МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Кафедра высшей математики и механики

Н.А. Коптева, Н.М. Удинцова

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Часть 3:
Теория игр и принятие решений в условиях риска и неопределенности. Теория массового обслуживания

Практикум

Зерноград – 2019

УДК 51

Печатается по решению методической комиссии
по направлениям подготовки
13.03.02 и 13.04.02 – *«Электроэнергетика и электротехника»*
Азово-Черноморского инженерного института – филиала
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный аграрный университет»
в г. Зернограде

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика и механика»
Середина М.Н.,
канд. техн. наук, доцент кафедры «Теплоэнергетика
и информационно-управляющие системы» ***Руденко Н.Б.***

Коптева, Н.А. Дополнительные главы математики. Часть 3: Теория игр и принятие решений в условиях риска и неопределенности. Теория массового обслуживания: практикум / Н.А. Коптева, Н.М. Удинцова. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2019. – 100 с.

Практикум составлен в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника».

Практикум содержит теоретические сведения и методические указания к выполнению практических работ по темам: теория игр и принятие решений в условиях риска и неопределенности, теория массового обслуживания, а также контрольные вопросы по изучаемым разделам и задания для самостоятельного выполнения.

Практикум предназначен для студентов-магистрантов, обучающихся по направлению подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника».

Рассмотрено и одобрено на заседании
кафедры «Высшая математика и механика».
Протокол № 9 от 27 мая 2019 г.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией по направлениям
подготовки 13.03.02 и 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника».
Протокол № 7 от 28 мая 2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Материал, изложенный в данном практикуме, соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования дисциплины «Дополнительные главы математики (в том числе оптимизация)», изучаемой студентами-магистрантами, обучающимися по направлению подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника».

Практикум содержит теоретические сведения и методические указания к выполнению практических работ по темам: теория игр и принятие решений в условиях риска и неопределенности, теория массового обслуживания, а так же контрольные вопросы по изучаемым разделам, помогающие усвоить и закрепить изучаемый материал и задания для самостоятельного выполнения.

Данный практикум может быть полезен как преподавателям при проведении занятий со студентами, обучающимися по указанному направлению, так и студентам для самостоятельного изучения соответствующего материала и является базой для подготовки к зачету.

Практикум способствует формированию у студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника»:

− знаний основ системного подхода при моделировании и прогнозировании исследуемых процессов (ОК-3); способов оценки тесноты связи между объектом и моделью (ОПК-2); методов корреляционного анализа, линейного программирования, теории игр, теории массового обслуживания при решении практических (ПК-1);

− умений применять системный подход при моделировании и прогнозировании исследуемых процессов (ОК-3); применять способы оценки тесноты связи между объектом и моделью (ОПК-2); применять методы корреляционного анализа, линейного программирования, теории игр, теории массового обслуживания при решении практических задач (ПК-1);

− владений навыками системного подхода при моделировании и прогнозировании исследуемых процессов (ОК-3); навыками применения способов оценки тесноты связи между объектом и моделью (ОПК-2); навыками применения методов корреляционного анализа, линейного программирования, теории игр, теории массового обслуживания при решении практических задач (ПК-1).

Изучение теории игр и принятия решений в условиях риска и неопределенности, теории массового обслуживания позволит обучающимся приобрести необходимые навыки, требуемые для дальнейшего обучения; развить способность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала; способность применять современные методы исследования в соответствии с поставленной задачей, анализировать, оценивать и представлять результаты выполненной работы и обосновывать полученные выводы, а также способность планировать и ставить задачи исследования, выбирать методы экспериментальной работы, интерпретировать и представлять результаты научных исследований.

Всё это понадобится для успешной работы и ориентации в будущей профессиональной деятельности.

Данный практикум является продолжением ранее изданных этими же авторами работ «Дополнительные главы математики. Часть 1: Корреляционно-регрессионный анализ в научных исследованиях» и «Дополнительные главы математики. Часть 2: Линейное программирование».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория игр и принятие решений в условиях риска и неопределенности

Классическими задачами системного анализа являются игровые задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности.

Часть условий при разработке решения всегда неопределенна, поэтому практически все решения принимаются в условиях некоторой неопределенности. Но картина становится принципиально иной тогда, когда неопределенно большинство важнейших исходных данных.

«Неопределенными могут быть как условия выполнения операции, так и сознательные действия противников или других лиц, от которых зависит успех операции. Кроме того, неопределенность в той или другой степени может относиться также к целям (задачам) операции, успех которой не всегда может быть исчерпывающим образом охарактеризован одним единственным числом – показателем эффективности.

Разумеется, когда речь идет о неопределенности в каком-то смысле ситуации, то рекомендации, вытекающие из научного исследования, не могут быть столь же четкими и однозначными, как в случаях полной определенности. Однако и при отсутствии полной определенности количественный анализ ситуации все же может принести пользу и помочь при выборе решения. Разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях неопределенности. В некоторых наиболее простых случаях эти методы дают возможность фактически найти и выбрать оптимальное решение.

В более сложных случаях эти методы доставляют вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сложной ситуации и оценить каждое из возможных решений с различных (иногда противоречивых) точек зрения, взвесить его преимущества и недостатки и, в конечном счете, принять решение, если не единственно правильное, то, по крайней мере, до конца продуманное.

Необходимо учитывать, что при выборе решения в условиях неопределенности всегда неизбежен элемент произвола, а значит, и риска. Недостаточность информации всегда опасна, и за нее приходится платить. Однако в условиях сложной ситуации всегда полезно представить варианты решения и их возможные последствия в такой форме, чтобы сделать произвол выбора менее грубым, а риск минимальным».

Как отмечалось, риск может быть снижен применением специальных приемов при разработке и принятии решений.

Задачами о принятии решений в условиях неопределенности занимается *теория игр*.

Методы теории игр позволяют планировать экономические процессы, оптимально распределять ресурсы, выбирать наилучшие варианты при принятии решений, решать другие задачи оптимизации.

Теория игр представляет собой часть обширной теории, изучающей процессы принятия оптимальных решений. Она дает формальный язык для описания процессов принятия сознательных, целенаправленных решений с участием одного или нескольких лиц в условиях неопределенности и конфликта, вызываемого столкновением интересов конфликтующих сторон.

Теория игр, раздел математики, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. При этом под конфликтом понимается явление, в котором участвуют различные стороны, наделённые различными интересами и возможностями выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами. Отдельные математические вопросы, касающиеся конфликтов, рассматривались (начиная с 17 в.) многими учёными. Систематическая же математическая теория игр была детально разработана американскими учёными Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (1944) как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики. В ходе своего развития теория игр переросла эти рамки и превратилась в общую математическую теорию конфликтов. В рамках теории игр в принципе поддаются математическому описанию военные и правовые конфликты, спортивные состязания, «салонные» игры, а также явления, связанные с биологической борьбой за существование.

В условиях конфликта стремление противника скрыть свои предстоящие действия порождает неопределённость. Наоборот, неопределённость при принятии решений (например, на основе недостаточных данных) можно интерпретировать как конфликт принимающего решения субъекта с природой. Поэтому теория игр рассматривается также как теория принятия оптимальных решений в условиях неопределённости. Она позволяет математизировать некоторые важные аспекты принятия решений в технике, сельском хозяйстве, медицине и социологии. Перспективен подход с позиций теории игр к проблемам управления, планирования и прогнозирования.

Целью теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников в конфликтных ситуациях, то есть определение оптимальной стратегии каждого из них.

Первые работы по теории игр относятся к началу XX века. Но только появление и широкое распространение ЭВМ привлекло к теории игр внимание широкого круга специалистов.

Практическое значение теории игр состоит в том, что она служит основой моделирования игровых экспериментов, в частности, деловых игр, позволяющих определять оптимальное поведение в сложных ситуациях.

Примеры практического содержания призваны, скорее всего, содержательно интерпретировать математические положения теории игр, чем указывать на фактические или возможные их приложения. От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным правилам. Реальные конфликты обычно трудно поддаются формальному описанию, поэтому любая игра является упрощением исходной задачи, в ней отражаются лишь основные, первостепенные факторы, отражающие суть процесса или явления.

В зависимости от того, какими данными располагает исследователь, и какую задачу перед собой ставит, могут быть сформулированы различные теоретико-игровые модели.

Различают три основных типа задач:

1. ***Нахождение оптимального исхода.*** В качестве исхода в общем случае может рассматриваться социально-экономическая ситуация. В зависимости от содержания задачи ситуацию можно описать наборами благ, получаемых каждым игроком (выигрышами), или исходом может быть избрание того или иного кандидата, принятие того или иного проекта, договора и так далее. При этом в общем случае надо найти коалиционную структуру и коалиционные стратегии, при которых оптимальный исход реализуется.

2. ***Нахождение оптимального исхода при фиксированной коалиционной структуре***, то есть когда нам заведомо известно, что, например, образование коалиций, запрещено, невозможно или имеющаяся коалиционная структура не должна меняться по каким-либо политическим или экономическим соображениям. В этом случае общей задачей является нахождение правил принятия решений в коалициях (порядок вознаграждения ее членов), при которых данная коалиционная структура не распадется, и, значит, система будет функционировать согласно интересам и возможностям ее участников.

