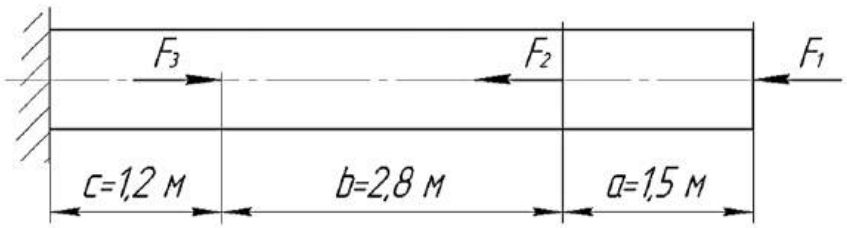
Задача 11.2 На брус переменного сечения действует растягивающая сила F=20 кН. Определить напряжения в сечениях A, B и C.



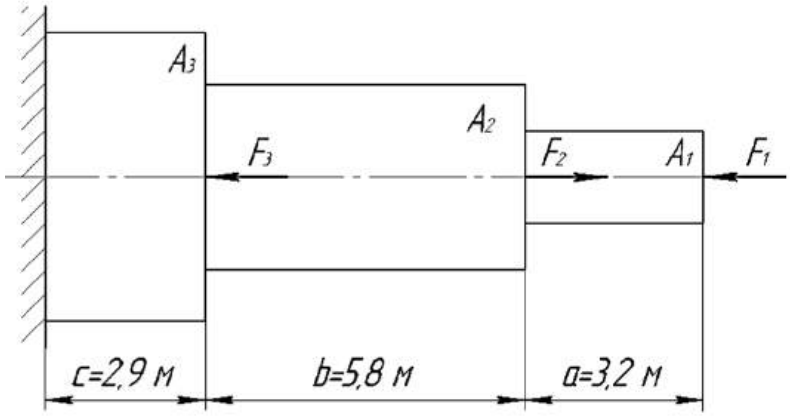
Задача 11.3 На брус переменного сечения действуют силы F_1=15 кН, F_2=23 кН и F_3= 10 кН. Построить эпюры нормальных сил N и нормальных напряжений σ. Площади сечения участков бруса: A_1=200 мм^2, A_2=550 мм^{2,}. A_1=700 мм^2



Задача 11.3 На стальной брус, находящийся в состоянии упругой деформации, сечением A=200 мм^2 действуют силы F_1=25 кН, F_2=13 кН и F_3= 30 кН. Определить максимальное напряжение бруса и его полную деформацию.



Задача 11.4 На стальной брус переменного сечения действуют силы F_1=25 кН, F_2=13 кН и F_3= 30 кН. Построить эпюры нормальных сил N и перемещений сечений. Площади сечения участков бруса: A_1=200 мм^2, A_2=550 мм^{2,}. A_3=600 мм^2



Задача 11.5 Стальной ступенчатый брус закреплен одним концом и нагружен силами F_1, F_2, F_3, как показано на рисунке. Площади поперечных сечений ступеней бруса: A, 2A, 3A.

Требуется:

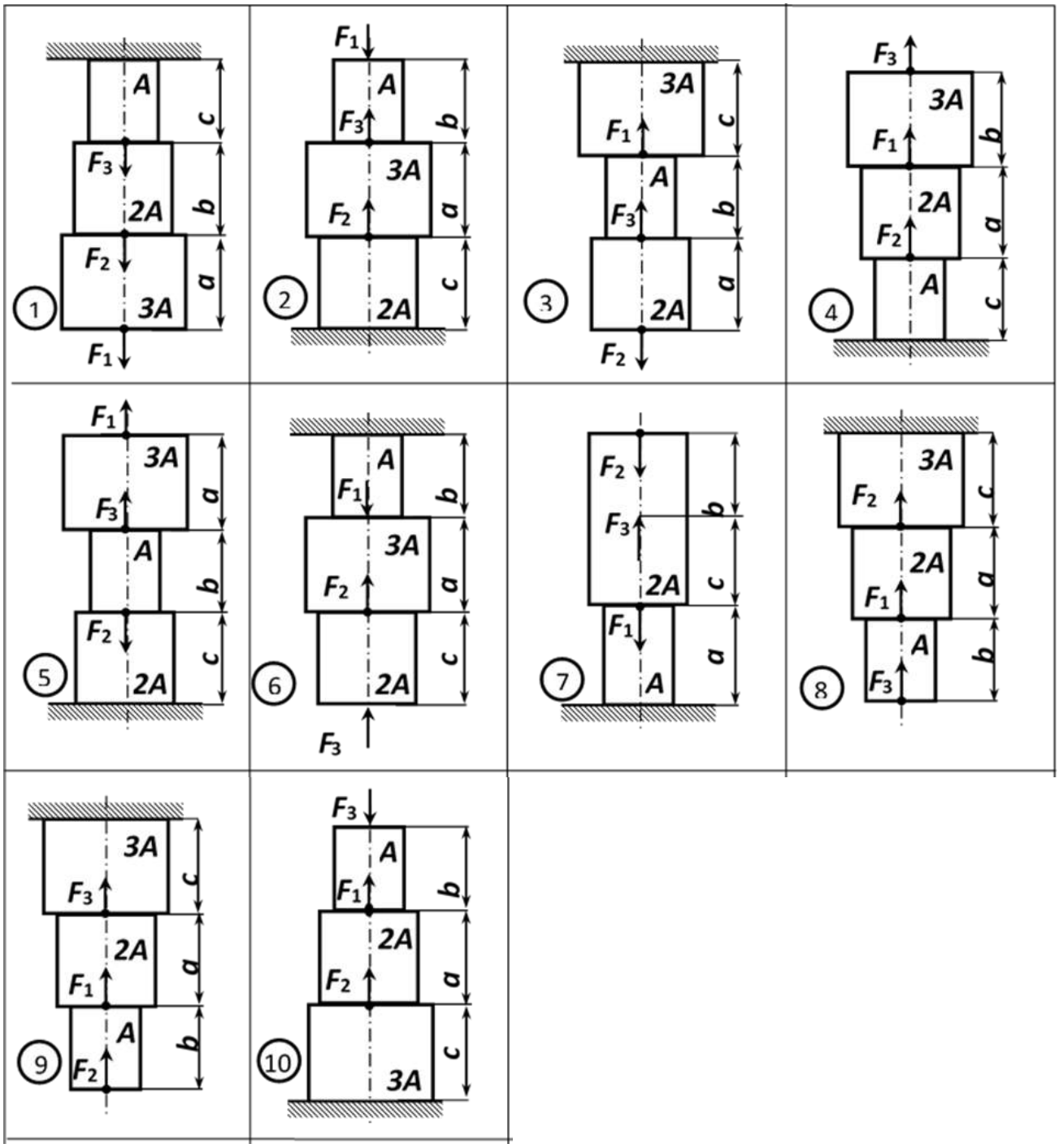
1. Используя метод сечений определить продольные силы N, нормальные напряжения σ на характерных участках бруса.

2. Определить деформации всех характерных участков бруса и полную деформацию бруса Δl, приняв модуль Юнга для стали E = $2\cdot10^5$ МПа.

3. Построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ и перемещений сечений бруса.

Исходные данные для расчетов взять из таблицы

№ п/п	Длины участков, см			A, мм^2	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН
	a	b	c				
1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	7	6	$5{,}0\cdot10^2$	40	44	80
2	5	9	4	$7{,}0\cdot10^2$	56	60	100
3	6	11	7	$3{,}0\cdot10^2$	64	20	140
4	6	7	8	$6{,}5\cdot10^2$	90	40	100
5	7	8	4	$7{,}2\cdot10^2$	140	20	64
6	11	4	6	$6{,}0\cdot10^2$	120	80	30
7	8	5	10	$8{,}0\cdot10^2$	60	120	48
8	10	6	5	$9{,}0\cdot10^2$	80	140	30
9	9	4	12	$8{,}2\cdot10^2$	100	56	80
10	8	11	4	$2{,}5\cdot10^2$	120	84	36


1
A
c
F3
2A
b
F2
3A
a
F1
2
F1
A
F3
b
3A
F2
a
2A
c
3
3A
c
F1
A
F3
b
2A
a
F2
4
F3
3A
b
F1
2A
a
F2
A
c
5
F1
3A
a
F3
A
b
F2
2A
c
6
A
F1
b
3A
F2
a
2A
c
F3
7
F2
F3
b
2A
c
F1
A
a
8
3A
F2
c
2A
a
F1
A
F3
b
9
3A
c
F3
2A
a
F1
A
F2
b
10
F3
A
F1
b
2A
F2
a
3A
c

Практическое занятие 12

Тема: «Расчеты при растяжении и сжатии»

Основные положения и расчетные формулы:

Для обеспечения *прочности* расчетное напряжение не должно превышать допускаемого напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Основные виды расчета на прочность:

1. Проектировочный расчет производится в случае, когда задана расчетная схема и нагрузки. Он сводится к подбору материала и определению размеров детали:

– размеры поперечного сечения определяются из условия прочности:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

– подбор материала производится по предельным напряжениям для детали с заданными размерами и коэффициентом запаса прочности:

$$\sigma_{\text{пред}} \geq \frac{N \cdot [n]}{A}.$$

2. Проверочный расчет сводится к проверке выполнения условий прочности. При таком расчёте определяют фактическое напряжение и сравнивают с допускаемым:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

3. Определение нагрузочной способности (максимальной нагрузки). Определяется нагрузка $[N]$, при которой фактический запас прочности равен допускаемому коэффициенту запаса $n = [n]$. Или иначе из условия прочности на растяжение

$$[N] = [\sigma]A.$$

Расчёт на жёсткость. Условие жёсткости при центральном растяжении (сжатии) имеет вид:

$$\Delta l_{max} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l]$$

где l – первоначальная длина бруса;

$[\Delta l]$ – допускаемая абсолютная деформация.

Расчёт на жёсткость всегда должен быть дополнен расчётом на прочность.

Условие жесткости позволяет решать три вида задач:

1. Проверочный расчёт (проверка жесткости). Абсолютная деформация детали под действующей нагрузкой не должна быть меньше допускаемой:

$$\Delta l_{max} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l].$$

2. Проектный расчёт (подбор сечения). Определяется минимальная площадь сечения детали, при которой ее деформация не превысит допускаемую по формуле

$$A \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot [\Delta l]}.$$

3. Расчёт допускаемой нагрузки (грузоподъемности). Для конкретной детали определяется максимальная нагрузка, при которой ее деформация не превысит допускаемую:

$$N \leq \frac{E \cdot A \cdot [\Delta l]}{l}.$$

Задача 12.1 Стальной горизонтальный брус длиной l = 0,8 *м* и площадью сечения A = 100 *мм*^{2} растягивается силой F = 20 *кН*. Определить нормальное напряжение в поперечном сечении бруса, а также его абсолютное и относительное удлинение. Модуль упругости для стали принять равным $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. В любом сечении бруса возникает продольная сила $N = F = 20 \cdot 10^3$Н. Нормальное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{Н}}{100 \text{ мм}^2} = \frac{200 \text{Н}}{\text{мм}^2} = 200 \text{ МПа}.$$

Абсолютное удлинение при длине l = 0,8 м = 800 мм:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E} = \sigma \cdot \frac{l}{E} = 200\text{МПа} \cdot \frac{800\text{мм}}{2 \cdot 10^5 \text{МПа}} = 0{,}8 \text{ мм}.$$

Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}8\text{мм}}{800\text{мм}} = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 12.2 Колонна, выполненная из чугунной трубы высотой h = 3 *м*, $\text{h} = 3\text{м}$ сжимается нагрузкой P = 300 *кН*. Наружный диаметр колонны D = 200 *мм*, $\text{D} = 200$ ммтолщина стенки $\delta = 20$ мм. Вычислить напряжение в поперечном сечении, а также относительное и абсолютное укорочение колонны. Вес колонны не учитывать, а модуль продольной упругости для чугуна принять равным $E = 1{,}2 \cdot 10^5$МПа.

Решение. В любом поперечном сечении колонны возникает продольная сжимающая сила $N = -P = 300 \cdot 10^3$Н.

Внутренний диаметр колонны

$$d = D - 2\delta = 200 - 2 \cdot 20 = 160 \text{ мм}.$$

Площадь поперечного сечения колонны определим как площадь кольца:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(200^2 - 160^2) = 1{,}13 \cdot 10^4 \text{мм}^2.$$

Напряжение сжатия в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{300 \cdot 10^3 \text{Н}}{1{,}13 \cdot 10^4 \text{мм}^2} = -26{,}2 \text{ МПа}.$$

Относительное укорочение колонны

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-26{,}2\text{МПа}}{1{,}2 \cdot 10^5 \text{МПа}} = -22{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

Абсолютное укорочение колонны
$\Delta l = h \cdot \varepsilon = -3 \cdot 10^3 мм \cdot 22{,}2 \cdot 10^{-5} =$ –0,67 *мм.*

Задача 12.3 Кронштейн АВС (рисунок 12.1 *а*) состоит из двух стальных стержней круглого сплошного сечения диаметром d_1 = 20 *мм* и d_2 = 25 *мм*, удерживает груз весом P = 20 *кН*. Крепления стержней шарнирные. Определить напряжения в стержнях.

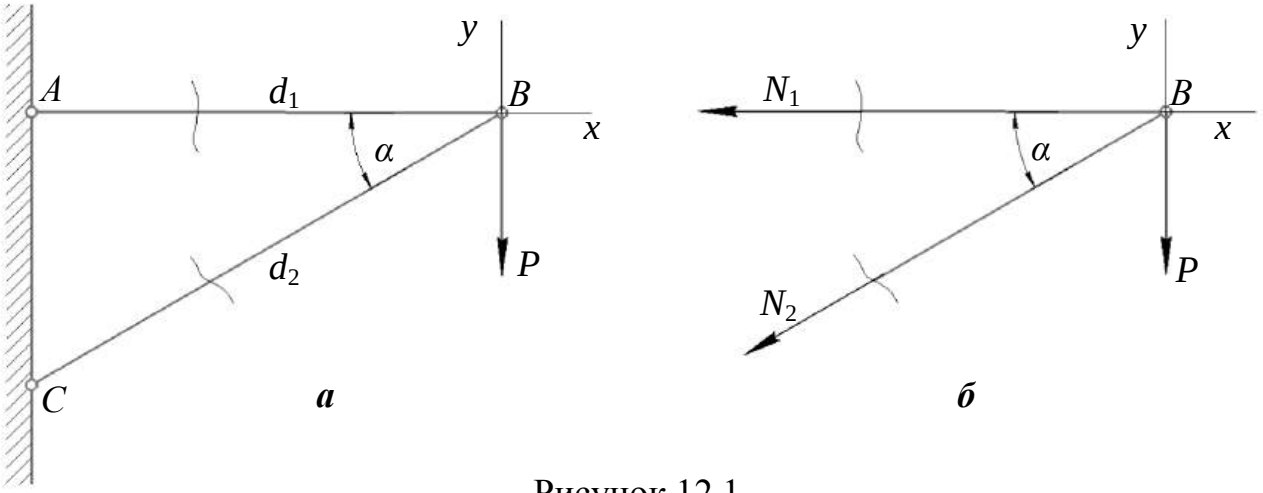


Рисунок 12.1

Решение. Шарниры считаем идеальными, т.е. такими, трение в которых отсутствует. Как известно из статики твердого тела, реакции в шарнирах будут направлены вдоль осей стержней. Следовательно, в поперечных сечениях стержней возникают только продольные силы.

Рассечем стержни и отбросим левую часть конструкции (рисунок 12.1 *б*). В местах разреза стержней приложим продольные силы N_1 и N_2, предполагая их растягивающими.

Оставшаяся правая часть конструкции находится в равновесии. Линии всех сил проходят через точку *B*, следовательно, используем условия равновесия для сходящейся системы сил:

$$\sum x = -N_1 - N_2 \cdot \cos\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\sum y = -P - N_2 \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (2) \qquad (2)$$

Из уравнения (2) $\Rightarrow N_2 = -\frac{P}{sin\,\alpha} = -\frac{20кН}{sin\,30^0} =$–40 *кН.*

Знак «минус» показывает, что направление силы N_2 противоположное выбранному первоначально, и она является сжимающей (стержень работает на сжатие).

Из уравнения (1) $\Rightarrow N_1 = -N_2 \cdot \cos\alpha = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 34{,}6$ кН – стержень работает на растяжение.