3. ***Нахождение устойчивой коалиционной структуры при заданных правилах принятия решений*** (конституции, нормативных актах, уставе предприятия и др.) в коалициях. Такие задачи часто встречаются при решении экономических и социальных проблем.

Формализованные модели конфликтов известны с давних пор: это игры в буквальном смысле слова - шахматы, карты, кости и тому подобное. Эти игры носят характер соревнования, протекающего по известным правилам. Терминология, заимствованная из практики таких игр, применима и для других конфликтных ситуаций, которые рассматривает теория игр.

Компоненты и классификация моделей массового обслуживания

Системы массового обслуживания – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его обслуживанию.

После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

1) посты технического обслуживания автомобилей;

2) посты ремонта автомобилей;

3) персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;

4) станции технического обслуживания автомобилей;

5) аудиторские фирмы;

6) отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;

7) телефонные станции и так далее.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

– входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;

– дисциплина очереди;

– механизм обслуживания.

Входной поток требований. Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

Дисциплина очереди – это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

– первым пришел – первый обслуживаешься;

– пришел последним – обслуживаешься первым;

– случайный отбор заявок;

– отбор заявок по критерию приоритетности;

– ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы.

В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечении некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимнымрасположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и тому подобное). Прежде всего следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование, то есть в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования.

В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Контрольные вопросы

1. Какими вопросами и задачами занимается теория игр?
2. Какова цель теории игр?
3. Приведите основные типы задач теории игр.
4. Что такое системы массового обслуживания?
5. Приведите примеры систем массового обслуживания.
6. Что является основными компонентами системы массового обслуживания?
7. Охарактеризуйте понятие «входной поток требований».
8. Охарактеризуйте понятие «дисциплина очереди».
9. Охарактеризуйте понятие «механизм обслуживания».
10. Что является предметом теории массового обслуживания?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 14, 15

Тема: Теория игр и принятие решений в условиях риска и неопределенности.

Цель работы: Познакомиться с основными понятиями теории игр. Выработать навыки рационального поведения в ходе конфликтной ситуации путем решения матричных игр. Изучить особенности применения критериев принятия решений.

На практике часто имеют место ситуации, когда при принятии решений действуют две или более стороны, преследующих противоположные цели. Каждая из сторон может проводить мероприятия для достижения своих целей, причем успех одной стороны означает неудачу других.

Такие ситуации называются ***конфликтными***, они могут возникать, например, при игре в шахматы, между конкурирующими фирмами, при арбитражных спорах, выборах и так далее.

Раздел математики, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта, называется ***теорией игр***.

Целью теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников в конфликтных ситуациях, то есть определение оптимальной стратегии каждого из них.

1. Основные понятия теории игр

Определение. Игрой называется всякая конфликтная ситуация, изучаемая в теории игр и представляющая собой упрощенную, схематизированную модель ситуации.

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что не включает второстепенные, несущественные для ситуации факторы и ведется по определенным правилам, которые в реальной ситуации могут нарушаться.

Всякая игра включает в себя три элемента: ***участников игры-игроков, правила игры, оценку результатов действий игроков.***

Определение. Игроком (лицом, стороной, или коалицией) называется отдельная совокупность интересов, отстаиваемая в игре. Если данную совокупность интересов отстаивает несколько участников игры, то они рассматриваются как один игрок.

Определение. Игроки, имеющие противоположные по отношению друг к другу интересы, называются ***противниками***.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников.

Определение. Игра называется ***парной***, если в ней участвуют два игрока, и ***множественной***, если участвует большее число игроков.

Определение. Правила игры – система условий, определяющих варианты возможных действий игроков, величину выигрыша (проигрыша), к которму приводит каждая совокупность действий игроков, объем информации о поведении других игроков и тому подобное.

Определение. Выигрышем (проигрышем) называется исход конфликта.

Определение. Одна реализация игры называется ***партией***; выбор действия (в пределах правил) – ***ходом***.

Ходы бывают ***личные*** *и* ***случайные***. Личный ход предполагает сознательный выбор того или иного действия, разрешенного правилами игры, а случайный – не зависит от воли игрока (например, он может быть определён подбрасыванием монеты или игральной кости и тому подобное).

Определение. Игры, в которых имеются личные ходы, называются ***стратегическими***. Игры, состоящие только из случайных ходов, называют ***азартными***. Характерный пример – игра в лото.

Определение. Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

При этом в распоряжении каждого игрока имеется не одна (иначе отсутствует смысл игры), а несколько или бесконечное множество стратегий, из которых в данной игре он выбирает одну.

В зависимости от числа стратегий игры делятся на конечные и бесконечные.

Определение. Игра называется ***конечной***, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий. В противном случае игра называется ***бесконечной***.

Определение. Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре, то есть максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно и содержит, кроме личных, ещё и случайные ходы, оптимальная стратегия обеспечивает максимальный средний выигрыш.

Определение. Игра называется ***игрой с нулевой суммой***, если сумма выигрышей всех игроков равна нулю, то есть каждый игрок выигрывает только за счёт других. Иными словами, суммарный выигрыш одних игроков равен суммарному проигрышу других.

Определение. Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – называется ***антагонистической***.

Теория антагонистических игр – наиболее развитый раздел теории игр, с чёткими рекомендациями.

2. Матричные антагонистические игры. Решение игр в чистых стратегиях

Далее мы будем рассматривать игровые модели конфликтов, в которых участвуют два противника, каждый из которых имеет конечное число вариантов выбора решений. С каждой парой решений связан платеж, который один из игроков выплачивает другому (то есть выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Такие игры принято называть ***конечными играми двух лиц с нулевой суммой*** или ***матричными антагонистическими играми***.

В игре принимают участие два игрока: A и B. В распоряжении каждого игрока имеется конечное множество вариантов выбора − стратегий. Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ − множество стратегий игрока A, $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ − множество стратегий игрока *B*. С каждой парой стратегий связан платеж, который один из игроков выплачивает другому. То есть, когда игрок *A* выбирает стратегию A_i (свою i-ю стратегию), а игрок *B* − стратегию B_j, то результатом такого выбора становится платеж a_{ij}, который является выигрышем игрока *A* (положительным или отрицательным) и одновременно проигрышем игрока *B*.

Поскольку стратегий конечное число, то платежи a_{ij} образуют матрицу размерности [*n* x *m*], называемую ***матрицей выигрышей, платежной матрицей*** или ***матрицей игры***. Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока *A*, а столбцы − стратегиям игрока *B*.

Для наглядности такую матрицу часто записывают в виде таблицы

	B_1	B_2	…	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

или матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Игрок *A* стремится обеспечить себе наибольший выигрыш, то есть выбирать стратегию A_i так, чтобы величина a_{ij} была максимальной. Игрок *B* стремится сделать свой проигрыш наименьшим, то есть выбирать стратегию B_i так, чтобы величина a_{ij} была минимальной.

Таким образом, цели игроков являются прямо противоположными.

Здесь трудностью является то, что ни один игрок не может полностью контролировать a_{ij}, поскольку игрок *A* выбирает только строку, а игрок *B* только столбец.

Пример 1. Пусть два игрока *А* и *В* играют в игру, основанную на подбрасывании монеты. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают герб (*Г*) или решку (*Р*). Если результаты двух подбрасываний монеты совпадают (то есть *ГГ* или *РР*), то игрок *А* получает одну денежную единицу от игрока *В*. Иначе, игрок *А* платит одну денежную единицу игроку *В*.

Решение. Для каждого из игроков возможны 2 варианта результатов выпадения герба или решки, следовательно, матрица платежей имеет размерность [2 x 2]:

	$B_Г$	$B_Р$
$A_Г$		
$A_Р$		

Если результаты двух подбрасываний (то есть подбрасываний монеты игроками *А* и *В*) совпадают, то платеж в одну денежную единицу игрок *А*. Будем строить матрицу игры, с точки зрения игрока *А*, то есть его выигрыши оценивать как положительные, а проигрыши − как отрицательные (с точки зрения *В* все будет наоборот и мы вполне могли бы построить матрицы платежей, ориентируясь на его точку зрения):

	$B_Г$	$B_Р$
$A_Г$	+1	
$A_Р$		+1

Если результаты подбрасывания различаются, то выигрыш получает *В*, значит платеж *А* равняется –1. В игре с нулевой суммой выигрыш игрока *В* равносилен проигрышу игрока *А* и равен поэтому $-a_{ij}$.

Таким образом, мы построили матрицу игры, описывающую заданную ситуацию:

	$B_Г$	$B_Р$

$A_Г$	*+1*	*–1*
$A_Р$	*–1*	*+1*

Предполагается, что матрица игры обоим игрокам известна.

Исход игры зависит от поведения обоих игроков, которое основывается на выборе правильных стратегий игры, то есть таких вариантов, при которых платеж данному игроку будет наибольшим. Однако, в отличие от методов оптимизации, в теории игр игрок не может просто стремиться к максимуму, он вынужден считаться с действиями соперника.

Существенно, что ни один из партнеров не знает, какую стратегию применит его противник. Таким образом, имеет место ситуация полной неопределенности, при которой теория вероятности также не может помочь игрокам в выборе решения.

Рассмотрим процесс принятия решений обеими сторонами, предполагая, что оба игрока будут действовать рационально. Если игрок *A* не знает, как поступит его противник, то, действуя наиболее целесообразно и не желая рисковать, он выберет такую стратегию, которая гарантирует ему *наибольший из наименьших* выигрышей при любой стратегии противника. То есть, игрок *A* предполагает, что игрок *B* умен и будет вести себя так, чтобы доставить противнику набольшие неприятности.

Обозначим через α_i *наименьший* выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии A_i при всех возможных стратегиях игрока *B*. Таким образом, α_i – *наименьшее* число в *i*-ой строке матрицы игры, то есть

$$\alpha_i = \min_{j=1,\dots,m} a_{ij}. \qquad (1)$$

Среди всех чисел α_i в строках выберем наибольшее число, обозначим его α:

$$\alpha = \max_{i=1,\dots,n} \alpha_i = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij}. \qquad (2)$$

Определение. Величина α, определяемая формулой (2), называется ***нижней ценой игры*** или ***максимином.***

Это гарантированный наименьший выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии, соответствующей α, и при любой стратегии игрока *B*. То есть, если игрок *A* выбирает стратегию, на которой достигается максимин, то выигрыш α ему гарантирован, и никакое поведение противника не может помешать ему получить эту величину выигрыша.

Определение. Стратегия игрока *A*, соответствующая максимину, называется ***максиминной стратегией***.

Замечание. При выборе максимина *минимум* берется *по строкам*, а *максимум по столбцам*.

Обозначим теперь через β_j *наибольший* проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии B_j при всех возможных стратегиях игрока *A*. Таким образом, β_j – *наибольшее* число в *j*-ом столбце матрицы игры, то есть

$$\beta_j = \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}. \tag{3}$$

Среди всех чисел β_j в столбцах выберем наименьшее число, обозначим его β:

$$\beta = \min_{j=1,\dots,m} \beta_j = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}. \tag{4}$$

Определение. Величина β, определяемая формулой (4), называется ***верхней ценой игры*** или ***минимаксом.***

Это гарантированный наименьший проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии, соответствующей β, и при любой стратегии игрока *A*. То есть, если игрок *B* выберет стратегию, соответствующую минимаксу, то больше, чем β он не проиграет, а значит игрок игрок *A*, что бы ни делал, больше чем β не выиграет.

Определение. Стратегия игрока B, соответствующая минимаксу, называется ***минимальной стратегией***.

Замечание. Можно доказать, что нижняя цена игры не превосходит верхней цены игры, то есть

$$\alpha \le \beta.$$

Очевидно, что максиминная и минимаксная стратегии – наиболее осторожные стратегии игроков. Принцип, диктующий игрокам выбор таких стратегий, называется ***принципом минимакса***.

Определение. Если $\alpha = \beta$, то число $c = \alpha = \beta$ называется ***чистой ценой игры*** или просто ***ценой игры***.

Максиминная и минимаксная стратегии в этом случае являются оптимальными стратегиями, а их совокупность – ***решением игры***. В этом случае говорят, что игра имеет ***решение в чистых стратегиях***.

Из вышесказанного следует, что пара стратегий A_i и B_j дает решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце.

Определение. Если в игре существует такая ситуация, то указанный элемент a_{ij} называется ***седловой точкой***, а сама игра – ***игрой с седловой точкой***.

Игра с седловой точкой имеет цену игры $c = a_{ij}$.

Замечание. Седловая точка гарантирует одному из игроков выигрыш не меньше цены игры, а другому проигрыш не больше этой велины.

Пример 2. Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Установить, имеет ли игра седловую точку? Если да, то найти решение игры.

Решение. Найдем нижнюю цену игры α по формуле (2) и верхнюю цену игры β по формуле (4). Для этого определим минимальные значения в строках матрицы и максимальные значения в ее столбцах. Для удобства заполним следующую таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0,4	0,5	0,7	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	**0,6**	0,8	0,9	**0,6**
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β_j	0,8	**0,6**	0,8	0,9	$\alpha=\beta=0{,}6$

Из таблицы видно, что максиминная стратегия – стратегия A_3, соответствующая нижней цене игры $\alpha = 0{,}6$, а минимаксная стратегия B_2, соответствующая верхней цене игры $\beta = 0{,}6$.

Так как $\alpha = \beta = 0{,}6$, то элемент a_{32}, находящийся на пересечении 3-ей строки и 2-го столбца, является седловой точкой.

Пара стратегий (A_3, B_2) составляе решение игры, поскольку при $\alpha = \beta$ максиминная и минимаксная стратегии являются оптимальными.

Цена игры равна $c = \alpha = \beta = 0{,}6$.

Замечание. Для игр с седловой точкой решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например A) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (B) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным. Это утверждение легко проверить на примере 2 рассматриваемой игры с седловой точкой.

В этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. То есть пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия».

Анализируя матрицу игры, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса.

Придерживаясь этой стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Если же противник выберет стратегию, обеспечивающую не минимальное значение одной из своих стратегий, то выигрыш первого может оказаться больше α.

Если же игра не имеет седловой точки, то ни одна из стратегий A_i или B_j не является оптимальной. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии. Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются *смешанными стратегиями*.

3. Смешанные стратегии матричных игр

Если $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки. В этом случае возникают затруднения в определении цены игры и оптимальных стратегий игроков. Рассмотрим в качестве примера такую игру.

Пример 3. Игроки A и B одновременно независимо друг от друга записывают число. Игрок A записывает число 1 или число 2, а игрок B записывает число 0 или число 3. Если сумма записанных чисел нечетна, то столько денежных единиц игрок *B* платит игроку *A*, а если сумма четна, то столько игрок *A* платит игроку *B*.

Найти решение игры.

Решение. Обозначим стратегии:

A_1 – игрок *A* записал число 1;

A_2 – игрок *A* записал число 2;

B_1 – игрок *B* записал число 0;

B_2 – игрок *B* записал число 3.

Возможны следующие комбинации пар стратегий (A_i, B_j): (1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3).

При этом суммы записанных чисел будут равны:

1 + 0 = 1 – нечетное число;

1 + 3 = 4 – четное число;

2 + 0 = 2 – четное число;

2 + 3 = 5 – нечетное число.

По условию задачи, если сумма записанных чисел нечетна, то столько денежных единиц игрок *B* платит игроку *A*, а если сумма четна, то столько игрок *A* платит игроку *B*.

Поэтому матрица игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} +1 & -4 \\ -2 & +5 \end{pmatrix}.$$

Найдем нижнюю цену игры α по формуле (2) и верхнюю цену игры β по формуле (4). Для этого определим минимальные значения в строках матрицы и максимальные значения в ее столбцах.

Для удобства заполним следующую таблицу:

	B_1	B_2	α_i
A_1	+1	–4	–4
A_2	–2	+5	–2

β_j	1	5	$\alpha = -2$ $\beta = 1$

Из таблицы видно, что $\alpha = -2$ (при стратегии A_2), а $\beta = 1$ (при стратегии B_1). То есть, $\alpha \neq \beta$, следовательно, седловая точка в этой игре отсутствует.

При максиминной стратегии A_2 игрок A может гарантировать себе выигрыш не меньше –2, а игрок B при минимаксной стратегии B_1 может гарантировать себе проигрыш не больше 1.

Область между α и β является как бы ничьей, и каждый игрок может попытаться улучшить свой результат за счет этой области.

Отметим, что если каждый игрок будет придерживаться принципа минимакса (стратегии (A_2, B_1)), то каждый раз выигрыш игрока A будет составлять –2. Это невыгодно игроку A, так как проигрыш игрока B, равный –2 (то есть выигрыш +2), меньше того проигрыша, равного 1, который игрок B обеспечит себе по принципу минимакса.

Игроку A выгодно отказаться от от своей максиминной стратегии, если игрок B придерживается минимаксной, и применить стратегию A_1. Тогда игрок A вместо выигрыша –2 получит выигрыш 1. Правда, тогда игроку B будет выгодно отказаться от стратегии B_1, чтобы игрок A получил выигрыш –4 и так далее.

То есть при каждой паре стратегий одному из игроков выгодно отказаться от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей. А это значит, что пары оптимальных стратегий нет.

В такой игре каждый игрок должен хранить в секрете ту стратегию, которую он собирается применить. Однако как это сделать? Ведь если партия играется многократно, а один из игроков все время применяет одну и ту же стратегию, то второй игрок, зная об этом, будет учитывать этот факт, выбирая свою стратегию.

Секретность можно сохранить, если каждый раз выбирать стратегию *случайным образом*. Такое поведение тоже является стратегией и называется *смешанной стратегией*. При этом противник лишен возможности узнать наперед о действиях другой стороны.