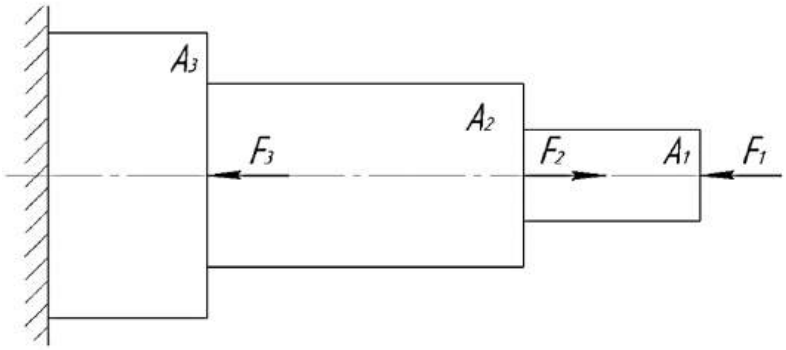
Определим площади сечения стержней и напряжения в стержнях:

$A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314мм^2$, $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{36{,}4 \cdot 10^3 Н}{314мм^2} =$110 *МПа.*

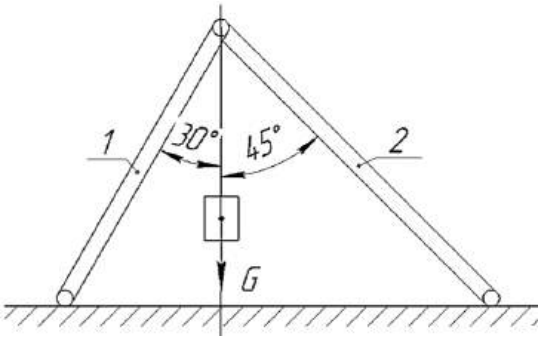
$A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 491мм^2$, $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{40 \cdot 10^3 Н}{491мм^2} =$–81,5 *МПа.*

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

<u>Задача 12.4</u> Выполнить проверочный расчет бруса, нагруженного силами F_1=20 кН, F_2=25 кН и F_3=35 кН. Площади сечения участков бруса: A_1=2 см^2, A_2=3 см^{2,}. A_3=4 см^2. Допускаемое напряжение [σ]=120 МПа.



<u>Задача 12.5</u> Груз весом G=120 кН удерживается в вертикальной плоскости двумя стержнями, шарнирно закрепленными с двух сторон. Определить размеры поперечного сечения стержней из условия прочности: 1 – круглого сплошного, 2 – квадрат. Допускаемое напряжение [σ]=220 МПа.



<u>Задача 12.6</u> Какую наибольшую нагрузку может выдержать деревянный столб сечением 20х20 см^2 при допускаемом сжимающем напряжении 120 кг/см^2.

<u>Задача 12.7</u> Чугунная колонна круглого сплошного поперечного сечения нагружена силой $2\cdot10^6$ Н. Определить необходимый диаметр колонны, если допускаемое напряжение на сжатие [σ]=80 МПа.

<u>Задача 12.8</u> Стальная полоса сечением 30х10 мм^2 и длиной *l*=250 мм растянута силой P=60 кН. Модуль упругости материала полосы *E*=$2\cdot10^5$МПа. Вычислить нормальное напряжение, абсолютное и относительное удлинение полосы.

<u>Задача 12.9</u> Стальной стержень круглого сечения растягивается силой 100 кН. Найти диаметр сечения, если относительное удлинение не должно превышать ε=$5\cdot10^{-4}$, а напряжение не должно быть больше σ=120МПа.

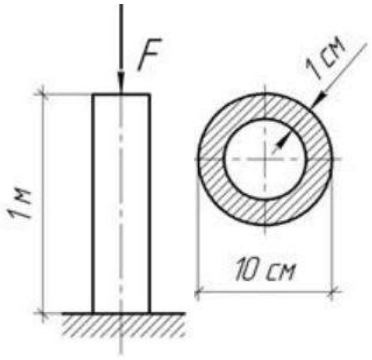
Задача 12.10 Полый цилиндрический стержень длиной l=200 мм под действием сжимающей силы упруго укоротился на величину $\Delta\ell$=0,2 мм. Наружный диаметр цилиндра D=40 мм, внутренний диаметр d=30 мм. Определить величину сжимающей силы и напряжение в стержне, если модуль упругости материала равен $E=2\cdot10^5$МПа.

Задача 12.11 Стержень из малоуглеродистой стали шириной 0,3 м и толщиной 0,015 м ослаблен заклепочным отверстием диаметром 0,023 м, расположенным на оси стержня. Какое растягивающее усилие этот стержень может выдержать, если допускаемое напряжение равно 90 МПа?

Задача 12.12 К нижнему концу троса, закрепленного верхним концом, подвешен груз F = 75 кН. Трос составлен из проволок диаметром d = 2 мм. Допускаемое напряжение для материала троса равно [σ] = 300 МПа. Из какого количества проволок должен быть составлен трос?

Задача 12.13 Стальной болт длиной ℓ = 16 см при затяжке получил удлинение $\Delta\ell$=0,12 мм. Определить напряжение в болте, если модуль Юнга $E=2\cdot10^5$ МПа.

Задача 12.14 Чугунная труба длиной 1 м нагружена сжимающей силой F=200 кН. Наружный диаметр трубы D=10 см, толщина стенки h=1 см. Вычислить величины напряжения, относительного и абсолютного укорочений трубы, считая $E=1{,}2\cdot10^5$МПа.



Практическое занятие 13

Тема: «Сдвиг (срез). Смятие»

Основные положения и расчетные формулы:

Сдвигом называется вид нагрузки, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор – поперечная сила Q.

Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

– при расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается, несмотря на то, что силы, действующие на деталь, образуют пару;

– при расчете считается, что силы упругости распределены по сечению равномерно;

– если для передачи нагрузки используется несколько деталей, считается, что внешняя сила распределяется между ними равномерно.

Исходя из допущений, формула для расчета напряжений имеет вид:

$$\tau_{\text{с}} = \frac{Q}{\sum A_c},$$

где Q – поперечная сила, Н;

$\sum A_c$ – суммарная площадь сдвига, мм^2.

Условие прочности при сдвиге (срезе):

$$\tau = \frac{Q}{\Sigma A_c} \leq [\tau_{\text{с}}],$$

где $[\tau_{\text{с}}]$ – допускаемое напряжение сдвига.

Из условия прочности решается три типа задач:

– для заданной конструкции определяют максимальное усилие, которое она может передавать;

– подбирают размеры и количество деталей, несущих указанную нагрузку;

– проверяют прочность конструкции.

Также расчеты на сдвиг производят из условия гарантированного среза:

$$\tau = \frac{Q}{\Sigma A_c} > \tau_{\text{пч}},$$

где $\tau_{\text{пч}}$ – предельные напряжения, при которых происходит деформация сдвига материала.

Одновременно со сдвигом может происходить смятие поверхности в месте контакта в результате передачи нагрузки от одной поверхности к другой.

При расчете цилиндрических поверхностей на смятие используют не боковую поверхность цилиндра, а условную плоскость, проходящую через диаметр.

Условие прочности при смятии: $\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{\text{А}_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}]$.

где $\text{А}_{\text{см}}$ – площадь смятия, мм^2.

Задача 13.1 Определить усилие, необходимое для пробивки круглого отверстия диаметром d = 20 *мм* в стальной пластине толщиной δ = 10 *мм* при заданном $\tau_{\text{пч}}$ = 420 *МПа*.

Решение. Используем условие гарантированного среза. Из левой части неравенства получаем: $Q > \tau_{\text{пч}} \cdot A_c$, где A_c – площадь разрушаемой (срезаемой) поверхности. При пробивании отверстия из пластины выдавится цилиндр диаметром d = 20 *мм* и высотой δ = 10 *мм*. Срез произойдет по боковой поверхности цилиндра, которая в развороте представляет собой прямоугольник со сторонами πd и δ.

Площадь среза составит: $A_c = \pi \cdot d \cdot \delta = 3{,}14 \cdot 20 \cdot 10 = 628 \text{мм}^2$.

Минимальное усилие пробивки отверстия:

$$F = Q > \tau_{\text{пч}} \cdot A_c = 420 \frac{H}{мм^2} \cdot 628\ мм^2 = 264 \cdot 10^3\ \text{Н} = 264\ кН.$$

Задача 13.2 Лист *1* и накладки в виде равнополочных уголков *2, 3* (рисунок 13.1) соединены заклепками внахлест.

Соединение нагружено сосредоточенной силой P=100 *кН*. Толщина листа S_2 = 5 *мм*. Допускаемое нормальное напряжение на разрыв материалов листа и накладок [σ] = 160 *МПа*. Допускаемое касательное напряжение на срез материала заклепки [τ] = 140 *МПа*. Допускаемое нормальное напряжение на смятие материала заклепки [$\sigma_{см}$] = 280 *МПа*.$[\sigma_{см}] = 280$ МПа

В задаче требуется:

1) определить размеры поперечного сечения накладок и листа;

2) число заклепок;

3) выполнить эскиз соединения.

Решение.

1. Определение площади поперечных сечений соединяемых элементов.

Накладки *2,3* испытывают деформацию растяжения. Подберем площади их поперечных сечений из условия прочности при растяжении:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \le [\sigma] ,$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальные нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении накладок;

A – площадь поперечного сечения двух накладок (уголков).

$$A \ge \frac{P}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3 (H)}{160 (H / мм^2)} = 625\ мм^2.$$

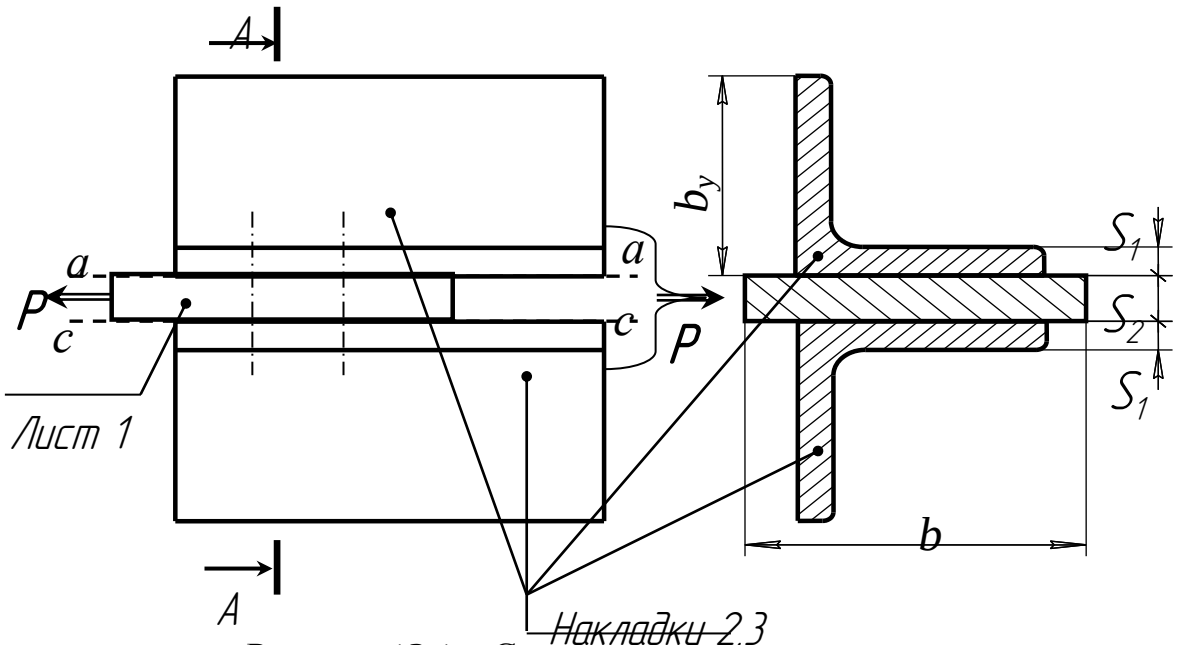


Рисунок 13.1 – Схема заклепочного соединения

Площадь сечения одной накладки (равнополочного уголка):

$$A^1 \ge \frac{A}{2} = \frac{625}{2} = 312{,}5 мм^2 = 3{,}125\ см^2.$$

В соединяемых элементах под заклёпки будут выполнены отверстия, следовательно, полученная площадь поперечных сечений уменьшится, т.е. прочность сечений снижается. По ГОСТ 8509-93 в полке равнополочного уголка по ее ширине можно выполнить одно отверстие (расположение

заклёпок однорядное). Установлено, что из-за отверстия под заклепки, площадь поперечного сечения уголка, уменьшается в среднем на 15%. Исходя из этого, увеличим расчетную площадь A^1 уголков на 15%. Тогда площадь поперечного сечения одного уголка составит

$$A_y^1 = A^1 \cdot 1{,}15 = 3{,}125 \cdot 1{,}15 = \ 3{,}59\ см^2.$$

По полученной площади по ГОСТ8509-93 подберем равнополочный уголок. Наиболее близкую площадь $A_y^{1T} = 3{,}48\ см^2$ к расчетной, имеет уголок № 4,5 *(Уголок* 45×45×4). Отклонение табличного и расчетного значений площадей составляет 3%, что не превышает допускаемых отклонений ±5%. Поперечное сечение уголка имеет следующие размеры: ширина полки $b_y = 45$ *мм*; толщина полки $S_1 = 4$ *мм*.

2. Определение числа заклёпок из условия прочности на срез.

При разрушении заклепочного соединения листом *1* под действием силы *P* часть заклепки высотой S_2 будет вырезаться по двум плоскостям: *а–а* и *с–с*, перпендикулярным оси заклепки (рисунки 13.1 и 13.2). Площадь поперечного сечения одного среза заклепки равна площади круга $A_{ср}$.

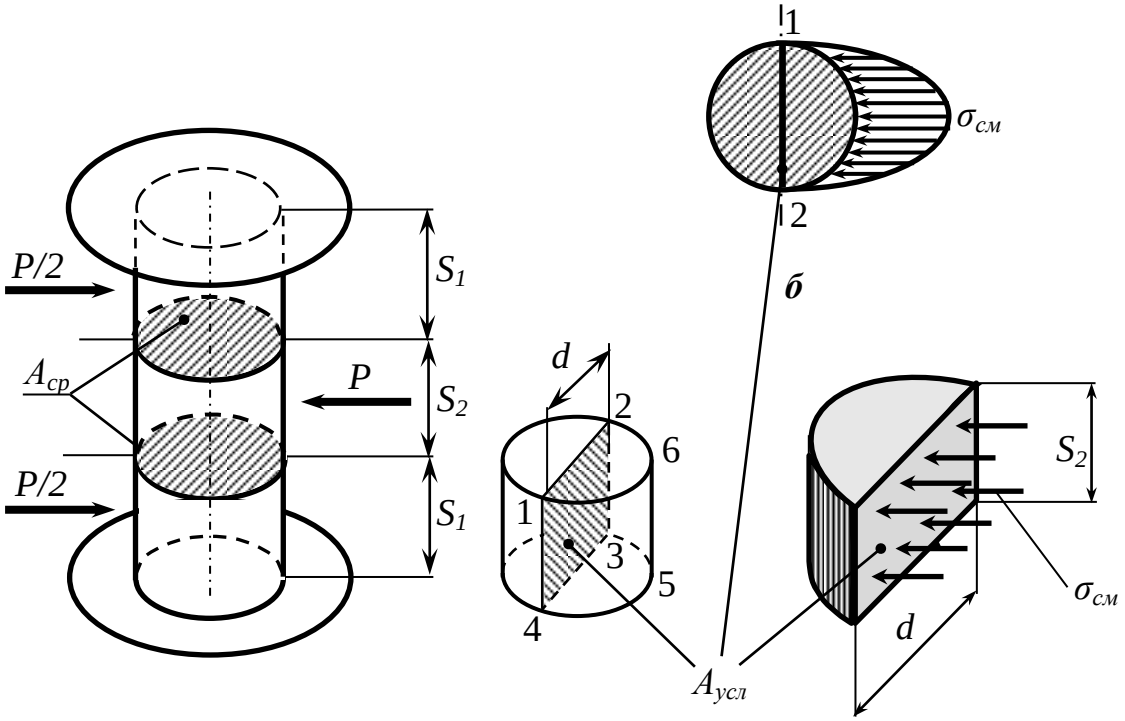


Рисунок 13.2

В плоскости среза заклёпки возникают касательные напряжения τ, равномерно распределённые по сечению. В этом случае прочность соединения на срез будет гарантирована, если будет выполняться условие

$$\tau_{\max} = \frac{P}{A_3} \le [\tau],$$

где A_3 – срезаемая площадь всех заклепок. Она равна: $A_3 = A_{CP} \cdot n \cdot i$;

i – число поверхностей среза одной заклёпки, $i=2$;

n – число заклепок в соединении:

A_{CP} – площадь поперечного сечения одного среза заклепки,

$$A_{CP} = \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

где d – диаметр площади одного среза заклепки.

В соответствии с ГОСТ8509-93 в поперечном сечении выбранного уголка № 4,5 максимальный диаметр этого отверстия $D_{ном}$=11 *мм*, соответствует стандартному диаметру заклепки по ГОСТ 14802-85 d_0 = 8 *мм*. Так как после установки заклепка полностью заполнит отверстие, то при срезе ее диаметр будет равным диаметру отверстия d= $D_{ном}$ =11 *мм*. Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2 \cdot n \cdot i} \le [\tau],$$

откуда получаем

$$n \ge \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2 \cdot i \cdot [\tau]} = \frac{4 \cdot 100 \cdot 10^3 (H)}{3{,}14 \cdot 11^2 (мм^2) \cdot 2 \cdot 140 (H/мм^2)} = 3{,}76 \ заклепок.$$

Принимаем n=4 *штуки.*

3. Определение числа заклёпок из условия прочности на смятие.

Соблюдение условия прочности на срез не всегда обеспечивает прочность заклепочного соединения. Если под действием силы P произойдёт смятие стенок отверстия в листе или стержня заклёпки по полуцилиндрической поверхности контакта, то это приведёт к нарушению технических условий эксплуатации соединения (другими словами – соединение начнет «болтаться»). Чаще всего заклепки выполняются из более мягкого материала, чем листы, т.е. деформацию смятия испытывает стержень заклепки. Для обеспечения надёжности соединения необходимым является проверка заклёпок на смятие. Исходя из этого, подберем количество заклепок из условия прочности на смятие

$$\sigma_{CM}^{\max} = \frac{P}{A_{CM}} \le [\sigma_{CM}],$$

где A_{CM} – условная площадь смятия всех заклепок, $A_{CM} = A_{УСЛ} \cdot n$;

$A_{УСЛ}$ – условная площадь смятия одной заклёпки.

Под действием силы P заклепка сминается и листом, и накладками (рисунок 13.2). Форма сминаемой поверхности (в месте контакта с листом) заклёпки – полуцилиндр. Максимальные напряжения смятия заклёпки возникают в зоне наименьшей суммарной толщины элементов, сдвигаемых в одну сторону. Высота (толщина) накладок равна: $S_H = S_1 + S_1 = 4 + 4 = 8$ *мм*, а высота полуцилиндра (заклёпки) *1–2–3–4–5–6* под листом – S_2 = 5 *мм*, т.е. $S_H > S_2$ или $S_2 = S_{\min}$. Исходя из этого наибольшая деформация смятия заклёпки (максимальные напряжения) возникает со стороны давления листа. Возникающие нормальные напряжения смятия по поверхности заклепки распределяются неравномерно (рисунок 13.2 *б*), но для практических расчетов принимают, что они равномерно распределены по диаметральной плоскости сечения стержня заклепки (рисунок 13.2 *в*). Форма диаметральной продольной плоскости сечения *1–2–3–4* (рисунок 13.2 *в*) представляет собой прямоугольник, площадь которого называют условной площадью смятия $A_{УСЛ}$ заклёпки.

$$A_{УСЛ} = S_{\min} \cdot d = S_2 \cdot d = 5 \cdot 11 = 55 \ мм^2.$$

Тогда из условия прочности на смятие

$$\sigma_{CM}^{\max} = \frac{P}{A_{УСЛ} \cdot n} \le [\sigma_{CM}]$$

получим: $n \ge \frac{P}{A_{УСЛ} \cdot [\sigma_{CM}]} = \frac{100 \cdot 10^3 (H)}{55(мм^2) \cdot 280(H/мм^2)} = 6{,}5 \approx 7$ *заклепок.*

Из двух расчетов на срез и смятие принимаем большее число заклепок. n = 7 заклепок.

По ГОСТ 8509-93 для уголка № 4,5 заклёпки можно располагать только в один ряд по оси соединяемых элементов на расстоянии a = 25 *мм* от угловой точки сечения.

4. Определение размеров поперечного сечения листа.

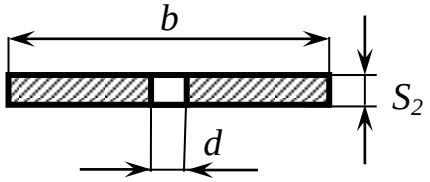


Рисунок 13.3

Поперечное сечение листа ослаблено одним отверстием под заклепку диаметром d = 11 мм (рисунок 13.3). Лист испытывает деформацию растяжения. Определим ширину b листа из условия прочности на растяжение

$$\sigma_P^{\max} = \frac{P}{A} \le [\sigma_P],$$

где A – действительная площадь поперечного сечения листа.

$$A = A_{ОБ} - A_{ОТ} = b \cdot S_2 - d \cdot S_2 \cdot m,$$

где $A_{ОБ}$ – общая площадь поперечного сечения листа;

$A_{ОТ}$ – площадь отверстия в поперечном сечении;

m – число рядов отверстий в поперечном сечении. В задаче m = 1 *шт.*

Из условия прочности данного соединения на разрыв

$$\sigma_p^{\max} = \frac{P}{b \cdot S_2 - d_0 \cdot S_2 \cdot m} \le [\sigma_P]$$

следует $b \ge \frac{P}{[\sigma_p] \cdot S_2} + d_0 \cdot m = \frac{100 \cdot 10^3 (H)}{160(H/мм^2) \cdot 5(мм)} + 11(мм) \cdot 1 = 136$ *мм.*

Расстояния t_1 от края листа до первой и от края пластины до последней заклепок, в направлении действующей силы, а также расстояние t между заклепками в ряду примем в соответствии с рекомендациями ГОСТ8509-93: $t_1 = 2d = 2 \cdot 11 = 22$ *мм*; $t = 3{,}5 \cdot 11 = 38{,}5 \approx 40$ *мм.* Выполним эскиз заклепочного соединения (рисунок 13.4).

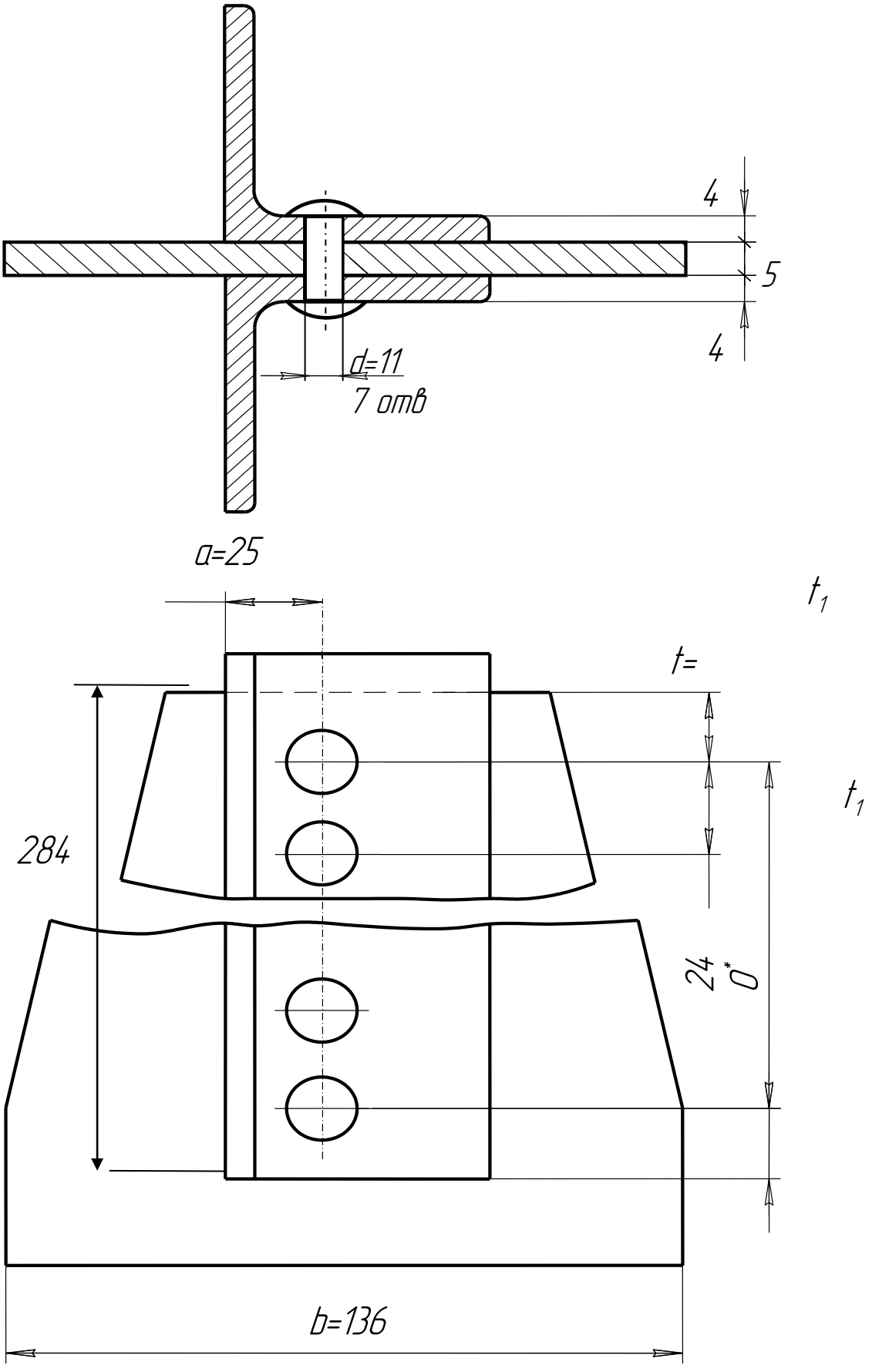


Рисунок 13.4 – Эскиз заклепочного соединения

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

<u>Задача</u> Для заклепочного соединения, представленного на рисунке 13.5, требуется:

1. Подобрать диаметр заклепки (для прокатных профилей по ГОСТ 24839-2012).
2. Определить число заклепок из условий прочности.
3. Определить размер накладки и выполнить эскиз соединения.

Таблица – Исходные данные к задаче

№ п/п	Толщина листа, мм. t	P, кН	Допускаемые напряжения, МПа		
			на разрыв $[\sigma]_р$,	на смятие $[\sigma]_{см}$	на срез $[\tau]_{ср}$
1	5	240	140	260	100
2	7	250	120	240	80
3	4	230	160	250	120
4	6	240	140	260	100
5	8	250	120	240	80
6	5	230	160	250	120
7	8	250	140	260	100
8	7	260	120	240	80
9	4	240	160	250	120
10	6	250	140	260	100

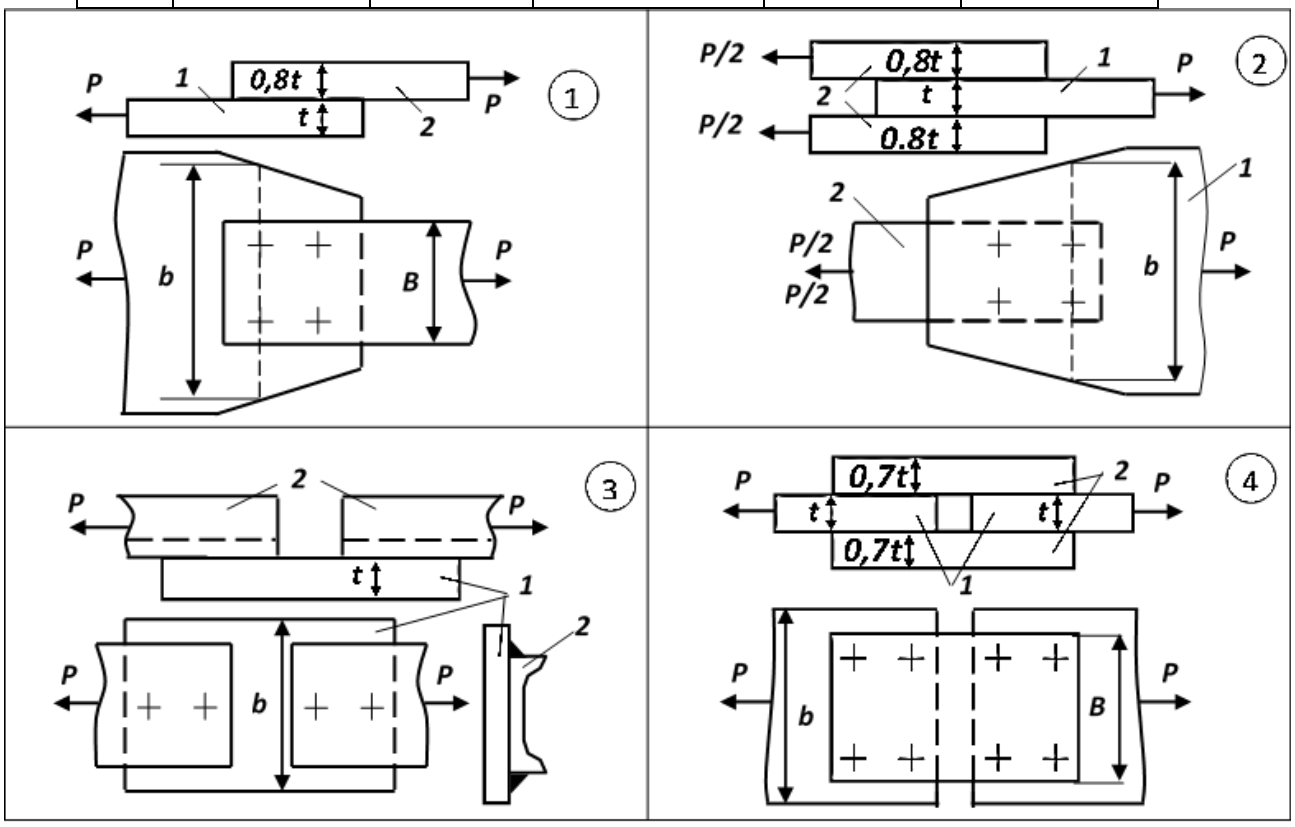


Рисунок 13.5 – Схемы заклепочных соединений

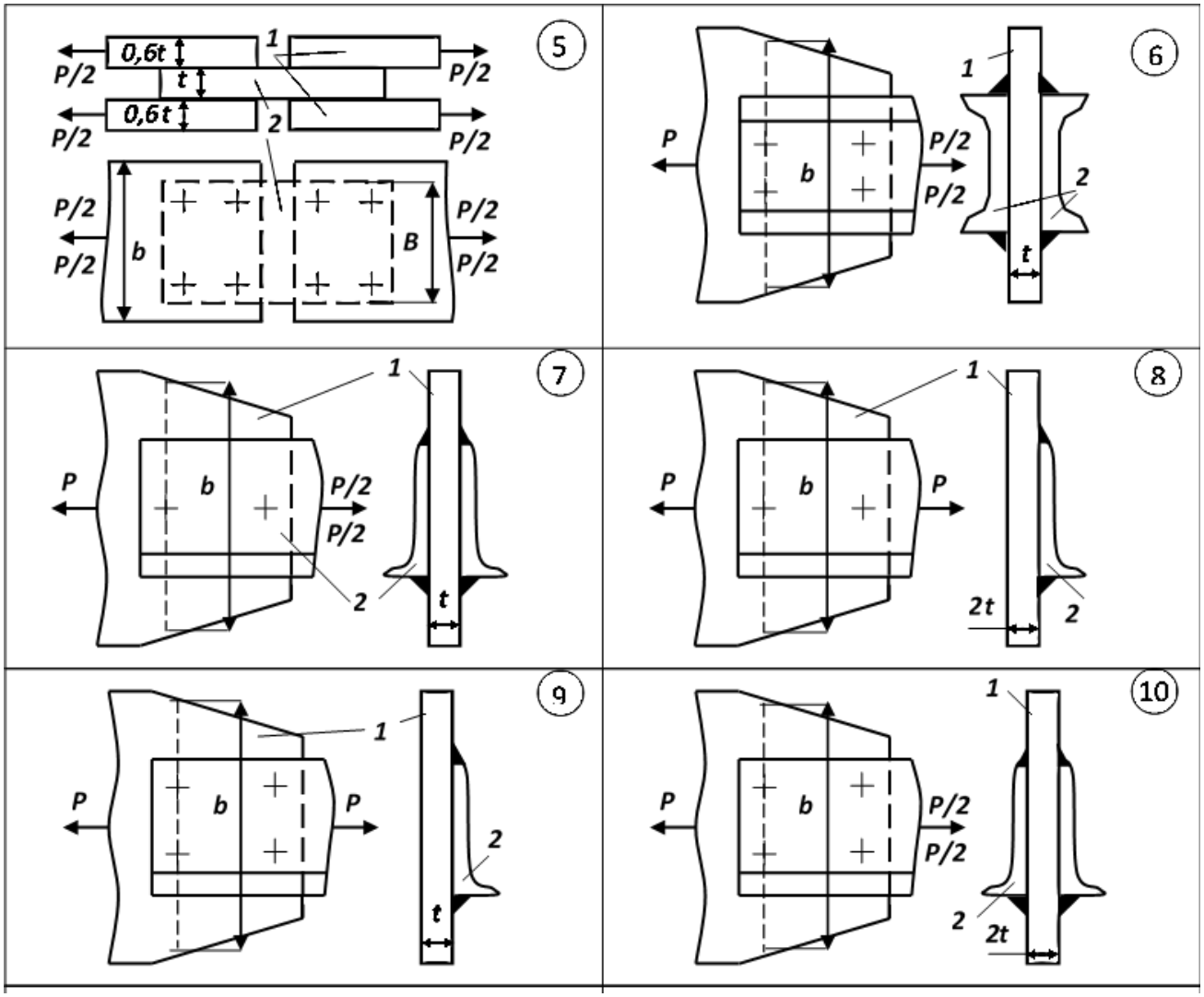


Рисунок 13.5 – Схемы заклепочных соединений

Практическое занятие 14

Тема: «Кручение. Внутренние силовые факторы при кручении. Построение эпюр крутящих моментов и углов поворота сечений»

Основные положения и расчетные формулы:

Кручение бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси.