Определение. Смешанной стратегией $\boldsymbol{S_A}$ игрока A называется применение чистых стратегий A_1, A_2, ..., A_n случайным образом с вероятностями соответственно p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, причем сумма вероятностей равна 1, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \ . \tag{5}$$

Смешанные стратегии игрока $\boldsymbol{A}$ записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

или в виде вектора вероятностей

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_n). \tag{7}$$

При надлежащем подборе вероятностей p_i смешанная стратегия может оказаться оптимальной. При этом выигрыш игрока A будет не меньше некоторого значения c, называемого *ценой игры*. Это значение больше нижней цены игры, но меньше верхней.

Аналогичным образом должен вести себя игрок B. Его оптимальная стратегия также есть некоторая смешанная стратегия

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix} \tag{8}$$

или в виде вектора вероятностей

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_m), \tag{9}$$

где q_j − специально подобранные вероятности, с которыми игрок B использует стратегии B_j.

Сумма вероятностей q_j также равна 1:

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1 . \tag{10}$$

Поскольку в смешанных стратегиях игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом и независимо друг от друга, игра имее случайный характер.

Случайной становится и величина выигрыша игрока A или проигрыша игрока B.

В этом случае представление о том, какому игроку выгодна данная игра при выбранных смешанных стратегиях игроков, дает среднее значение выигрыша игрока A, которое является функцией S_A и S_B и определяется по формуле математического ожидания двумерной случайной величины

$$f(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j . \tag{11}$$

Определение. Функцию, заданную формулой (11), называют ***функцией потерь*** или ***платежной функцией***.

Определение. Решением игры в этом случае является пара оптимальных стратегий

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*) \tag{12}$$

и

$$S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_m^*), \tag{13}$$

обладающих тем же свойством, что и для чистых стратегий: каждому игроку невыгодно отступать от своей оптимальной смешанной стратегии, если другой игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии.

Определение. Ценой игры c в такой игре называется средний выигрыш игрока A при оптимальных смешанных стратегиях

$$c = f(S_A^*, S_B^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i^* \cdot q_j^* . \tag{14}$$

Замечание. Цена игры c удовлетворяет неравенству

$$\alpha \le c \le \beta,$$

где α – нижняя граница игры, β – верхняя граница игры.

Основная теорема теории матричных игр (теорема Неймана): каждая конечная матричная игра имеет по крайней мере одно решение среди смешанных стратегий.

Рассмотрим сначала простейший случай игры, решаемой в смешанных стратегиях – игру [2 x 2], когда у каждого игрока имеется лишь по две стратегии.

Платежная матрица такой игры

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если такая игра имеет *седловую точку*, то *решение игры* – пара оптимальных *чистых стратегий* (максиминная и минимаксная), соответствующих этой точке.

Для игры, в которой отсутствует седловая точка, решение в соответствии с теоремой Неймана существует и определяется парой опримальных смешанных стратегий

$$S_A^* = (p_1^*,\ p_2^*)$$

и

$$S_B^* = (q_1^*,\ q_2^*),$$

где вероятности p_1^*, p_2^* соответствуют стратегиям A_1 и A_2, а вероятности q_1^*, q_2^* – стратегиям B_1 и B_2.

Рассматривая функцию потерь $f(S_A, S_B)$ при применении смешанных стратегий, можно получить систему уравнений для нахождения оптимальных смешанных стратегий, решение которой имеет вид

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (15)$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (16)$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (17)$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (18)$$

Цену игры можно вычислить, применяя формулу (14)

$$c = f(S_A^*, S_B^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i^* \cdot q_j^*$$

или по формуле (19)

$$c = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (19)$$

Пример 4. Найти решение и цену игры, описанной в примере 3 (стр. 24):

Игроки *A* и *B* одновременно независимо друг от друга записывают число. Игрок *A* записывает число 1 или число 2, а игрок *B* записывает число 0 или число 3. Если сумма записанных чисел нечетна, то столько денежных единиц игрок *B* платит игроку *A*, а если сумма четна, то столько игрок *A* платит игроку *B*.

Решение. В примере 3 была получена матрица игры

$$\begin{pmatrix} +1 & -4 \\ -2 & +5 \end{pmatrix},$$

найдены нижняя цена игры $\alpha = -2$ и верхняя цена игры $\beta = 1$:

	B_1	B_2	α_i
A_1	1	−4	−4
A_2	−2	5	−2
β_j	1	5	$\alpha = -2$ $\beta = 1$

Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка в этой игре отсутствует. Поэтому применим смешанные стратегии.

Решение игры определяется следующими вероятностями (формулы (15–18)):

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5 - (-2)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{7}{12} = 0{,}58\,,$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - (-4)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{5}{12} = 0{,}42,$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5 - (-4)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{9}{12} = 0{,}75\,,$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - (-2)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{3}{12} = 0{,}25\,.$$

Замечание. Можно сделать проверку. В соответствии с формулой (5) должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,.$$

Действительно, $p_1^* + p_2^* = 0{,}58 + 0{,}42 = 1$.

В соответствии с формулой (10) должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1\,.$$

Действительно, $q_1^* + q_2^* = 0{,}75 + 0{,}25 = 1$.

Тогда решение игры можно записать в соответствии с формулами (12–13):

$$S_A^* = (0{,}58;\ 0{,}42)\,,$$

$$S_B^* = (0{,}75;\ 0{,}25)\,.$$

Полученный результат означает, что оптимальная смешанная стратегия игрока A состоит в том, чтобы применять чистые стратегии A_1 и A_2 случайным образом с вероятностями соответственно 0, 58 и 0,42, а стратегия игрока B состоит в том, чтобы применять чистые стратегии B_1 и B_2 с вероятностями 0,75 и 0,25 соответственно:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix},$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при правильной игре обоих игроков наиболее часто будет выбираться пара стратегий (A_1, B_1), то есть игрок A будет записывать число 1 чаще, чем число 2, а игрок B будет записывать число 0 чаще, чем число 3.

Найдем цену игры, применяя формулу (14):

$$c = f(S_A^*,\, S_B^*) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\cdot p_i^*\cdot q_j^* = a_{11}\cdot p_1^*\cdot q_1^* + a_{12}\cdot p_1^*\cdot q_2^* +$$

$$+ a_{21}\cdot p_2^*\cdot q_1^* + a_{22}\cdot p_2^*\cdot q_2^* = 1\cdot 0{,}58\cdot 0{,}75 + (-4)\cdot 0{,}58\cdot 0{,}25 +$$

$$+ (-2)\cdot 0{,}42\cdot 0{,}75 + 5\cdot 0{,}42\cdot 0{,}25 = -0{,}25$$

или формулу (19):

$$c = \frac{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1\cdot 5 - (-4)\cdot(-2)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{-3}{12} = -0{,}25\,.$$

Очевидно, что обе формулы дают одинаковый результат.

Цена игры $c = -0{,}25$ − это средний выигрыш игрока A (и, соответственно, проигрыш игрока B) в одной игре. Число c отрицательно, следовательно, эта игра невыгодна для игрока A, а выгодна для игрока B.

В данном примере виден смысл величин p_1, p_2 и q_1, q_2. Это – вероятности выбора чистых стратегий в смешанной. Однако данные показатели могут иметь смысл доли реализации чистых стратегий в смешанной. Рассмотрим это на примере.

Пример 5. Торговая организация A выделяет 1 млн. руб. на закупку товара на реализацию. Имеется выбор между закупкой товаров T_1 или T_2. Ожидаемая прибыль зависит от того, какой товар T_1 или T_2 будет закупать конкурент B. Если оба будут закупать T_1, то ввиду конкуренции A понесет убытки в 200 тыс. руб. Если оба будут закупать T_2, то по той же причине A понесет убытки в 100 тыс. руб. Если A закупит T_1, а B закупит T_2, то прибыль A составит 900 тыс. руб. Если A закупит T_2, а B закупит T_1, то прибыль A составит 700 тыс. руб.

Как лучше поступить игрокам при оптимальном поведении?

Решение. Обозначим стратегии игроков:

A_1 – компания A закупает товар T_1,

A_2 – компания A закупает товар T_2,

B_1 – компания B закупает товар T_1,

B_2 – компания B закупает товар T_2.

Платежная матрица имеет вид

	B_1	B_2	α_i
A_1	-200	900	-200
A_2	700	-100	-100
β_j	700	900	$\alpha = -100$ $\beta = 700$

Нижняя цена игры $\alpha = -100$, верхняя цена игры $\beta = 700$, седловой точки нет, так как $\alpha \neq \beta$.

Применим смешанные стратегии. Тогда вероятности чистых стратегий в смешанной равны (формулы (15-18)):

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-100 - 700}{-200 + (-100) - 900 - 700} = \frac{-800}{-1900} = \frac{8}{19},$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-200 - 900}{-200 + (-100) - 900 - 700} = \frac{-1100}{-1900} = \frac{11}{19},$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-100 - 900}{-200 + (-100) - 900 - 700} = \frac{-1000}{-1900} = \frac{10}{19},$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-200 - 700}{-200 + (-100) - 900 - 700} = \frac{-900}{-1900} = \frac{9}{19}.$$

Найдем цену игры, применяя формулу (19):

$$c = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-200 \cdot (-100) - 900 \cdot 700}{-200 + (-100) - 900 - 700} = \frac{-610000}{-1900} \approx 321{,}053.$$

Следовательно, игроку *A* выгодно реализовать обе стратегии A_1 и A_2 в долях $\frac{8}{19} \approx 0{,}421$ и $\frac{11}{19} \approx 0{,}579$, то есть закупить и товар T_1, и товар T_2.

При этом товар T_1 должен быть закуплен на сумму 421 тыс. руб., а товар T_2 на сумму 579 тыс. руб. Прибыль, не зависимо от поведения соперника, составит 321053 руб. То же можно сказать и для игрока *B*: закупать оба товара, первого на сумму $\frac{10}{19} \approx 0{,}626$ от запланированной, а второго на сумму $\frac{9}{19} \approx 0{,}474$.

Замечание. В некоторых случаях удается аналогичным образом решить и игровые ситуации с платежными матрицами большего размера, упростив их до игры [2 x 2].

При этом используются следующие правила:

1) Если все элементы какой-либо строки платежной матрицы не превышают соответствующих элементов любой другой строки, то строка с меньшими элементами соответствует стратегии, которая для игрока *A* заведомо не выгодна при любом ответе игрока *B*. Поэтому из платежной матицы строку с меньшими элементами можно вычеркнуть, тем самым выведя из рассмотрения соответствующую ей стратегию.

2) С другой стороны, для игрока *B* невыгодна заранее, независимо от ответа *A*, стратегия, которой соответствует столбец платежной матрицы, у которого все элементы больше или равны соответствующим элементам любого другого столбца. Столбец с большими элементами также можно вывести из рассмотрения, вычеркнув из платежной матрицы.

Пример 6. Директор транспортной компании *A*, оказывающей транспортные услуги по перевозке пассажиров в областном центре, планирует открыть один или несколько маршрутов: A_1, A_2, A_3 и A_4. Для этого было закуплено 100 микроавтобусов. Он может поставить весь транспорт на одном из маршрутов (наиболее выгодном), либо распределить по нескольким маршрутам.

Спрос на транспорт, а соответственно и прибыль компании во многом зависит от того, какие маршруты в ближайшее время откроет главный конкурент − компания *B*. Ее руководство полностью владеет ситуацией и может открыть несколько из пяти маршрутов B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5.

Оценки прибыли компании *A* (млн. руб.) при любом ответе *B* представлена платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	4	6	9
A_2	6	5	3	4	8
A_3	7	6	6	7	5
A_4	6	7	5	4	3

Решение. Находим оптимальное распределение прибыли по маршрутам и ожидаемую прибыль.

Вычеркиваем из таблицы второй столбец, так как все его элементы больше или равны элементам третьего. Вычеркиваем четвертую строку, так как ее оставшиеся элементы меньше элементов третьей. Элементы первого столбца больше элементов третьего, вычеркиваем первый столбец. Вторую строку вычеркиваем в результате сравнения с первой. Четвертый столбец вычеркиваем после сравнения с третьим.

В результате получаем матрицу:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	4	6	9
A_2	6	5	5	4	8
A_3	7	6	6	7	5
A_1	6	7	5	4	2

которая эквивалентна матрице:

	B_3	B_5
A_1	4	9
A_3	6	5

Тогда вероятности чистых стратегий компании *A* в смешанной $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ p_1^* & p_3^* \end{pmatrix}$ равны:

$$p_1^* = \frac{a_{35} - a_{33}}{a_{13} + a_{35} - a_{15} - a_{33}} = \frac{5-6}{4+5-9-6} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6},$$

$$p_3^* = \frac{a_{13} - a_{15}}{a_{13} + a_{35} - a_{15} - a_{33}} = \frac{4-9}{4+5-9-6} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}.$$

Цена игры равна (формула (19)):

$$c = \frac{a_{13} \cdot a_{35} - a_{15} \cdot a_{33}}{a_{13} + a_{35} - a_{15} - a_{33}} = \frac{4 \cdot 5 - 9 \cdot 6}{4+5-9-6} = \frac{-34}{-6} \approx 5{,}667\,.$$

Следовательно, $\frac{1}{6}$ часть автопарка (17 машин) нужно направить на маршрут A_1, а остальные $\frac{5}{6}$ частей парка (83 машины) на маршрут A_3.

Маршруты A_2 и A_4 использовать не рационально.

При этом прибыль компании *A*, не зависимо от ответа компании *B,* будет составлять 5, 667 млн. руб.

4. Статистические игры (игры с природой)

Игры, которые были рассмотрены выше, часто называют ***стратегическими играми***. В их основе лежит предположение о том, что каждый игрок действует активно и стремится, по возможности, использовать свою оптимальную стратегию для получения наибольшего выигрыша.

Однако во многих практических ситуциях один из игроков оказывается нейтральным и не стремится извлечь выгоды. В качестве такого игрока часто выступает окружающая игрока среда или ***природа***, то есть совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решение.

Природа не имеет злого умысла по отношению к человеку и не стремится нанести ему ущерб. Она действует и развивается в соответствии со своими законами. Однако во многих случаях человек не в полной мере знает эти законы. В такой ситуации неполной информации о законах природы существует возможность принятия ошибочных решений.

Определение. Игры, в которых одним противником является природа, а другим – человек, получили название ***статистических игр***. А человека, участвующего в игре с природой, называют ***статистиком***.

Характерная черта статистической игры – возможность получения информации в результате некоторого статистического эксперимента для оценки распределения вероятностей стратегий природы. Исследование механизма случайного выбора стратегии природой позволяет принять оптимальное решение, которое будет наилучшей стратегией в игре с неантагонистическим противником человека – природой.

Действия природы могут, как наносить ущерб, так и приносить прибыль. Поведение природы можно оценить статистическими методами, определить присущие ей закономерности. В зависимости от степени знания этих закономерностей, определяющих поведение природы, различают два вида задач в играх с природой:

- задача о принятии решений в ***условиях риска***, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний;
- задачи о принятии решений в ***условиях неопределенности***, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы.

Поиском решений в таких ситуациях и занимается теория статистических решений.

Замечание. К явлениям природы, влияющим на результат решения, относят не только погодные и сезонные явления (дождь, засуху, урожай, неурожай), но и проявление любых, не зависящих от нас обстоятельств: например, задержки на транспорте.

Человек, играя с природой, стремиться максимизировать свой выигрыш, поэтому, если он осторожный игрок (а теория игр рассматривает именно таких игроков), он должен при выборе своей стратегии руководствоваться тем, что неизвестные или известные ему закономерные действия природы приведут к наименее благоприятным последствиям. Именно поэтому такие игры можно рассматривать как игры двух лиц с нулевой суммой, которые были уже нами рассмотрены.

Формализация задачи происходит следующим образом: у активного игрока (человека) возможные действия по-прежнему называются стратегиями, а возможные действия пассивного игрока (природы) – состояниями или условиями природы.

В качестве первого игрока всегда выступает человек, поэтому в матрице записывается его выигрыш. Так как нас интересует оптимальная стратегия человека и его гарантированный выигрыш, то в игру достаточно определить максиминную стратегию первого игрока и нижнюю цену игры. Определение верхней цены игры имеет смысл, если данная игра повторяется многократно и оптимальная стратегия может быть смешанной.

4.1. Игры с природой в условиях неопределенности

Если распределение вероятностей будущих состояний природы неизвестно, вся информация о природе сводится к перечню ее возможных состояний. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, например, покупательский спрос) действует случайно. Таким образом, в сложных структурах каждому допустимому варианту решений X_i вследствие различных внешних условий могут соответствовать различные внешние условия (состояния) B_j и результаты a_{ij} решений.

Следующий пример иллюстрирует это положение.

Пример 7. Пусть из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Решение. Варианты решений таковы:

X_1 – выбор размеров из соображений максимальной долговечности, то есть изготовление изделия с минимальными затратами в предположении, что материал будет сохранять свои характеристики в течение длительного времени;

X_n – выбор размеров в предположении минимальной долговечности;

X_i – промежуточные решения.

Условия (состояния), требующие рассмотрения, таковы:

B_1 – условия, обеспечивающие максимальную долговечность;

B_m – условия, обеспечивающие минимальную долговечность;

B_j – промежуточные условия.

Под результатом решения a_{ij} здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту X_i и условиям B_j и характеризующую экономический эффект (прибыль), полезность или надёжность изделия.

Семейство решений описывается некоторой матрицей [n x m], которую называют ***матрицей решений*** (условия игры задаются матрицей [n x m]).

По аналогии с теорией игр, эту матрицу будем называть также ***платёжной матрицей***.

Таким образом, матрица решений (платежная матрица) будет иметь вид

Условия / *Варианты*	B_1	B_2	B_3	…	B_j	…	B_m
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1j}	…	a_{1m}
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2j}	…	a_{2m}
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3j}	…	a_{3m}
…	…	…	…	…	…	…	…
X_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	…	a_{ij}	…	a_{im}
…	…	…	…	…	…	…	…
X_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	…	a_{nj}	…	a_{nm}

Конструктор старается выбрать решение с наилучшим результатом, но, так как ему неизвестно, с какими условиями он столкнётся, он вынужден принимать во внимание все оценки a_{ij}, соответствующие варианту X_i.