Поперечные сечения поворачиваются на угол φ, называемый *углом закручивания* (угол поворота сечения). Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах (1 рад = $180^0/\pi = 57{,}3^0$).

При кручении в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{кр}$.

Крутящий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, действующих на отсеченную часть.

Крутящий момент считается положительным, если моменты внешних пар сил направлены по часовой стрелке. Обратное направление – отрицательное.

Касательное напряжение при кручении пропорционально расстоянию от точки до центра сечения

$$\tau_к = \frac{М_{кр} \cdot \rho}{I_p}$$

где $М_{кр}$ – крутящий момент, Н·мм;

I_p – полярный момент инерции сечения, мм^4;

ρ - расстоянию от точки до центра сечения, мм.

При определении максимального напряжения используют характеристику сечения: полярный момент сопротивления $\frac{I_p}{\rho_{max}} = W_p$.

Для круглого сечения $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3$.

Условие прочности при кручении

$$\tau_{кр}^{max} = \frac{М_{кр}}{W_p} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение при кручении.

Из условия прочности могут производиться следующие виды расчетов:

1) проектный расчет – определение размеров сечения вала в опасном сечении;
2) проверочный расчет – при заданных размерах вала проверяется условие прочности;
3) для заданного вала определяется максимальный крутящий момент.

Угол поворота сечения определяется по формуле

$$\varphi = \frac{М_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p}, рад,$$

где G – модуль упругости материала вала при кручении, МПа.

Условие жесткости при кручении имеет вид:

$$\varphi_0 = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_p} \leq [\varphi_0],$$

где $\varphi_0 = \frac{\varphi}{l}$ – относительный угол закручивания, рад/м, рад/мм.

Задача 14.1 К валу (рисунок 14.1 *а*) приложены вращающие моменты.

Требуется:

1) определить неизвестные внешние вращающие моменты;

2) определить внутренние крутящие моменты и построить их эпюру;

3) определить размеры поперечных сечений круглого сплошного и круглого кольцевого валов в опасных сечениях. Округлить полученные величины до стандартных значений;

4) вычислить площади поперечных сечений круглого сплошного и кольцевого валов. Провести их сравнительный анализ и дать заключение об экономичном сечении;

5) определить углы закручивания вала круглого сплошного сечения и построить их эпюру;

6) проверить жесткость вала круглого сплошного сечения и при необходимости подобрать его диаметр из условия жесткости.

Исходные данные для расчетов. К валу приложены внешние вращающие моменты M_1 = 5 *кН·м,* M_2 = 4 *кН·м,* M_3 = 6 *кН·м.* Длины участков: *а* = 1 *м*, *с* = 0,5 *м, е*=1,5 *м.* Для поперечного сечения кольцевого вала отношение внутреннего диаметра к внешнему $d_1/D = C$ = 0,8. Допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0{,}8$ *град/м*. Материал вала – сталь *Ст5*. Допускаемое касательное напряжение для стали *Ст5* $[\tau]$=120 *МПа*. Модуль упругости при кручении для стали *Ст5* $G = 8 \cdot 10^4$ *МПа.*

Решение.

1. Определение неизвестного внешнего вращающего момента M_4.

Неизвестный вращающий момент M_4 определим из условия статического равновесия вала:

$$\Sigma M_x = 0,\ M_4 - M_1 - M_2 - M_3 = 0, \Rightarrow M_4 = M_1 + M_2 + M_3 = 5 + 4 + 6 = 15\ кН \cdot м.$$

2. Определение внутренних крутящих моментов на участках вала.

Для определения внутренних крутящих моментов воспользуемся методом сечений. Рассечем вал сечением *1–1* в любом месте первого участка (рисунок 14.1 *а*). Отбросим одну из частей, например, левую (рисунок 14.1 *б*). Заменим действие отброшенной части на отсечённую внутренним крутящим моментом M_{KP1} (уравновесим оставленную часть). Направление его действия выбирается произвольно. Неизвестный крутящий момент вычислим из условия равновесия отсечённой части вала на первом участке в виде

$$\Sigma M_X = 0.\ -M_1 + M_{KP1} = 0.$$

Правилом знаков для моментов задаёмся произвольно. Положительными приняты моменты, действующие против часовой стрелки. Из уравнения имеем:

$$M_{KP1} = M_1 = 5\ кН \cdot м.$$

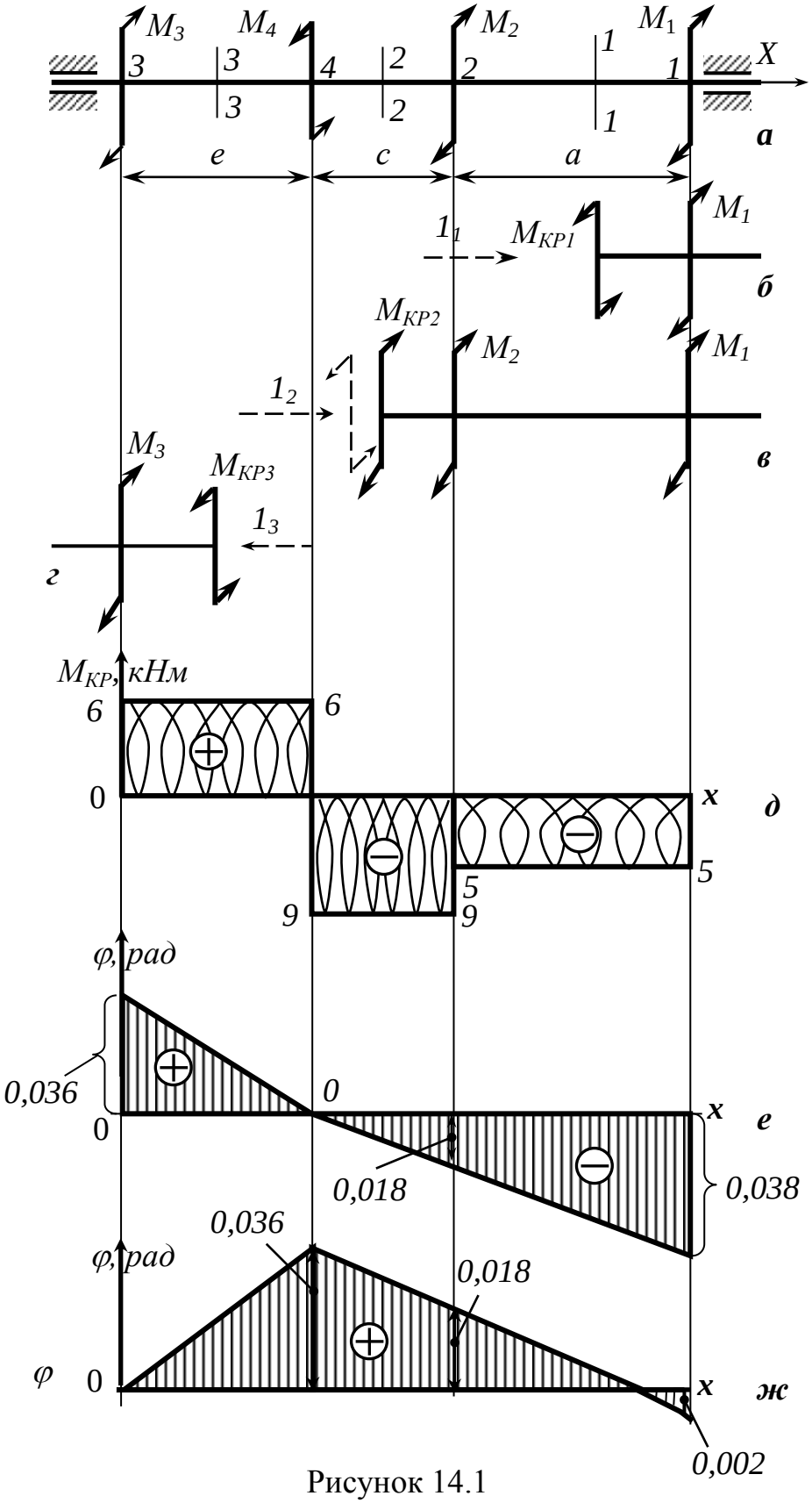


Рисунок 14.1

Получено положительное значение внутреннего крутящего момента M_{KP1}, следовательно, направление его действия выбрано правильно. Для определения его знака необходимо посмотреть со стороны сечения. На

рисунке 14.1 *б* направление взгляда показано пунктирным вектором 1_1. Момент M_{KP1} действует по часовой стрелке, следовательно, он отрицательный.

M_{KP1}= –5 *кН·м*.

Аналогичные действия выполним на втором участке. Рассечем вал сечением *2–2*. Отбросим левую часть. В соответствии с рисунком 14.1 *в* уравновесим отсечённую часть моментом M_{KP2}. Составим уравнение равновесия:

$\Sigma M_X=0.\ -M_1-M_2-M_{KP2}=0 \Rightarrow M_{KP2}=-M_1-M_2=-5-4=-9$ *кН·м*.

Направим момент M_{KP2} в противоположную (правильно) сторону, т.к. его значение получено знаком «-», для наглядности правильно направленный момент M_{KP2} показан пунктирной линией. Момент M_{KP2} направлен по часовой стрелке, если смотреть со стороны сечения (по стрелке 1_2). Следовательно, момент M_{KP2} отрицательный.

M_{KP2}= –9 *кН·м*.

Аналогичные действия выполним на третьем участке. Рассечем вал сечением 3–3. Для упрощения решения отбросим правую часть. Уравновесим левую часть моментом M_{KP3} (рисунок 14.1 *г*). Составим уравнение равновесия:

$\Sigma M_X=0.\ M_{KP3} - M_3 = 0$, откуда $M_{KP3} = M_3 = 6$ *кН·м*.

Направление M_3 выбрано правильно. Для определения его знака посмотрим со стороны сечения (по стрелке 1_3). Момент M_{KP3} действует против часовой стрелки, следовательно, он положительный:

M_{KP3}=6 *кН·м*.

По результатам расчетов построим эпюру внутренних крутящих моментов (рисунок 14.1 *д*). Для этого под расчётной схемой параллельно оси *X* проведем нулевую линию (*0–x*). Покажем ось внутренних крутящих моментов M_{KP} и единицы измерения *кНм*. В начале и конце первого участка в масштабе отложим вниз от нулевой линии численное значение крутящего момента M_{KP1}=-5 *кН·м*. Аналогично, отложим вниз величину M_{KP2}=-9 *кН·м* в начале и конце второго участка. Точки соединим.

На третьем участке крутящий момент положительный, поэтому его величину M_{KP3}= 6 *кН·м* отложим вверх в начале и конце участка. Полученные фигуры заштрихуем. Проверим правильность построения эпюры внутренних крутящих моментов M_{KP}.

На эпюре моментов в начале первого участка скачок в 5 *кН·м*, равный приложенному моменту в начале первого M_1=5 *кН·м* (рисунок 14.1 *д*). В начале второго участка скачок в 4 *кН·м*, соответствующий величине момента M_2= 4 *кН·м*. В начале третьего участка приложен момент M_4 = 15 *кН·м*, величина которого соответствует скачку в 15 *кН·м* на эпюре в том же сечении. В конце третьего участка приложен момент M_3= 6 *кН·м*. На эпюре скачок в 6 *кН·м*. Следовательно, эпюра крутящих моментов построена верно.

Анализ эпюры крутящих моментов M_{KP} показал, что любое сечение на втором участке равноопасно, так как в этих сечениях величина крутящего момента постоянна и максимальна $M_{max}=M_{KP2}= 9$ *кН·м*. Площадь поперечного сечения на втором участке не изменяется, следовательно, напряжения, действующие в этих сечениях, тоже максимальны.

3. Определение размеров поперечных сечений круглого сплошного и кольцевого в опасных сечениях.

Диаметр вала круглого сплошного и круглого кольцевого сечений определим из условия прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{W\rho} \le [\tau],$$

где τ_{max} – максимальное напряжение в опасном сечении;

M_{max} – максимальный крутящий момент в опасном сечении. $M_{max}= M_{KP2} = 9$ *кН м*;

$[\tau]$ – допускаемое напряжение при кручении;

W_ρ – полярный момент сопротивления сечения кручению.

Для круглого сплошного вала

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16},$$

а для круглого кольцевого вала

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot D^3}{16}(1-\alpha^4),$$

где d – диаметр вала круглого сплошного поперечного сечения;

D – внешний диаметр кольцевого сечения;

α – отношение внутреннего диаметра d_1 к внешнему диаметру D кольцевого сечения вала. По условию $d_1/D= \alpha= 0{,}8$.

Тогда для круглого сплошного сечения

$$\tau_{max} = \frac{16 \cdot M_{KP2}}{\pi \cdot d^3} \le [\tau].$$

Следовательно, $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{KP2}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9 \cdot 10^6 (Нмм)}{3{,}14 \cdot 120 (Н/мм^2)}} = 72{,}6$ *мм.*

По ГОСТ 2590-2006 округлим полученную величину до ближайшего бóльшего значения $d = 75$ *мм*.

Для круглого кольцевого сечения условие прочности имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{16 \cdot M_{KP2}}{\pi \cdot D^3 \cdot (1-\alpha^4)} \le [\tau].$$

Следовательно,

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{KP2}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9 \cdot 10^6 (Нмм)}{3{,}14 \cdot 120 (Н/мм^2) \cdot (1-0{,}8^4)}} = 86{,}5 \text{ мм.}$$

Округлим полученный диаметр до стандартного по ГОСТ 3262-75: D = 89 *мм*. Тогда $d_1=D\cdot 0{,}8$ = 89·0,8 = 71,9 *мм*. Принимаем d_1 = 71 *мм*.

Толщина стенки S = 9 *мм*. При принятых диаметрах отношение $d/D = \alpha = 71{:}89 = 0{,}797 \approx 0{,}8$.

4. Определение площадей подобранных поперечных сечений вала.

Формулы для вычисления площадей поперечных сечений возьмем из таблицы приложения 1.