Оценочная функция

Чтобы прийти к однозначному и по возможности наивыгоднейшему варианту решений даже в том случае, когда каким-то вариантам решений X_i могут соответствовать различные условия B_j, можно ввести подходящие ***оценочные (целевые) функции***. При этом матрица решений сводится к одному столбцу.

Каждому варианту X_i приписывается, таким образом, некоторый результат a_{ir}, характеризующий, в целом, все последствия этого решения. Такой результат мы в дальнейшем будем обозначать тем же символом a_{ir}.

Рассмотрим некоторые оценочные функции, которые в данном примере мог бы выбрать конструктор.

Оптимистическая позиция:

$$\max_i a_{ir} = \max_i(\max_j a_{ij}). \tag{20}$$

Из матрицы результатов решений выбирается вариант (строка), содержащий в качестве возможного следствия наибольший из всех возможных результатов. Наш конструктор становится на точку зрения азартного игрока. Он делает ставку на то, что выпадет наивыгоднейший случай, и, исходя из этого, выбирает размеры изделия.

Позиция нейтралитета:

$$\max_i a_{ir} = \max_i (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}). \tag{21}$$

Конструктор исходит из того, что все встречающиеся отклонения результата решения от "среднего" случая допустимы, и выбирает размеры, оптимальные с этой точки зрения.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

Особые случаи

Схематическое сопоставление всех возможных «полезностей» a_{ij} различных решений в платежной матрице облегчает поначалу их обозрение, не требуя при этом формальной оценки. Эта матрица может быть меньшего объёма и даже выродиться в единственный столбец:

Условия / *Варианты*	B_1
X_1	a_{11}
X_2	a_{21}
X_3	a_{31}
...	...
X_i	a_{i1}
...	...
X_n	a_{n1}

если будет представлена полная информация о том, с каким внешним состоянием B_j следует считаться.

Матрица решений может свестись и к единственной строке:

Условия *Варианты*	B_1	B_2	B_3	…	B_j	…	B_m
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1j}	…	a_{1m}

В этом случае мы имеем дело с так называемой фатальной ситуацией принятия решений, когда в силу ограничений технического характера, внешних условий и других причин остаётся единственный вариант.

4.2. Классические критерии принятия решений

Критерий Вальда

Согласно этому критерию игра с природой ведётся как игра с разумным, причём агрессивным противником, делающим всё для того, чтобы помешать нам достигнуть успеха. Оптимальной считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш не меньший, чем «нижняя цена игры с природой»:

$$\alpha = Z_{MM} = \max_i(\min_j a_{ij}). \tag{22}$$

Правило выбора решения в соответствии с критерием Вальда (максиминным критерием): матрица решений (платёжная матрица) дополняется ещё одним столбцом из *наименьших* результатов a_{ir} каждой строки. Выбрать надлежит те варианты, в строках которых стоят *наибольшие* значения a_{ir} этого столбца.

Критерий Вальда является *писсимистическим*, поскольку основан на выборе наилучшей из наихудших возможностей.

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Какие бы условия ни встретились, соответствующий результат не может оказаться ниже Z_{MM}.

Это свойство заставляет считать максиминный критерий одним из фундаментальных. Поэтому в технических задачах он применяется чаще всего, как сознательно, так и неосознанно.

Однако положение об отсутствии риска стоит различных потерь.

Продемонстрируем критерий Вальда на примере.

Пример 8. Имеется матрица решений (платёжная матрица):

X \ B	B_1	B_2	B_3
X_1	1	10	1
X_2	1,1	1,1	1,2

Выбрать оптимальную стратегию, используя критерий Вальда.

Решение. Используя правило выбора решения в соответствии с критерием Вальда, матрицу решений дополним столбцом из *наименьших* результатов a_{ir} каждой строки.

Для удобства представления результатов добавим еще один столбец, в котором выберем $\max_i a_{ir}$:

X \ B	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	1	
X_2	1,1	1,1	1,2	1,1	**1,1**

Выбирая вариант X_2, предписываемый критерием Вальда, мы избегаем неудачного значения 1, реализующего в варианте X_1 при внешнем состоянии B_1, получая вместо него при этом состоянии немного лучший результат 1,1, зато в состоянии B_2 теряем выигрыш 10, получая всего только 1,1.

Это пример показывает, что в многочисленных практических ситуациях пессимизм критерия может оказаться невыгодным.

Замечание. Применение критерия Вальда бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о возможности появления внешних состояний B_j ничего не известно;

- приходится считаться с появлением различных внешних состояний B_j;

- решение реализуется лишь один раз;

- необходимо исключить какой бы то ни было риск, то есть ни при каких условиях B_j не допускается получать результат, меньший, чем Z_{MM}.

Критерий Гурвица

Это правило является правилом *пессимизма-оптимизма*. Представляется логичным, что при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации придерживаться некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего, благоприятного поведения природы. Такой компромиссный вариант и был предложен Гурвицем.

Согласно этому подходу для каждого решения необходимо определить линейную комбинацию min и max выигрыша и взять ту стратегию, для которой эта величина окажется наибольшей, то есть стараясь занять уравновешенную позицию, Гурвиц предложил критерий (HW), оценочная функция которого находится где-то между точками предельного оптимизма и крайнего пессимизма.

Оценочная функция имеет форму записи:

$$Z_{HW} = \max_i \left[\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right], \tag{23}$$

где γ − “степень пессимизма” ("коэффициент пессимизма", весовой множитель), $0 \le \gamma \le 1$.

Правило выбора согласно критерию Гурвица (HW – критерия) формулируется следующим образом: матрица решений дополняется столбцом, содержащим *средние взвешенные наименьшего и наибольшего* результатов каждой строки. Выбираются те варианты X_i, в строках которых стоят *наибольшие* элементы a_{ir} этого столбца.

Замечание. При $\gamma = 1$ критерий Гурвица (23) тождественен *критерию пессимизма Вальда*, а при $\gamma = 0$ превращается в критерий *крайнего оптимиз-*

ма (критерий азартного игрока), рекомендующий выбрать ту стратегию, при которой самый большой выигрыш в строке максимален.

В технических приложениях правильно выбрать этот множитель бывает так же трудно, как и выбрать критерий. Вряд ли возможно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения.

Поэтому чаще всего весовой множитель $\gamma = 0{,}5$ принимается $\gamma = 0{,}5$ в качестве некоторой "средней" точки зрения.

На выбор значения степени пессимизма оказывает влияние мера ответственности: чем серьезнее последствия ошибочных решений, тем больше желание принимающего решение застраховаться, то есть степень пессимизма γ ближе к единице.

Рассмотрим применение критерия Гурвица на данных предыдущего примера 8 (стр. 42).

Пример 9. Имеется матрица решений (платёжная матрица):

$X \backslash B$	B_1	B_2	B_3
X_1	1	10	1
X_2	1,1	1,1	1,2

Выбрать оптимальную стратегию, используя критерий Гурвица. Степень пессимизма принять $\gamma = 0{,}6$.

Решение. Используя правило выбора решения в соответствии с критерием Гурвица (23), матрицу решений дополним столбцом из средних взвешенных *наименьшего и наибольшего* результатов a_{ir} каждой строки:

$$a_{ir} = \gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij}.$$

Для стратегии X_1 минимальное значение равно 1, а максимальное – 10. Используя формулу (23), вычислим:

$$a_{1r} = \gamma \min_j a_{1j} + (1-\gamma) \max_j a_{1j} = 0{,}6 \cdot 1 + (1-0{,}6) \cdot 10 = 4{,}6.$$

Для стратегии X_2 минимальное значение равно 1,1, а максимальное – 1,2.

Тогда по формуле (23) находим:

$$a_{2r} = \gamma \min_j a_{2j} + (1-\gamma)\max_j a_{2j} = 0{,}6 \cdot 1{,}1 + (1-0{,}6)\cdot 1{,}2 = 1{,}14.$$

Для удобства представления результатов добавим еще один столбец, в котором выберем $\max_i a_{ir}$:

B / X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	4,6	**4,6**
X_2	1,1	1,1	1,2	1,14	

Находим максимальное значение столбца a_{ir}. Оно равно 4,6.

Следовательно, по критерию Гурвица при $\gamma = 0{,}6$ следует выбирать стратегию X_1.

Замечание. В литературе часто используется и такая форма критерия Гурвица:

$$Z_{HW} = \max_i \left[\gamma \max_j a_{ij} + (1-\gamma)\min_j a_{ij} \right], \qquad (24)$$

где γ – «степень оптимизма» («коэффициент оптимизма», весовой множитель), $0 \le \gamma \le 1$.

Здесь, при $\gamma = 0$ критерий Гурвица (24) тождественен критерию Вальда, а при $\gamma = 1$ совпадает с максиминным решением.