Круглого сплошного вала:

$$A_{КР} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 75^2}{4} = 4416 \ мм^2.$$

Круглого кольцевого вала:

$$A_{КОЛ} = \frac{\pi \cdot D^2}{4}(1-\alpha^2) = \frac{3{,}14 \cdot 89^2}{4}(1-0{,}8^2) = 2238 \ мм^2.$$

Вычисления показывают, что $A_{КОЛ} < A_{КР}$, т.е. с целью облегчения валов и уменьшения металлоемкости конструкций, если нет ограничений по жесткости, рациональней использовать трубчатые валы.

5. Определение углов закручивания вала круглого сплошного сечения.

Деформация стержня при кручении характеризуется углом поворота сечений вкруг оси стержня. Такой угол называется углом закручивания и обозначается символом φ.

Определим угол закручивания вала сплошного поперечного сечения по формуле

$$\varphi = \frac{M_{КР} \cdot l}{G \cdot I_\rho},$$

где l – длина стержня или его участков;

G – модуль упругости при кручении;

I_ρ – полярный момент инерции.

Для сплошного круглого сечения

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Определить угол закручивания φ концевых сечений вала одноразовым решением невозможно, так как вал состоит из участков *a*, *c* и *e* разной длины, на которые действуют разные по величине крутящие моменты $M_{КР1}$, $M_{КР2}$ и $M_{КР3}$, соответственно.

Определим углы закручивания на каждом участке:

$$\varphi_1 = -\frac{32 \cdot M_{КР1} \cdot a}{G \cdot \pi \cdot d^4} = -\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^6 (Н/мм) \cdot 1 \cdot 10^3 (мм)}{8 \cdot 10^4 (Н/мм^2) \cdot 3{,}14 \cdot 75^4 (мм^4)} = -0{,}02 \ рад;$$

$$\varphi_2 = -\frac{32 \cdot M_{КР2} \cdot c}{G \cdot \pi \cdot d^4} = -\frac{32 \cdot 9 \cdot 10^6 (Н/мм) \cdot 0{,}5 \cdot 10^3 (мм)}{8 \cdot 10^4 (Н/мм^2) \cdot 3{,}14 \cdot 75^4 (мм^4)} = -0{,}018 \ рад;$$

$$\varphi_3 = \frac{32 \cdot M_{КР3} \cdot e}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 6 \cdot 10^6 (Н/мм) \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 (мм)}{8 \cdot 10^4 (Н/мм^2) \cdot 3{,}14 \cdot 75^4 (мм^4)} = 0{,}036 \ рад.$$

Условно принимаем в качестве неподвижного сечения вала сечение *4*. Тогда $\varphi_4 = 0$, а угол закручивания сечения *3* будет равен:

$$\varphi_3 = \varphi_4 + \varphi_3 = 0 + 0{,}036 = 0\ ,036\ рад.$$

Знаки углов закручивания принимаются аналогично знакам крутящих моментов.

Угол закручивания сечения *2* относительно сечения *4* равен:

$$\varphi_2 = \varphi_4 + \varphi_2 = 0 + (-0{,}018) = -0{,}018\ рад,$$

а φ_1 относительно сечения *4* равен:

$$\varphi_1 = \varphi_4 + \varphi_2 + \varphi_1 = 0 + (-0{,}018) + (0{,}02) = -0{,}038\ рад.$$

Построим эпюру углов закручивания. Для этого под эпюрой крутящих моментов проведем нулевую линию *0–0*, параллельную оси вала *X*, которую обозначим *x*. Покажем вертикальную ось углов закручивания φ. На нулевой линии в сечении *4* отложим $\varphi_4 = 0$ (так как сечение *4* условно неподвижное). В сечении *3*, в масштабе, отложим вверх (положительное значение) от нулевой линии $\varphi_3 = 0{,}036$ *рад*. Точки соединим. В сечении *2* отложим вниз (отрицательное значение) от нулевой линии $\varphi_2 = -0{,}018$ *рад*. Точки соединим. В сечении *1* отложим вниз от нулевой линии $\varphi_1 = -0{,}038$ *рад*. Точки соединим. Полученные фигуры заштрихуем. Построили эпюру углов закручивания φ (рисунок 14.1 *е*).

Если, например, принять неподвижным сечение *3*, то $\varphi_3 = 0$,

$$\varphi_4 = 0 + 0{,}036 = 0{,}036\ рад;\ \varphi_2 = 0 + 0{,}036 + (-0{,}018) = 0{,}018\ рад;$$

$$\varphi_1 = 0 + 0{,}036 + (-0{,}018) + (-0{,}02) = -0{,}002\ рад.$$

Отложим вычисленные значения углов в соответствующих им сечениях и получим эпюру углов закручивания φ другой конфигурации (рисунок 14.1 *ж*).

6. Проверка вала на жёсткость.

Для проверки жесткости вала определим относительные углы закручивания на участках:

$$\varphi^1 = \frac{\varphi \cdot 180^0}{\pi \cdot l},$$

где *l* – длина участков вала. В задаче *l* равно длинам *a, c* и *e* соответствующих участков. Тогда:

$$\varphi_1^1 = -\frac{\varphi_1 \cdot 180}{\pi \cdot a} = -\frac{0{,}02 \cdot 180^0}{3{,}14 \cdot 1} = -1{,}1\ град./м;$$

$$\varphi_2^1 = -\frac{\varphi_2 \cdot 180}{\pi \cdot c} = -\frac{0{,}018 \cdot 180^0}{3{,}14 \cdot 0{,}5} = -2{,}1\ град./м;$$

$$\varphi_3^1 = \frac{\varphi_3 \cdot 180}{\pi \cdot e} = \frac{0{,}036 \cdot 180^0}{3{,}14 \cdot 1{,}5} = 1{,}4\ град./м.$$

Сравним максимальный удельный угол закручивания (по абсолютной величине) с допускаемым углом закручивания:

$$\phi_{\max} = \phi_2^1 = 2{,}1 \geq [\phi] = 0{,}8 \frac{град}{м}.$$

Условие жесткости не выполняется.

Подберем диаметр поперечного сечения вала из условия жесткости наиболее нагруженного участка:

$$\phi_{\max} = \frac{M_{KP2}}{G \cdot I_\rho} \le [\phi].$$

Выразим полярный момент инерции через диаметр $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, а допускаемый угол закручивания $[\varphi]$ в радианах $[\varphi] = 0{,}8 \frac{град.}{м} = 0{,}8 \frac{\pi}{180} \cdot \frac{рад.}{м}$. Подставляя в условие жесткости, получаем

$$\phi_{\max} = \frac{32 \cdot M_{KP2} \cdot 180^0}{G \cdot \pi \cdot d^4} \le [\phi],$$

откуда следует:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{KP2}}{G \cdot \pi \cdot [\phi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{KP2} \cdot 180^0}{G \cdot \pi^2 \cdot 0{,}8}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 9 \cdot 10^6 (Н \cdot мм) \cdot 180^0}{8 \cdot 10^4 (Н / мм^2) \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} (рад. / мм)}} = 95{,}2\ мм.$$

По ГОСТ 2590-2006 принимаем ближайший диаметр d = 95 *мм*. Так как принятый диаметр вала d меньше его расчетной величины, то определим действительный угол закручивания в градусах:

$$\phi_{\max} = \frac{32 \cdot M_{KP2} \cdot 180^0}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 9 (кН \cdot м) \cdot 180^0}{8 \cdot 10^7 (кН / м^2) \cdot 3{,}14^2 \cdot (95 \cdot 10^{-3})^4 (м^4)} = 0{,}807 \frac{град}{м}.$$

Определим расхождение между действительным и допускаемым углами закручивания:

$$\Delta\phi = \frac{\phi_{max} - [\phi]}{[\phi]} \cdot 100\% = \frac{0{,}807 - 0{,}8}{0{,}8} \cdot 100\% = 0{,}9\%.$$

Расхождение не превышает допускаемых для техники пределов ±5%. Условие жесткости выполняется.

Проверять прочность вала диаметром d = 95 *мм* не требуется, так как она обеспечена уже при d = 75 *мм*. Окончательно принимаем диаметр сплошного круглого вала d = 95 *мм*.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 14.2 К валу постоянного поперечного сечения, изготовленному из Ст5 с допускаемым напряжением [τ]=120 *МПа*, приложены вращающие моменты, как показано на рисунке 14.2.

Требуется:

1. Определить (при необходимости) неизвестные вращающие моменты из условия равновесия вала.
2. Используя метод сечений определить крутящие моменты $М_{кр}$ в сечениях характерных участков вала. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить диаметр вала сплошного круглого сечения из условия прочности на кручение. Полученный результат округлить согласно ГОСТ 7417 – 75 или ГОСТ 2590 – 2006. Выдержки из ГОСТов приведены ниже.

4. Определить углы закручивания характерных участков круглого сплошного вала и построить эпюру углов поворота сечений.
5. Проверить жесткость вала.

Исходные данные взять из таблицы.

Таблица – Исходные данные к задаче 14.2

№ п/п	Длина участков вала, м			Вращающие моменты, кН·м			Допускаемый угол закручивания $[\varphi]$, $^{град}/_{м}$
	a	*b*	*c*	M_1	M_2	M_3	
1	0,45	0,21	0,73	5,0	4,0	6,0	0,7
2	0,62	0,75	0,41	5,1	4,3	5,8	0,4
3	0,38	0,7	0,21	5,3	4,5	5,6	0,6
4	0,28	0,67	0,14	5,8	4,2	5,7	0,5
5	0,31	0,72	0,37	5,2	4,1	6,2	0,6
6	0,31	0,37	0,25	5,6	4,6	5,4	0,8
7	0,32	0,5	0,3	5,4	4,7	6,1	0,7
8	0,27	0,37	0,52	5,7	4,4	5,9	0,4
9	0,35	0,24	0,41	5,9	4,8	5,5	0,5
10	0,42	0,28	0,31	5,6	4,9	6,3	0,6

Диаметр калиброванной круглой стали по ГОСТ 7417 – 75 (Выдержка).

3,0; 3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 4,0; 4,1; 4,2; 4,4; 4,5; 4,6; 4,8; 4,9; 5,0; 5,2; 5,3; 5,5; 5,6; 5,8; 6,0; 6,1; 6,3; 6,5; 6,7; 6,9; 7,0; 7,1; 7,3; 7,5; 7,7; 7,8; 8,0; 8,2; 8,5; 8,8; 9,0; 9,2; 9,3; 9,5; 9,8; 10,0; 10,5; 10,8; 11,0; 11,2; 11,5; 11,8; 12,0; 12,5; 12,8; 13,0; 13,5; 14,0; 14,2; 14,5; 14,8; 15,0; 15,2; 15,5; 15,8; 16,0; 16,2; 16,5; 16,8; 17,0; 17,2; 17,5; 17,6; 17,8; 18,0; 18,5; 19,0; 19,5; 20,0; 20,5; 21,0; 21,5; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; от 32 до 42 с интервалом 1мм; 44; 45; 46; 48; 49; 50; 52; 53; 55; 58; 60; 61; 62; 63; 65; 67; 69; 70; 71; 73; 75; 78; 80; 82; 85; 88; 90; 92; 95; 98; 100, мм

Прокат сортовой стальной горячекатаный круглый по ГОСТ2590-2006 (Выдержка) Номинальный диаметр *d*. мм: 5,0; 6,0; 6,3; 6,5; 7,0; 8,0; 9,0; 10,0; 11,0; 12,0; 13,0; 14,0; 15,0; 16,0; 17,0; 18,0; 19,0; 20,0; 21,0; 22,0; 24,0; 25,0; 26,0; 27,0; 28,0; 30; 31,0; 32,0; 33,0; 34,0; 36,0; 37,0; 38,0; 39,0; 40,0; 41,0; 42,0; 43,0; 44,0; 45,0; 46,0; 47,0; 48,0; 50,0; 52,0; 53; 54,0; 55,0; 56,0; 58,0; 60,0; 62,0; 63,0; 65,0; 67,0; 68,0; 70,0; 73,0; 73,0; 75,0; 78,0; 80,0; 82,0; 85; 87,0; 90; 92,0; 95,0; 100,0; 105,0; 110,0; 115,0; 120,0; 125,0; 130,0; 135,0; 140; 145,0; 150,0; 155,0; 160,0; 165,0; 170,0; 175,0; 180,0; 185,0; 190,0; 195,0; 200,0; 210,0; 220,0; 230,0; 240,0; 250,0; 260,0; 270,0

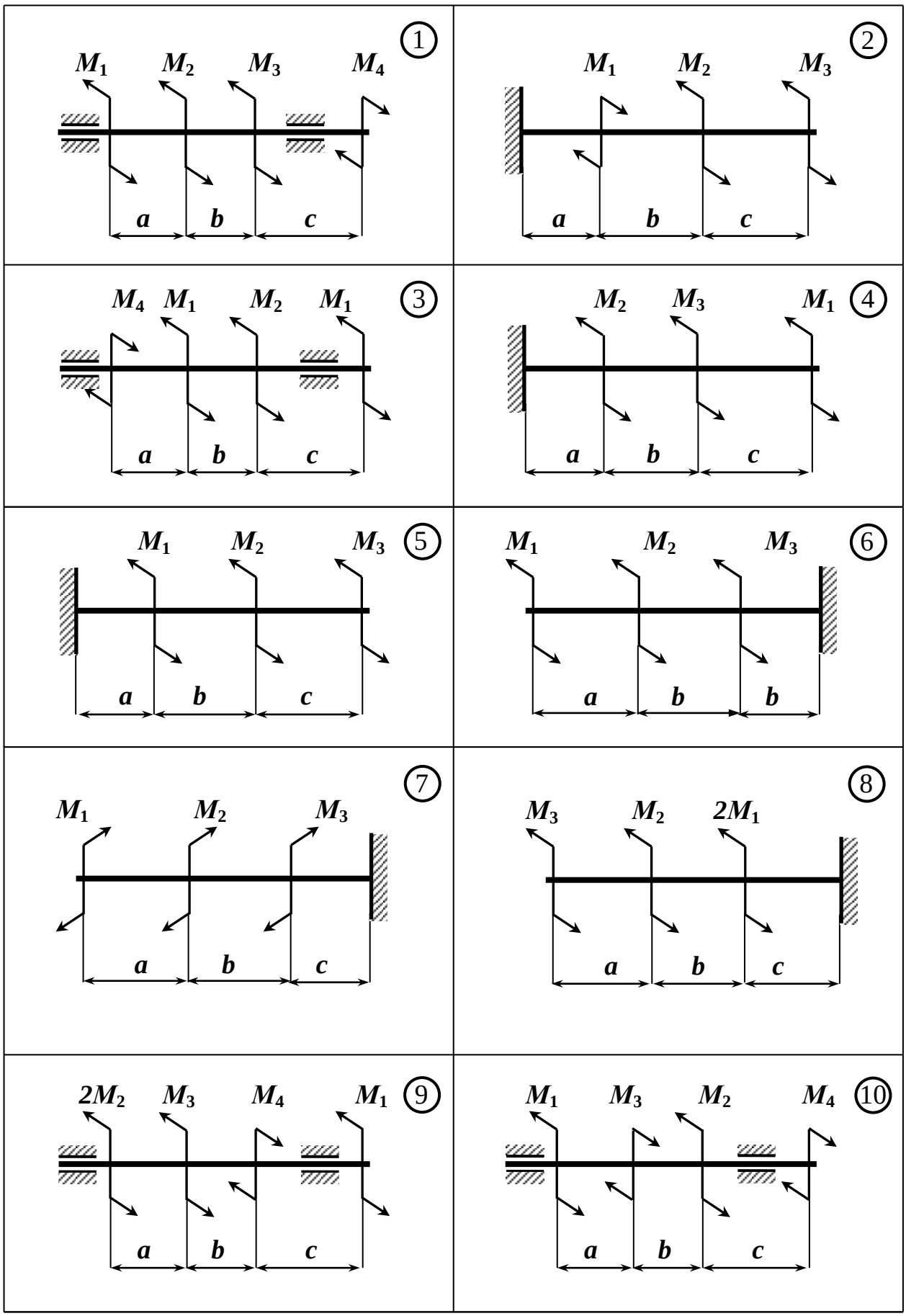


Рисунок 14.2 – Схемы к задаче 14.2

Практическое занятие 15

Тема: «Изгиб.
Внутренние силовые факторы при изгибе. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил»

Основные положения и расчетные формулы:

Брус, работающий на изгиб, называют балкой.

Плоскость, в которой расположены внешние силы и моменты, называют силовой плоскостью.

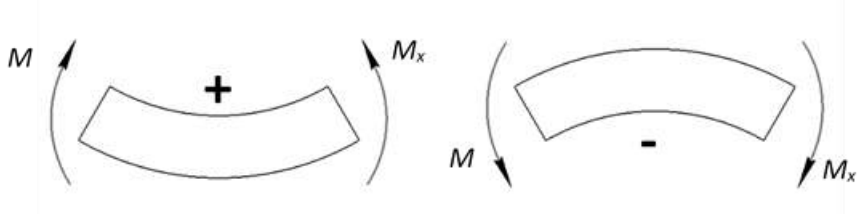
Плоскости, проходящие через главные центральные оси поперечного сечения называются главными плоскостями бруса.

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью бруса, изгиб называют прямым.

При прямом изгибе возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_x.

Изгибающий момент в сечении бруса равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных в отсеченной части относительно той точки продольной оси балки, через которую проходит рассматриваемое сечение (центр тяжести сечения).

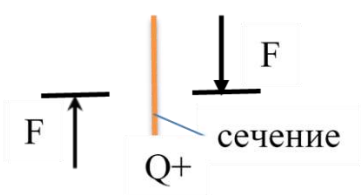
Если действующие на участке силы стремятся изогнуть балку выпуклостью вниз, то изгибающий момент считается положительным, если наоборот – отрицательным.



Одновременно в сечении бруса возникает сила, вызывающая сдвиг - поперечная сила.

При наличии нескольких внешних сил поперечная сила в сечении равна сумме проекций этих сил на сечение с соответствующими знаками.

Знак поперечной силы определяется по правилу: силы, расположенные слева от сечения и направленные снизу вверх или расположенные справа от сечения сверху вниз вызывают положительную поперечную силу. При противоположном расположении и направлении – отрицательную.



Задача 15.1 Стальная балка защемлена одним концом и нагружена внешними нагрузками (рисунок 15.1). Необходимо: построить эпюру поперечных сил Q_Z и эпюру изгибающих моментов M_Y.

Исходные данные для расчетов: сосредоточенная сила P = 30 *кН*, равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q = 10 *кН/м*, длины участков балки: a = 2 *м*, b = 1 *м*, c = 0,5 *м*.

Решение.

Определим поперечные силы Q_Z и изгибающие моменты M_Y в сечениях на каждом участке балки и построим их эпюры.

Выберем оси координат так, чтобы ось X совпадала с продольной осью балки, а две другие были перпендикулярны ей. Ось Z направим вверх, а Y – горизонтально. Балка имеет три участка. Для определения поперечных сил Q_Z и изгибающих моментов M_Y на участках воспользуемся методом сечения. Покажем возникающие в заделке реакции R, H, и M_P, которые определять не обязательно, так как сечения на участках будем проводить от свободного конца балки и будем рассматривать равновесие той части балки, на которую действуют известные нагрузки.

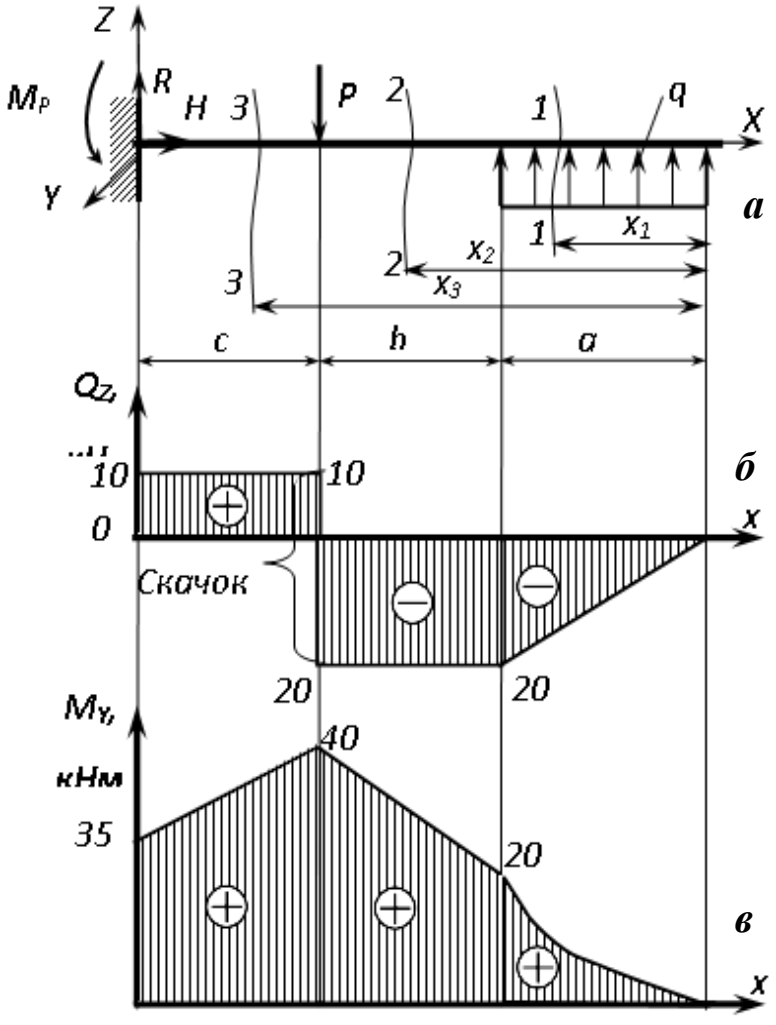


Рисунок 15.1

Рассечем балку на первом участке сечением *1–1* на расстоянии x_1 от свободного конца. Отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой части (рисунок 15.2). Обозначим границы участка, т.е. переменная x_1 может принимать значения от *0* до *a*.

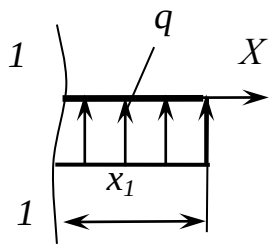


Рисунок 15.2

Сечение 1–1 $0 \le x_1 \le a$.

Пользуясь определением и правилом знаков для поперечной силы, составим уравнение, по которому меняется поперечная сила:

$Q_{Z1} = -q \cdot x_1$ – уравнение прямой линии.

Для построения прямой линии достаточно определить две ее точки на плоскости. Определим значение поперечной силы в начале участка при $x_1 = 0$ и в его конце при $x_1 = 2$ *м*.

При $x_1 = 0$, $Q_{Z1} = -10$ *(кН/м)*·0 = 0 *кН*.

При $x_1 = 2$ *м*, $Q_{Z1} = -10$ *(кН/м)*·2 *(м)* = -20 *кН*.

Пользуясь определением и правилом знаков, составим уравнение изгибающих моментов

$$M_{Y1} = q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = q \cdot \frac{x_1^2}{2}$$ – уравнение параболы.

Для построения параболы необходимы, как минимум, три точки. Определим значения изгибающих моментов на границах участка, т.е. в начале и в конце участка.

При $x_1 = 0$, $M_{Y1} = 10(кН/м) \cdot \frac{0^2}{2} = 0$.

При $x_1 = 2$ *м*, $M_{Y1} = 10(кН/м) \cdot \frac{2^2(м^2)}{2} = 20$ *кНм*.

Уравнение изгибающих моментов – парабола; определим, при каком значении x_1 изгибающий момент принимает экстремальное значение. Продифференцируем выражение изгибающего момента.

$$M'_{Y1} = (q \cdot \frac{x_1^2}{2})' = q \cdot x_1 = |Q_x|.$$

Учитывая, что первая производная от изгибающего момента численно равна поперечной силе, а в точке экстремума поперечная сила равна нулю, то, приравняв нулю уравнение поперечной силы на этом участке, найдем значение

$$Q_{Z1} = -q \cdot x_1 = 0.$$

Отсюда следует $x_1^{экстр.} = 0$. Следовательно, вершина параболы расположена в начале участка. В этой точке находится минимальное значение функции. На эпюре изгибающих моментов параболу проводим навстречу направлению распределенной нагрузки, т.е. выпуклостью вниз (рисунок 15.1 *в*).

На втором участке рассмотрим сечение *2–2*, расположенное на расстоянии x_2 от свободного конца балки (рисунок 15.1 *а*). Отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой части (рисунок 15.3). Обозначим границы участка.

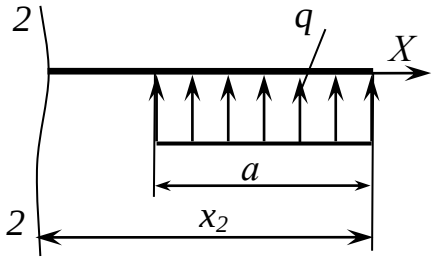


Рисунок 15.3

Сечение 2–2. $a \le x_2 \le (a+b)$.

Пользуясь определением и правилом знаков, составим уравнение поперечных сил:

$$Q_{Z2} = -q \cdot a.$$

На втором участка поперечная сила постоянна:

$$Q_{Z2} = -10\ (кН/м) \cdot 2\ (м) = -20\ кН - const.$$

Пользуясь определением и правилом знаков, составим уравнение изгибающих моментов:

$$M_{Y2} = q \cdot a \cdot (x_2 - \frac{a}{2}) - \text{уравнение прямой линии.}$$

Для построения эпюры изгибающих моментов достаточно определить изгибающие моменты в начале и в конце участка.

При $x_2 = 2\ м$, $M_{Y2} = 10(кН/м) \cdot 2(м) \cdot (2(м) - \frac{2(м)}{2}) = 20\ кНм$.

При $x_2 = 3\ м$, $M_{Y2} = 10(кН/м) \cdot 2(м) \cdot (3(м) - \frac{2(м)}{2}) = 40\ кНм$.

Рассечем балку на третьем участке сечением *3–3* на расстоянии x_3 от свободного конца (рисунок 15.1 *а*). Отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой части (рисунок 15.4). Обозначим границы участка.

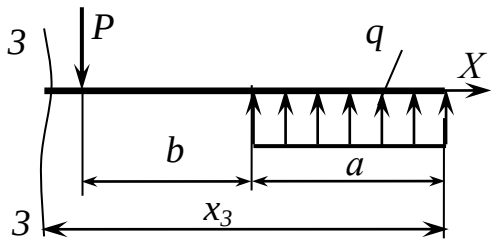


Рисунок 15.4

Сечение 3–3. $(a+b) \le x_3 \le (a+b+c)$.

Пользуясь определениями и правилами знаков, составим уравнения поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила: $Q_{Z3} = -q \cdot a + P$.

На всей длине третьего участка поперечная сила постоянна:

$$Q_{Z3} = -10\ (кН/м) \cdot 2\ (м) + 30\ (кН) = 10\ кН - const.$$

Изгибающий момент

$$M_{Y3} = q \cdot a \cdot (x_3 - \frac{a}{2}) - P \cdot (x_3 - (a+b)) - \text{уравнение прямой линии.}$$

Для построения эпюры изгибающих моментов достаточно определить моменты в начале и в конце третьего участка.

При $x_3 = 3\ м$

$$M_{Y3} = 10(кН/м) \cdot 2(м) \cdot (3(м) - \frac{2(м)}{2}) - 30(кН) \cdot (3(м) - (2(м) + 1(м))) = 40\ кНм.$$

При $x_3 = 3{,}5\ м$

$$M_{Y3} = 10(кН/м)2(м)(3,5(м) - \frac{2(м)}{2}) - 30(кН)(3,5(м) - (2(м) + 1(м)) = 35\ кНм.$$

По результатам расчетов построим эпюру поперечных сил Q_Z. Для этого под расчетной схемой (рисунок 15.1 *б*), параллельно оси *X,* проведем нулевую линию *0–0*, которую обозначим *x*. Покажем вертикальную ось – ось поперечных сил Q_Z. В начале первого участка отложим $Q_{Z1} = 0$. В конце первого участка отложим от нулевой линии вниз (отрицательная величина) $Q_{Z1} = -20$ *кН*. Полученные точки соединим прямой линией. В начале и в конце второго участка отложим вниз (отрицательная величина) $Q_{Z2} = -20$ *кН* и соединим полученные точки прямой линией. В начале и в конце третьего участка отложим вверх (положительная величина) $Q_{Z3} = 10$ *кН*. Точки соединим прямой линией. Полученную фигуру заштрихуем и поставим знаки сил на участках в поле эпюры.

Аналогично построим эпюру изгибающих моментов M_Y. Под расчетной схемой (рисунок 15.1 *в*) параллельно оси *X* проведем нулевую линию *0–0*, которую обозначим ***x***. Ось изгибающих моментов M_Y покажем вертикально. В начале и конце каждого участка от нулевой линии отложим соответствующие по величине и знаку значения изгибающих моментов. Полученные точки на первом участке соединим параболой выпуклостью вниз (навстречу действию распределенной нагрузки), а на втором и третьем участках – прямыми линиями. Построенную фигуру заштрихуем и поставим знаки в поле эпюры.

Проверим правильность построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

а) к балке приложена внешняя сосредоточенная сила $P = 30$ *кН*. На эпюре поперечных сил в плоскости приложения этой силы есть скачок (ступень) на величину этой силы;

б) на первом участке приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = const$. Поэтому эпюра поперечных сил Q_Z описывается наклонной прямой линией (первого порядка), а эпюра изгибающих моментов M_Y – квадратной параболой (линией второго порядка). Ее выпуклость направлена навстречу действию интенсивности распределенной нагрузки *q;*

в) в начале первого участка поперечная сила $Q_Z = 0$, поэтому при $x_1 = 0$ квадратная парабола изгибающего момента M_Y имеет перегиб (экстремум), то есть $M_Y = 0$;

г) на втором и третьем участках распределенная нагрузка не приложена ($q = 0$), поэтому эпюра поперечных сил на этих участках ограничена прямыми линиями, параллельными оси *X,* то есть значения поперечных сил Q_Z на каждом участке постоянны;

д) на втором участке поперечная сила Q_Z постоянна и отрицательна, а на третьем – постоянна, но положительна, поэтому изгибающие моменты: на втором участке возрастают, а на третьем – убывают, так как $dM_Y/dx = Q_Z$, то есть ограничены – наклонными прямыми линиями.

Следовательно, эпюры поперечных сил Q_Z и изгибающих моментов M_Y построены правильно.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 15.2 Для схем, представленных на рисунке 15.5 требуется: Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M.