Критерий Гурвица предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

- о вероятностях появления B_j ничего не известно;
- с появлением состояний B_j необходимо считаться;
- реализуется лишь малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

Критерий Сэвиджа (критерий минимакса риска)

На практике, выбирая одно из возможных решений, часто останавливаются на том, осуществление которого приведет к наименее тяжелым последствиям, если выбор окажется ошибочным. Этот подход к выбору решения математически был сформулирован американским статистиком Сэвиджем 1954 году и получил название принципа Сэвиджа.

По принципу Сэвиджа каждое решение характеризуется величиной дополнительных потерь, которые возникают при реализации этого решения, по сравнению с реализацией решения, правильного при данном состоянии природы. Естественно, что правильное решение не влечет за собой никаких дополнительных потерь, и их величина равна нулю.

При выборе решения, наилучшим образом соответствующего различным состояниям природы, следует принимать во внимание только эти дополнительные потери, которые по существу, будут являться следствием ошибок выбора.

Для решения задачи строится так называемая «***матрица рисков***», элементы которой показывают, какой убыток понесет игрок в результате выбора неоптимального варианта решения.

Определение. ***Риском*** игрока r_{ij} при выборе стратегии i в условиях (состояниях) природы j называется разность между максимальным выигрышем, который можно получить в этих условиях и выигрышем, который получит игрок в тех же условиях, применяя стратегию i.

Если бы игрок знал заранее будущее состояние природы j, он выбрал бы стратегию, которой соответствует максимальный элемент в данном столбце:

$$\max_j a_{ij},$$

и тогда риск будет равен:

$$r_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij}. \quad (25)$$

Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать решение, обеспечивающее минимальное значение максимального риска:

$$Z_S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i \max_j \left(\max_i a_{ij} - a_{ij} \right). \qquad (26)$$

Правило Сэвиджа, как и правило Вальда, ориентирует статистика на самые неблагоприятные состояния природы, то есть эти правила выражают *пессимистическую* оценку ситуации.

Рассмотрим применение критерия Сэвиджа на данных предыдущих примеров: примера 8 (стр. 42) и примера 9 (стр. 44).

Пример 10. Имеется матрица решений (платёжная матрица):

$X \backslash B$	B_1	B_2	B_3
X_1	1	10	1
X_2	1,1	1,1	1,2

Выбрать оптимальную стратегию, используя критерий Сэвиджа.

Решение. Построим матрицу «рисков». Для этого находим максимальные значения для каждого столбца матрицы решений $\max_j a_{ij}$.

Они равны: 1,1 − для первого столбца, 10 − для второго столбца и 1,2 − для третьего столбца:

$X \backslash B$	B_1	B_2	B_3
X_1	1	10	1
X_2	1,1	1,1	1,2
$\max_j a_{ij}$	1,1	10	1,2

Найдем значения рисков по формуле (25):

$$r_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij},$$

получим таблицу (матрицу) рисков:

B / X	B_1	B_2	B_3
X_1	$1{,}1 - 1 = 0{,}1$	$10 - 10 = 0$	$1{,} 2 - 1 = 0{,}2$
X_2	$1{,}1 - 1{,}1 = 0$	$10 - 1{,}1 = 8{,}9$	$1{,}2 - 1{,} 2 = 0$
$\max\limits_{j} a_{ij}$	1,1	10	1,2

То есть окончательно таблица рисков примет вид

B / X	B_1	B_2	B_3
X_1	0,1	0	0,2
X_2	0	8,9	0

Дополняем эту таблицу столбцом наибольших разностей:

$$\max_{j} r_{ij} = \max_{j}\left(\max_{i} a_{ij} - a_{ij}\right).$$

Получаем

B / X	B_1	B_2	B_3	$\max\limits_{j} r_{ij}$
X_1	0,1	0	0,2	0,2
X_2	0	8,9	0	8,9

Выбираем те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение. В результате получим таблицу 12.

B / X	B_1	B_2	B_3	$\max\limits_{j} r_{ij}$	$\min\limits_{i} \max\limits_{j} r_{ij}$
X_1	0,1	0	0,2	0,2	**0,2**
X_2	0	8,9	0	8,9	

Таким образом, критерий Сэвиджа рекомендует выбрать стратегию X_1.

Критерий Лапласа

В ряде случаев представляется правдоподобным следующее рассуждение: поскольку неизвестны будущие состояния природы, постольку можно считать их равновероятными. Этот подход к решению используется в критерии «*недостаточного основания*» Лапласа.

Для каждого решения подсчитывается математическое ожидание выигрыша (вероятности состояний природы полагаются равными $q_j = \frac{1}{m}$):

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot q_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

и выбирается то решение, при котором величина этого выигрыша максимальна:

$$Z_L = \max_i a_{ir}.$$

Гипотеза о равновероятности состояний природы является довольно искусственной, поэтому принципом Лапласа можно пользоваться лишь в ограниченных случаях. В более общем случае следует считать, что состояния природы не равновероятны и использовать для решения критерий Байеса-Лапласа.

Критерий Байеса-Лапласа

Этот критерий отступает от условий полной неопределенности. Он предполагает, что возможным состояниям природы можно приписать определенную вероятность их наступления q_j и, определив математическое ожидание выигрыша для каждого решения, выбрать то, которое обеспечивает наибольшее значение выигрыша:

$$Z_{BL} = \max_i a_{ir} = \max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot q_j, \qquad (27)$$

где

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot q_j. \qquad (28)$$

В этом случае говорят, что решение принимается в условиях *частичной неопределенности*.

Этот метод предполагает возможность использования какой-либо предварительной информации о состояниях природы.

При этом предполагается как повторяемость состояний природы, так и повторяемость решений, и, прежде всего, наличие достаточно достоверных данных о прошлых состояниях природы. То есть, основываясь на предыдущих наблюдениях прогнозировать будущее состояние природы (*статистический принцип*).

Рассмотрим критерий Байеса-Лапласа на данных примеров 8-10.

Пример 11. Имеется таблица решений (платёжная матрица):

X \ B	B_1	B_2	B_3
X_1	1	10	1
X_2	1,1	1,1	1,2

Выбрать оптимальную стратегию, используя критерий Байеса-Лапласа, если известны вероятности $q_1 = 0{,}4$, $q_2 = 0{,}2$ и $q_3 = 0{,}4$.

Решение. Дополним таблицу решений значениями q_j :

X \ B	B_1	B_2	B_3
X_1	1	10	1
X_2	1,1	1,1	1,2
q_j	0,4	0,2	0,4

Согласно критерию Байеса-Лапласа вычислим математические ожидания по формуле (28):

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot q_j \, .$$

Получим:

$$a_{1r} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot q_j = 1 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 = 2{,}8\,,$$

$$a_{2r} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot q_j = 1{,}1 \cdot 0{,}4 + 1{,}1 \cdot 0{,}2 + 1{,}2 \cdot 0{,}4 = 1{,}14\,.$$

Дополним таблицу решений еще одним столбцом a_{ir}:

$X \backslash B$	B_1	B_2	B_3	a_{ir}
X_1	1	10	1	2,8
X_2	1,1	1,1	1,2	1,14
q_j	0,4	0,2	0,4	

и среди этих значений выбираем максимальное:

$X \backslash B$	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max\limits_i a_{ir}$.
X_1	1	10	1	2,8	**2,8**
X_2	1,1	1,1	1,2	1,14	
q_j	0,4	0,2	0,4		

Согласно критерию Байеса-Лапласа оптимальным является решение X_1.

Критерий Байеса-Лапласа предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

- вероятности появления состояний B_j известны и не зависят от времени;
- решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск исключён.

Исходная позиция применяющего критерий оптимистичнее, чем в случае критерия Вальда, однако она предполагает более высокий уровень информированности и достаточно длинные реализации.

Перечисленные критерии не исчерпывают всего многообразия критериев выбора решения в условиях неопределенности, в частности, критериев выбора наилучших смешанных стратегий, однако и этого достаточно, чтобы проблема выбора решения стала неоднозначной.

Для сравнения приведем оптимальные варианты, полученные с помощью различных критериев (примеры 8−11):

Решение	**Критерий**			
Стратегии	**Вальда**	**Гурвица, γ=0,6**	**Сэвиджа**	**Байеса-Лапласа q_1=0,4, q_2=0,2, q_3=0,4**
X_1		*	*	*
X_2	*			

Из таблицы видно, что от выбранного критерия зависит и выбор оптимального решения.

Выбор критерия (как и выбор принципа оптимальности) является наиболее трудной и ответственной задачей в теории принятия решений. Однако конкретная ситуация никогда не бывает настолько неопределенной, чтобы нельзя было получить хотя бы частичной информации относительно вероятностного распределения состояний природы. В этом случае, оценив распределение вероятностей состояний природы, применяют метод Байеса-Лапласа, либо проводят эксперимент, позволяющий уточнить поведение природы.

Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин невелико, лучше пользоваться критериями минимакса или Сэвиджа.

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1–10 определить нижнюю и верхнюю цену игры. Установить, имеет ли игра седловую точку. Если да, то найти решение игры.

Задача 1.

	B1	B2	B3	B4
A1	8	6	2	8
A2	8	9	4	5
A3	7	5	3	5

Задача 2.