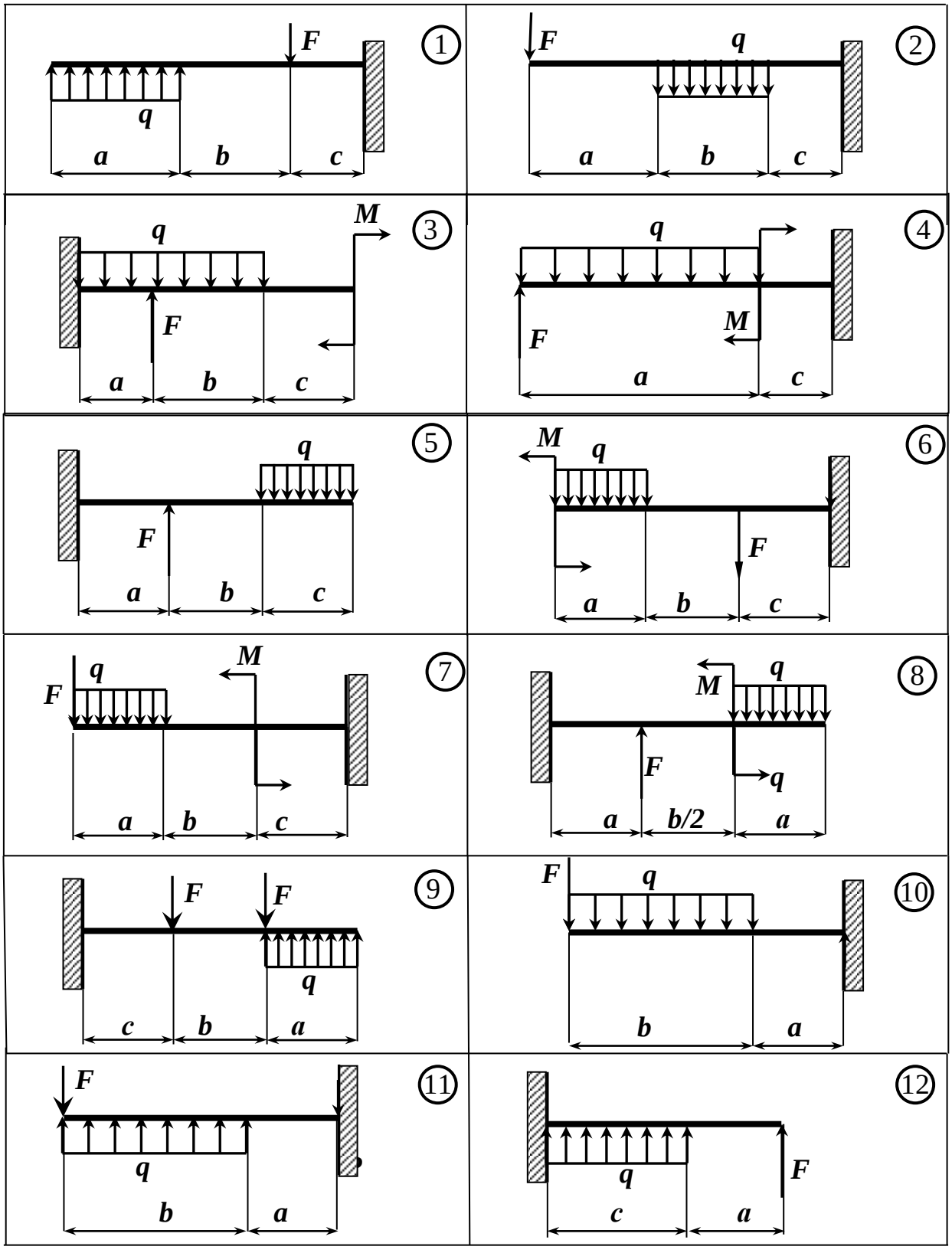


Рисунок 15.5 – Схемы к задаче 15.2

Таблица – Исходные данные к задаче 15.2

№ п/п	Длины участков, м			Нагрузка		
				P, кН	M, кН·м	q, кН/м
	a	b	c			
1	1,5	2,0	0,8	20	22	30
2	1,2	2,2	1,0	30	28	12
3	1,4	1,2	1,9	40	26	15
4	1,3	1,6	2,0	25	27	17
5	1,7	1,1	2,1	35	20	10
6	1,8	1,3	0,6	45	22	12
7	1,9	1,9	1,2	22	21	14
8	2,0	1,0	1,3	32	30	15
9	1,5	0,8	1,6	42	35	16
10	1,2	1,3	1,4	20	32	13

Практическое занятие 16

Тема: «Изгиб. Подбор сечений. Проверочные расчеты»

Основные положения и расчетные формулы:

Нормальное напряжение в опасном сечении балки, которое определяется как отношение максимального изгибающего момента к моменту сопротивления сечения изгибу, не должно превышать допускаемое.

Условие прочности при изгибе примет вид:

$$\sigma_{\text{и}}^{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_{\text{и}}].$$

Максимальный изгибающий момент определяют из эпюр изгибающих моментов или из расчетов (для простых схем нагружения).

Как правило, по этому неравенству проводят проверочные расчеты после конструирования балки.

В проектировочном расчете определяют потребные размеры поперечных сечений балки или ее материал.

Задача 16.1 Для балки (рисунок 15.1) подобрать поперечные сечения для следующих вариантов: а) сплошной круглой деревянной; б) сплошной прямоугольной деревянной; в) трубчатой стальной; г) двутавровой; д) составной из двух швеллеров.

Исходные данные для расчетов: нормальное допускаемое напряжение для дерева $[\sigma_д]$= 10 *МПа*, для стали $[\sigma_{ст}]$ = 120 *МПа;* соотношение сторон

прямоугольного сечения $h_C/b_C = \alpha = 2$; соотношение диаметров трубчатого сечения $d_1/D=c= 0{,}8$.

Решение.

Подберём размеры поперечного сечения балки заданных профилей.

Найдем опасное сечение. В рассматриваемом примере размеры поперечных сечений балки не меняются по длине, поэтому максимальные напряжения будут там, где возникает максимальный изгибающий момент. Анализируя построенные эпюры, можно сказать, что опасным будет сечение, где $M_Y^{\max} = 40\ кНм$.

Подбор сечений различного профиля выполним из условия прочности при изгибе по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_Y^{\max}}{W_{H.O.}} \le [\sigma].$$

а) *деревянная балка круглого сплошного поперечного сечения*

Из условия прочности определим осевой момент сопротивления относительно нейтральной оси (оси *Y*) для деревянных балок:

$$W_{H.O.} = W_Y \ge \frac{M_Y^{\max}}{[\sigma_o]} = \frac{40\cdot 10^6 (Нмм)}{10(Н/мм^2)} = 4\cdot 10^6\, мм^3.$$

Момент сопротивления сплошного круглого поперечного сечения балки определяется по формуле

$$W_Y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Следовательно, $d \ge \sqrt[3]{\frac{32\cdot W_Y}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 4\cdot 10^6 (мм^3)}{3{,}14}} = 344 мм$.

Принимаем $d = 345\ мм$.

Принятый диаметр $d = 345\ мм$, по сравнению с расчетным $d = 344\ мм$, увеличен на 1 *мм*. Эта величина очень мала по сравнению с расчетной величиной. Поэтому можно предположить, что действующие напряжения будут незначительно отклоняться от допускаемых напряжений, то есть проверку прочности проводить нет необходимости.

б) *стальная балка кольцевого поперечного сечения*

$$W_{H.O.} = W_Y \ge \frac{M_Y^{\max}}{[\sigma]} = \frac{40\cdot 10^6 (Нмм)}{120(Н/мм^2)} = 3{,}33\cdot 10^5\, мм^3 = 333\ см^3.$$

Осевой момент сопротивления круглого кольцевого поперечного сечения балки определяется по формуле

$$W_Y = \frac{\pi \cdot D^3}{32}(1-c^4).$$

Следовательно, $D = \sqrt[3]{\frac{32\cdot W_Y}{\pi\cdot(1-c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 3{,}33\cdot 10^5 (мм^3)}{3{,}14\cdot(1-0{,}8^4)}} = 179{,}1\ мм.$

По условию известно, что $d_1/D = 0{,}8$, тогда $d_1 = D\cdot 0{,}8 = 179{,}1\cdot 0{,}8 = 143{,}3\ мм$.

Принимаем трубу, стальную бесшовную горячедеформированную по ГОСТ 8732-78, у которой наружный диаметр D = 180 *мм*, а внутренний d_1 = 144 *мм*.

Диаметры принятой по ГОСТ трубы отличаются от расчетных. Поэтому проверим сечение на прочность. Для этого вычислим осевой момент сопротивления поперечного сечения принятой трубы:

$$W_Y = \frac{\pi \cdot D^3}{32}(1-(\frac{d_1}{D})^4) = \frac{3{,}14 \cdot 180^3 (мм^3)}{32}(1-(\frac{144(мм)}{180(мм)})^4) = 3{,}38 \cdot 10^5\, мм^3.$$

Полученное значение момента сопротивления незначительно отличается от значения, найденного из условия прочности. Проверку на прочность трубчатой балки проводить нецелесообразно.

в) *деревянная балка прямоугольного поперечного сечения*

Осевой момент сопротивления сплошного прямоугольного поперечного сечения балки определим по формуле

$$W_Y = \frac{b_C \cdot h_C^2}{6}\ .$$

В записанном выражении два неизвестных. Преобразуем его, выразив b_C через h_C. По условию известно, что h_C/b_C = 2, следовательно, h_C = 2·b_C. Тогда

$$W_Y = \frac{b_C \cdot (2 \cdot b_C)^2}{6} = \frac{2 \cdot b_C^3}{3}.$$

Из формулы следует, что

$$b_C \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_Y}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4 \cdot 10^6 (мм^3)}{2}} = 181{,}7\ мм.$$

Принимаем b_C = 185 *мм*.

Тогда h_C= 2·b_C = 2·185 = 370 *мм*.

Расчетная величина b_C отличается от принятой. Поэтому проверим прочность балки. Для этого вычислим осевой момент сопротивления балки при принятых значениях h_C *и* b_C*:*

$$W_Y = \frac{b_C \cdot h_C^2}{6} = \frac{185(мм) \cdot 370^2 (мм^2)}{6} = 4{,}2 \cdot 10^6\, мм^3.$$

Действующие напряжения будут равны:

$$\sigma = \frac{M_Y^{\max}}{W_Y} = \frac{40 \cdot 10^6 (Нмм)}{4{,}2 \cdot 10^6 (мм^3)} = 9{,}5\ МПа,$$

σ = 9,5 *МПа* < *[*σ*]* = 10 *МПа*. Расчетные напряжения не превышают допускаемых напряжений. Прочность балки гарантирована.

Вычислим расхождение между действующими и допускаемыми напряжениями:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{9{,}5(МПа) - 10(МПа)}{10(МПа)} \cdot 100\% = -5\%.$$

Расхождение не превышает допускаемой величины ±5%.

г) *стальная балка двутаврового поперечного сечения*

Подбор сечения двутавра производится по величине W_Y, который определён выше из условия прочности для стальных балок, $W_Y = 333\ см^3$.

По ГОСТ 8239-89 принимаем двутавр № 24*а*, который имеет наиболее близкое к расчетному значение $W_Y^T = 317\ см^3$. Вычислим напряжение, действующее в его поперечном сечении, и проверим прочность балки.

$$\sigma = \frac{M_Y^{\max}}{W_Y^T} = \frac{40 \cdot 10^6 (Нмм)}{0,317 \cdot 10^6 (мм^3)} = 126,2\ МПа,$$

σ = 126,2 *МПа* > *[σ]* = 120 *МПа*. Условие прочности не выполняется. Вычислим расхождение между действующим и допускаемым напряжениями:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{126,2(МПа) - 120(МПа)}{120(МПа)} \cdot 100\% = 5,2\%.$$

Отклонение превышает допускаемые (±5%) пределы. Прочность балки не гарантируется. Поэтому примем следующий двутавр № 27, осевой момент сопротивления его поперечного сечения $W_Y^T = 371\ см^3$. Вычислим напряжение, действующее в поперечном сечении такой балки, и проверим ее прочность:

$$\sigma = \frac{M_Y^{\max}}{W_Y^T} = \frac{40 \cdot 10^6 (Нмм)}{0,371 \cdot 10^6 (мм^3)} = 107,8\ МПа,$$

σ = 107,8 *МПа* < *[σ]* = 120 *МПа.* Условие прочности выполняется. Вычислим расхождение между действующим и допускаемым напряжениями:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{107,8(МПа) - 120(МПа)}{120(МПа)} \cdot 100\% = -10,2\%.$$

Отклонение значительно превышает допускаемый (±5%) предел. Двутавр, момент сопротивления которого будет более близким к расчетному, в сортаменте прокатных сталей нет. Поэтому окончательно принимаем двутавр № 27 с увеличенным запасом прочности.

д) *стальная балка поперечного сечения, состоящего из двух швеллеров*

Балки, поперечные сечения которых выполнены из швеллеров, выполняются в виде составных конструкций (рисунок 16.1). Для подбора сечения необходимо вычислить осевой момент сопротивления одного швеллера.

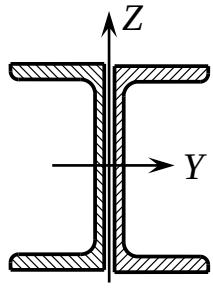


Рисунок 16.1

Для стальных балок осевой момент сопротивления сечения вычислен выше из условия прочности для стальных балок, $W_Y = 333\ см^3$.

Осевой момент сопротивления для одного швеллера составит:

$$W_y^{(1)} = \frac{W_y}{2} = \frac{333}{2} = 166,5\ см^3.$$

По ГОСТ 8240-97 значение момента сопротивления наиболее близкое к расчетному моменту оказывается у швеллера № 20*а* ($W_Y^T = 168\ см^3$). Вычислим расчетные напряжения и проверим прочность сечения балки:

$$\sigma = \frac{M_Y^{\max}}{2W_y^{(1)}} = \frac{40 \cdot 10^6 (Нмм)}{2 \cdot 0,168 \cdot 10^6 (мм^3)} = 119\ МПа,$$

σ= 119 *МПа* < *[σ]* = 120 *МПа*. Условие прочности выполняется. Расхождение между расчетными и допускаемыми напряжениями

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{119(МПа) - 120(МПа)}{120(МПа)} \cdot 100\% = 0{,}8\%.$$

Отклонение не превышает допускаемые пределы. Следовательно, для данной балки необходимо взять два швеллера № 20*а*.

Задачи для самостоятельного решения:

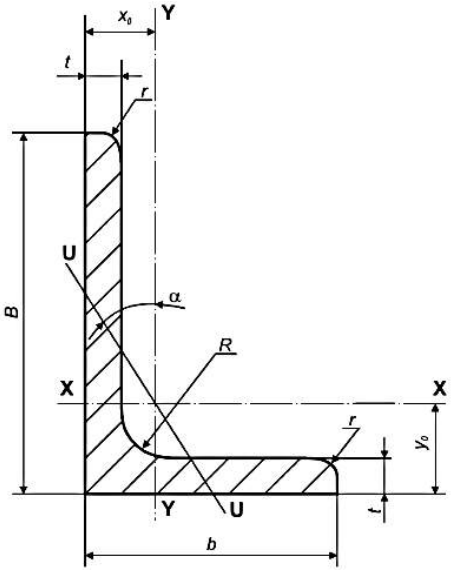
Задача 16.2 По результатам решения задачи 15.2 для балки определить положение опасного сечения и подобрать размеры поперечных сечений для следующих вариантов заданий: а) сплошной круглой деревянной; б) сплошной прямоугольной деревянной; в) трубчатой стальной; г) двутавровой; д) составной из двух швеллеров.

Таблица - Исходные данные к задаче 16.2

№ п/п	$h_C/b_C=\alpha$	$d_1/D=c$	Допускаемые напряжения (дерево), МПа	Допускаемые напряжения (сталь), МПа
			$[\sigma_д]$	$[\sigma_{ст}]$
1	1,5	0,8	10	120
2	1,7	0,5	10	110
3	1,6	0,9	10	130
4	1,5	0,4	12	140
5	1,7	0,3	12	160
6	1,8	0,7	12	120
7	1,9	0,6	11	110
8	2,0	0,2	11	130
9	1,5	0,8	11	140
10	1,6	0,7	8	150

ПРИЛОЖЕНИЯ

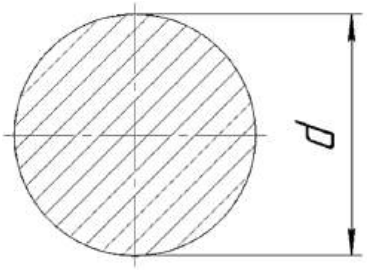
Приложение 1. *ГОСТ8510-86 Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент. (С сокращениями)*



Номер уголка	мм					Площадь поперечного сечения, см²	Справочные величины для осей									x_0, см	y_0, см	J_{xy}, см⁴
							$x-x$			$y-y$			$u-u$					
	B	b	t	R	r		J_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	J_{umin}, см⁴	W_u, см³	i_{umin}, см			
2,5/1,6	25	16	3			1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22
3/2*	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,0	0,43
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54
3,2/2	32	20	3			1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44
4/3*	40	30	4			2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,72	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74
			5			4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25
			5			4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41
			6			5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44
			8			7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27
6,5/5*	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77
			6			6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46
			7			7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94
			8			8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10
			7*			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80
8/5	80	50	5			6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20
			6			7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50
8/6*	80	60	6	8,0	2,7	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83

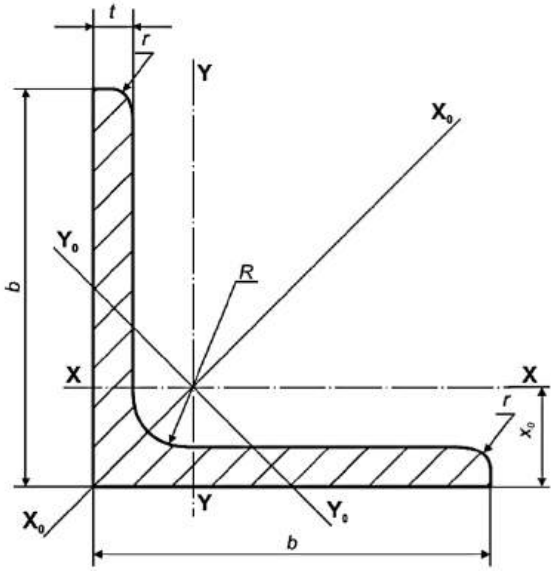
Номер уголка	мм					Площадь поперечного сечения, см²	Справочные величины для осей									x_0, см	y_0, см	J_{xy}, см⁴
							$x-x$			$y-y$			$u-u$					
	B	b	t	R	r		J_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	J_{umin}, см⁴	W_u, см³	i_{umin}, см			
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50
			10			15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60
10/6,5*	100	65	7			11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,00
			8			12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,64
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18
11/7	110	70	6,5			11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90
12,5/8	125	80	7	11,0	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70
			8			15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00
			12			23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00
18/11	180	110	10	14,0	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00
20/12,5	200	125	11			34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00

Приложение 2. *ГОСТ 2590-2006 Прокат сортовой стальной горячекатаный круглый. Сортамент. (С сокращениями)*



Номинальный диаметр d в мм :5,0; 5,5; 6,0; 6,3; 6,5; 7,0; 8,0; 9,0; 10,0; 11,0; 12,0; 13,0; 14,0; 15,0; 16,0; 17,0; 18,0; 19,0; 20,0; 21,0; 22,0; 23,0; 24,0; 25,0;26,0; 27,0; 28,0; 29,0; 30,0; 31,0; 32,0; 33,0; 34,0; 35,0; 36,0; 37,0; 38,0; 39,0; 40,0; 41,0; 42,0; 43,0; 44,0; 45,0; 46,0; 47,0; 48,0; 50,0; 52,0; 53,0; 54,0; 55,0; 56,0; 58,0; 60,0; 62,0; 63,0; 65,0; 67,0; 68,0; 70,0; 72,0; 73,0; 75,0; 78,0; 80,0; 82,0; 85,0; 87,0; 90,0; 92,0; 95,0; 97,0; 100,0; 105,0; 110,0; 115,0; 120,0;125,0; 130,0; 135,0; 140,0; 145,0; 150,0; 155,0; 160,0; 165,0; 170,0; 175,0; 180,0; 185,0; 190,0; 195,0; 200,0; 210,0; 220,0; 230,0; 240,0; 250,0; 260,0; 270,0.

Приложение 3. *ГОСТ 8509-93 Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент. (С сокращениями)*



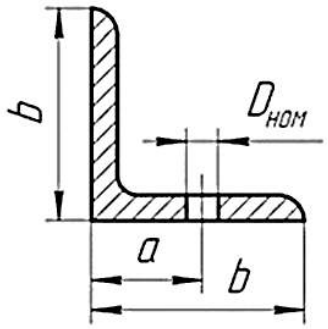
Номер уголка	b	t	R	r	F, см²	Справочные значения для осей									
	мм					x—x			x₀—x₀		y₀—y₀			I_{xy}, см⁴	x_0, см
						I_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	I_{x0} max, см⁴	i_{x0} max, см	I_{y0} min, см⁴	W_{y0} min, см³	i_{y0} min, см		
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89
3,2	32	3	4.5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89
		4	4.5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94
3,5	35	3	4.5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97
		4	4.5	1,5	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01
		5	4.5	1,5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05
4	40	3	5.0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09
		4	5.0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13
		5	5.0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17
4,5	45	3	5.0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21
		4	5.0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26
		5	5.0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30
5	50	3	5.5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33
		4	5.5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38
		5	5.5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42
		6	5.5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46
5,6	56	4	6.0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52
		5	6.0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57
6,3	63	4	7.0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69
		5	7.0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74
		6	7.0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78
7	70	4,5	8.0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88
		5	8.0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90
		6	8.0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94
		7	8.0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99
		8	8.0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02
7,5	75	5	9.0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02
		6	9.0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06
		7	9.0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10
		8	9.0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15
		9	9.0	3,0	12,53	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18

Номер уголка	b	t	R	r	F, см²	Справочные значения для осей									
	мм					x—x			x_0—x_0		y_0—y_0			I_{xy}, см⁴	x_0, см
						I_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	I_{x0} max, см⁴	i_{x0} max, см	I_{y0} min, см⁴	W_{y0} min, см³	i_{y0} min, см		
8	80	5,5	9.0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17
		6	9.0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19
		7	9.0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23
		8	9.0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27
9	90	6	10.0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43
		7	10.0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47
		8	10.0	3,3	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51
		9	10.0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55
10	100	6,5	12.0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68
		7	12.0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71
		8	12.0	4,0	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75
		10	12.0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83
		12	12.0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91
		14	12.0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99
		16	12.0	4,0	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06
11	110	7	12.0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96
		8	12.0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61
		16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76
		10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82
		12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55
		18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85
		12	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37
		13	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42
		14	18,0	6,0	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46
		16	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54
		20	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,37	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70
		25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89
		30	18,0	6,0	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91
		16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75
		18	24,0	8,0	87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	223,39	4,96	3089,00	6,83
		20	24,0	8,0	96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91
		22	24,0	8,0	106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,30	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00
		25	24,0	8,0	119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11
		28	24,0	8,0	133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23
		30	24,0	8,0	141,96	8176,82	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31
		35	24,0	8,0	163,71	9281,05	530,11	7,53	14682,73	9,47	3879,37	366,13	4,87	5401,68	7,53

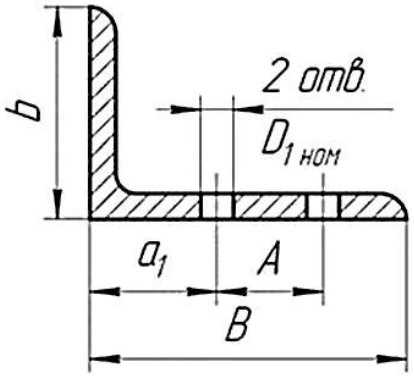
Приложение 4. *ГОСТ 14802-85 Заклепки (повышенной точности). Диаметры отверстий под заклепки (С сокращениями), мм.*
4,5; 5,5; 6,5; 9,0; 11,0; 13,0; 17,0;20,0; 21,5; 23,4; 26.

Приложение 5. *ГОСТ 24839-2012 Конструкции строительные стальные. Расположение отверстий в прокатных профилях (с сокращениями)*

Уголки равнополочные



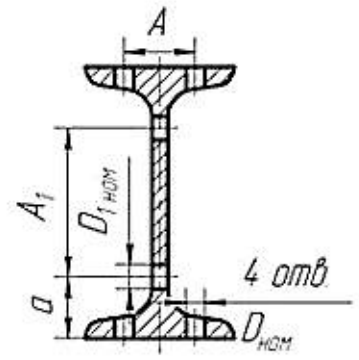
Уголки неравнополочные



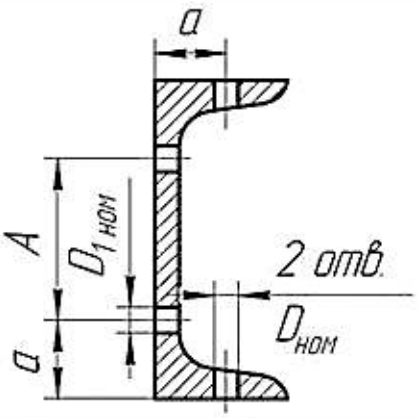
При установке заклепок в два ряда в цепном порядке для всех угловых профилей (кроме профилей с шириной полки 125 и 140 мм) размеры A, a_1 и D_1 можно принимать такими же, как при шахматном расположении.

При стыковании двух угловых профилей размеры a, a_1, A, D и D_1 определяют индивидуально в соответствии с требованиями на изготовление стальных конструкций.

b; B	Однорядное расположение отверстий		Двухрядное расположение отверстий					
			цепное			шахматное		
	a	$D_{ном}$	a_1	A	$D_{1ном}$	a_1	A	$D_{1ном}$
20	13	4,5	-	-	-	-	-	-
25	15	5,5	-	-	-	-	-	-
28	15	6,5	-	-	-	-	-	-
32	18	6,5	-	-	-	-	-	-
36	20	9,0	-	-	-	-	-	-
40	22	11,0	-	-	-	-	-	-
45	25	11,0	-	-	-	-	-	-
50	30	13,0	18	22	6,5	18	20	6,5
56	30	13,0	18	25	6,5	18	20	6,5
63	35	17,0	20	32	9,0	20	28	9,0
70	40	20,0	25	32	9,0	25	28	9,0
15	45	21,5	28	32	9,0	30	28	9,0
80	45	21,5	28	32	9,0	30	35	11,0
90	50	23,5	30	40	11,0	30	40	13
100	55	23,5	35	40	11,0	40	40	13
110	60	26	35	55	15,0	40	45	15,0
125	70	26	45	55	15,0	55	35	23,5
140	-	-	45	70	20,0	60	40	26
160	-	-	55	75	21,5	60	70	23,5
180	-	-	55	90	26,0	65	80	26,0



№ профиля	Полка		Стенка		
	A	$D_{ном}$	A_1 наиб.	a	$D_{1ном}$
10	32	9,0	40	30	9,0
12	36	9,0	48	36	13,0
14	45	11,0	60	40	13,0
16	45	13,0	80	40	13,0
18	50	13,0	80	50	17,0
20	55	17,0	100	50	17,0
22	60	20,0	100	60	21,5
24	60	20,0	120	60	21,5
27	70	21,5	150	60	21,5
30	75	23,5	170	65	23,5
33	80	23,5	200	65	23,5
36	80	23,5	220	70	23,5
40	80	23,5	260	70	23,5

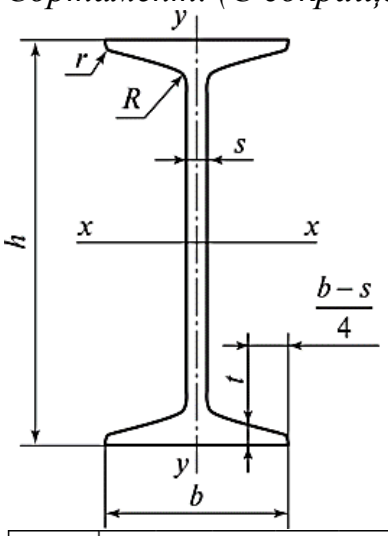


Допуски на размеры a, a_1, A, D и D_1 назначают индивидуально в зависимости от точности стальных конструкций к условий изготовления последних.

№ профиля	Полка		Стенка			№ профиля	Полка		Стенка		
	a	$D_{ном}$	A наиб.	a_1	$D_{1ном}$		a	$D_{ном}$	A наиб.	a_1	$D_{1ном}$
5	20	9,0	-	-	-	20	45	23,5	80	60	23,5
6,5	20	9,0	-	-	-	22	50	26,0	90	65	26,0
8	25	11,0	-	-	-	24	50	26,0	110	65	26,0
10	30	11,0	34	33	9,0*	27	60	26,0	130	70	26,0
12	30	17,0	44	38	13,0	30	60	26,0	160	70	26,0
14	35	17,0	56	42	15,0*	33	60	26,0	190	70	26,0
16	35	20,0	60	50	17,0*	36	70	26,0	210	75	26,0
18	40	20,0	70	55	20,0	40	70	26,0	250	75	26,0

* При применении заклепок наибольшие номинальные диаметры отверстий могут быть увеличены на 2 мм.

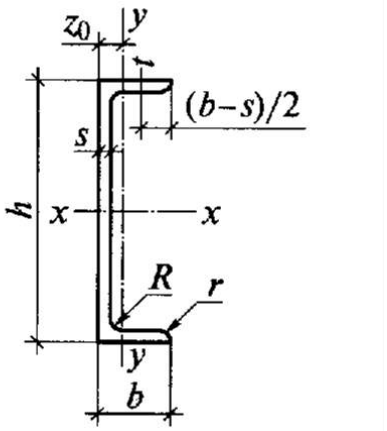
Приложение 6. *ГОСТ 8239-89 Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент. (С сокращениями)*



h — высота двутавра;
b — ширина полки;
s — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, см^2	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
									$X-X$				$Y-Y$		
	h	b	s	t	R	r			I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
					не более										
	мм														
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Приложение 7. *ГОСТ 8240-97 Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент (С сокращениями)*



Номер швеллера	Размеры, мм						Площадь сечения, см²	Масса 1 м, кг	Справочная величина для осей							z_0, см
									x—x				y—y			
	h	b	s	t	R	r			I_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	S_x, см³	I_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	
Швеллеры с уклоном внутренних граней полок																
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
18	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
20	200	76	5,2	9	9,5	4	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	10,5	4	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	11	4,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	12	5	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
40	400	115	8	13,5	15	6	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Литература

1. Серёгин, А.А. Техническая механика: учебное пособие / А.А. Сёрегин, И.В. Исупова, В.П. Забродин. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2020. – 232 с.

2. Бутенко А.Ф. Техническая механика: методические указания для выполнения самостоятельных и расчетно-графических работ / А.Ф. Бутенко, А.Б. Портаков, И.В. Исупова. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2023. – 96 с.

3. Портаков, А.Б. Техническая механика: методические указания к выполнению расчётно-графической работы. [Электронный ресурс]: практикум / А.Б. Портаков, М.В. Суханова. – Электрон. дан. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2017. – 70 с. Режим доступа: Локальная сеть Библиотеки Азово-Черноморского инженерного института ФГБОУ ВО Донской ГАУ.

4. Забродин В.П. Сопротивление материалов. В примерах и задачах: учебное пособие. Ч. 1. Простые виды деформаций / В.П. Забродин, А.А. Серёгин, А.Ф. Бутенко, М.В. Суханова. – Зерноград: ФГОУ ВПО АЧГАА, 2013. – 198 с.

5. Олофинская, В.П. Техническая механика. Курс лекций с примерами практических и тестовых заданий: учебное пособие / В.П. Олофинская. – 3-е изд., испр. – М.: ФОРУМ, 2012. – 357 с.: ил. – (Профессиональное образование).

6. Эрдеди, А.А. Техническая механика: Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебник для машиностр. спец. техникумов / А.А. Эрдеди, Ю.А. Медведев, Н.А. Эрдеди. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1991. – 304 с.

7. Иванова, В.С. Статика. Примеры решения задач по теоретической механике: методические указания / В.С. Иванова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 25 с.
http://elib.osu.ru/bitstream/123456789/13657/1/Иванова1.pdf

8. Бойко, Л.А. Статика. Плоская система сходящихся сил : учебно-методическое пособие : для студентов, обучающихся по инженерным специальностям вузов /Л.А. Бойко, Л.С. Ксендзенко. – Владивосток : Издательство Дальневосточного федерального университета, 2020. – [53 с.]. – ISBN 987-5-7444-4803-5. – URL:
https://www.dvfu.ru/science/publishing-activities/catalogue-of-books-fefu/. – Дата публикации: 16.04.2020. – Текст. Изображения : электронные.

9. Межгосударственный стандарт ГОСТ 8509-93. Уголки стальные горячекатанные равнополочные. Сортамент.

10. Межгосударственный стандарт ГОСТ 2590-2006. Прокат сортовой стальной горячекатаный круглый. Сортамент.

11. Межгосударственный стандарт ГОСТ 3262-75. Трубы стальные водогазопроводные. Технические условия.

12. Государственный стандарт Союза ССР ГОСТ 8732-78. Трубы стальные бесшовные горячедеформированные. Сортамент.

13. Государственный стандарт Союза ССР ГОСТ 8239-89. Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент.

14. Межгосударственный стандарт ГОСТ 8240-97. Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент.

15. Межгосударственный стандарт ГОСТ 10299-80 Группа Г34. Заклепки с полукруглой головкой классов точности В и С.

Интернет-ресурсы и электронно-библиотечные системы

www.teoretmeh.ru – Теоретическая механика для всех форм обучения.

www.isopromat.ru – Краткая теория, лекции, примеры решения задач и расчетно-графических работ по теоретической механике.

www.sopromato.ru – Лекции, примеры задач, книги, справочники по сопротивлению материалов.

Учебное издание

Исупова Ирина Владимировна канд. техн. наук, доцент, преподаватель первой категории ДТТК
Портаков Александр Борисович канд. техн. наук, доцент, преподаватель первой категории ДТТК

Практикум по технической механике.

Часть 1

Учебное пособие

Редакция авторская

Объѐм ЭИ: 5,38 Мб.
Формат ЭИ: Portable Document Format (PDF).
© Азово-Черноморский инженерный институт
ФГБОУ ВО Донской ГАУ
347740, г. ЗЕРНОГРАД Ростовской области, ул. Ленина,21.