	B1	B2	B3	B4
A1	4	-4	-5	6
A2	-3	-4	-9	-2
A3	6	7	-8	-9
A4	7	3	-9	5

Задача 3.

	B1	B2	B3	B4
A1	1	9	6	0
A2	-2	3	8	4
A3	-5	-2	10	-3
A4	7	4	-2	-5

Задача 4.

	B1	B2	B3	B4
A1	-1	9	6	8
A2	-2	10	4	6
A3	5	3	0	7
A4	7	-2	8	4

Задача 5.

	B1	B2	B3	B4
A1	0,8	0,6	0,2	-0,8
A2	-0,8	0,9	-0,4	0,5
A3	1,7	0,5	0,3	0,6

Задача 6.

	B1	B2	B3	B4
A1	3	7	1	3
A2	4	8	0	-6
A3	6	-9	-2	4

Задача 7.

	B1	B2	B3	B4
A1	10	40	12	9
A2	17	16	13	14
A3	23	8	10	25

Задача 8.

	B1	B2	B3	B4
A1	-2	1	9	-2
A2	-2	5	4	6
A3	3	2	0	0
A4	7	-2	8	4

Задача 9.

	B1	B2	B3	B4
A1	-3	2	9	6
A2	-2	5	4	6
A3	5	3	1	-5
A4	8	-2	8	4

Задача 10.

	B1	B2	B3	B4
A1	-8	6	0	7
A2	3	-1	4	4
A3	5	4	3	4

Задача 11.

Найти оптимальную смешанную стратегию S_A^* игрока A в матричной игре

$$\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.

Найти оптимальную смешанную стратегию S_B^* игрока *B* в матричной игре

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 13.

Найти цену матричной игры

$$\begin{pmatrix} 24 & -11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 14.

Игрок *A* прячет в одной из рук монету. Игрок *B* пытается угадать руку с монетой. Если *B* не угадывает, то *A* получает от *B* 1 у.е. Если *B* угадывает руку с монетой и эта рука правая, то он получает от *A* 1 у.е. Если *B* находит монету в левой руке, то он получает от *A* 2 у.е. Определить оптимальные стратегии поведения для каждого игрока и средний выигрыш для *A,* применяя смешанные стратегии.

Задача 15.

Торговая организация *A* выделяет 1 млн. руб. на закупку товара на реализацию. Имеется выбор между закупкой товаров Т1 или Т2. Ожидаемая прибыль зависит от того, какой товар Т1 или Т2 будет закупать конкурент *B*. Если оба будут закупать Т1, то ввиду конкуренции *A* понесет убытки в 300 тыс. руб. Если оба будут закупать Т2, то по той же причине *A* понесет убытки в 150 тыс. руб. Если *A* закупит Т1 а *B* закупит Т2, то прибыль *A* составит 700 тыс. руб. Если *A* закупит Т2 а *B* закупит Т1, то прибыль *A* составит 550 тыс. руб. Как лучше поступить игрокам при оптимальном поведении? Решить задачу, применяя смешанные стратегии.

Задача 16.

Директор торговой фирмы, продающей телевизоры марки «Zarya» решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин вотдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации S_1, S_2, S_3, S_4. Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей a_{ij} (млн. руб./год):

A \ S	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Выбрать оптимальную альтернативу для принятия решения, используя критерии Вальда, Гурвица (степень пессимизма γ принять равной 0,7), Сэвиджа и Лапласа (вероятности развития ситуаций полагаются равными $q_j = \frac{1}{4}$).

Задача 17.

Нефтяная компания собирается построить в районе крайнего севера нефтяную вышку. Имеется 4 проекта A_1, A_2, A_3, A_4. Затраты на строительство (млн. руб.) зависят от того, какие погодные условия будут в период строительства. Возможны 5 вариантов погоды S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Матрица затрат имеет вид:

A \ S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	12	8	10	5
A_2	9	10	7	8	9
A_3	6	8	15	9	7
A_4	9	10	8	11	7

Выбрать оптимальный проект для строительства используя критерии Вальда, Гурвица (степень пессимизма γ принять равной 0,6), Сэвиджа и Лапласа (вероятности вариантов погоды полагаются равными $q_j = \frac{1}{5}$).

Задача 18.

В приближении посевного сезона фермер Иванов имеет четыре альтернативы: A_1 – выращивать кукурузу; A_2 – выращивать пшеницу; A_3 – выращивать овощи; A_4 – использовать имеющуюся землю под пастбище. Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые можно условно разделить на четыре категории: B_1 – сильные осадки; B_2 – умеренные осадки; B_3 – незначительные осадки; B_4 –засушливый сезон.

Платёжная матрица имеет следующий вид:

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	75	105	65	45
A_2	70	60	55	40
A_3	80	90	35	50
A_4	95	100	50	55

Что должен сеять Иванов? Задачу решить, применяя критерии Вальда, Гурвица (степень пессимизма γ принять равной 0,7), Сэвиджа и Лапласа (вероятности развития ситуаций полагаются равными $q_j = \frac{1}{4}$).

Задача 19.

Используя критерий Байеса-Лапласа, определить оптимальную стратегию в статистической игре, потери которой представлены в таблице:

B / X	B_1	B_2	B_3	B_4
X_1	3	5	2	1
X_2	1	3	7	2
X_3	4	1	5	2
X_4	6	2	4	1
q_j	0,4	0,3	0,2	0,1

Контрольные вопросы

1. Дайте определения основным понятиям теории игр: игра, игроки, правила игры, выигрыш, ход игры, парная игра, стратегия игрока, оптимальная стратегия, решение игры.

2. Дайте определение игры с нулевой суммой.

3. Какая игра называется антагонистической?

4. Понятие платёжной матрицы.

5. Что называется нижней (верхней) ценой игры? Как их найти?

6. Понятие седловой точки.

7. Дайте определение смешанной стратегии игры.

8. В каком случае решение надо искать в смешанных стратегиях?

9. Объясните понятие платежной функции.

10. Решение игры и цена игры в смешанных стратегиях.

11. Решение в смешанных стратегиях игры [2 x 2].

12. Как игру большего размера уростить до игры [2 x 2]?

13. Какие игры называются статистическими или играми с природой?

14. Как называется человек, участвующий в игре с природой?

15. В чём заключается критерий Вальда?

16. Охарактеризуйте критерий Гурвица. Коэффициент пессимизма в критерий Гурвица.

17. В чём заключается критерий Сэвиджа? Риск игрока, матрица рисков.

18. Критерий Лапласа.

19. В чём заключается принцип Байеса-Лапласа?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 16, 17

Тема: Теория массового обслуживания.

Цель работы: Познакомиться с основными понятиями теории массового обслуживания. Изучить виды систем массового обслуживания. Научиться решать задачи теория массового обслуживания.

1. Основные понятия. Классификация систем массового обслуживания

Определение. Системами массового обслуживания (СМО) называются такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди с тем, чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

- посты технического обслуживания автомобилей;
- посты ремонта автомобилей;

- персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
- станции технического обслуживания автомобилей;
- аудиторские фирмы;
- отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
- телефонные станции и так далее.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

- входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
- дисциплина очереди;
- механизм обслуживания.

Входной поток требований

Для описания ***входного потока*** требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием ***«вероятностное распределение моментов поступления требований»***. Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

Дисциплина очереди

Дисциплина очереди – это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания.

Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

- первым пришел − первый обслуживаешься;
- пришел последним − обслуживаешься первым;
- случайный отбор заявок;
- отбор заявок по критерию приоритетности;
- ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Механизм обслуживания

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы.

К характеристикам процедуры обслуживания относятся:

- продолжительность процедуры обслуживания;
- количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры.

Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием ***«вероятностное распределение времени обслуживания требований».***

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы.

В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечении некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и тому подобное).

Прежде всего, следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований.

В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование, то есть в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования.

В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс.

По характеру случайного процесса, происходящего в системе массового обслуживания (СМО), различают системы ***марковские*** и ***немарковские***.

В ***марковских*** системах входящий поток требований и выходящий поток обслуженных требований (заявок) являются пуассоновскими. Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель системы массового обслуживания. Данные модели имеют достаточно простые решения, поэтому большинство известных приложений теории массового обслуживания используют марковскую схему.

В случае ***немарковских*** процессов задачи исследования систем массового обслуживания значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ.

Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают ***два основных вида*** СМО:

- ***системы с отказами***, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;

- ***системы с ожиданием*** (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов.

Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ***ограниченным ожиданием*** и системы с ***неограниченным ожиданием***.

В системах с ***ограниченным ожиданием*** может ограничиваться:

- длина очереди;

- время пребывания в очереди.

В системах с ***неограниченным*** ожиданием заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживание неограниченно долго, то есть пока не подойдет очередь.

Все системы массового обслуживания различают ***по числу каналов*** обслуживания:

- ***одноканальные*** системы;

- ***многоканальные*** системы.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

Характеристики эффективности СМО

Каждая СМО в зависимости от своих параметров: характера потока заявок, числа каналов обслуживания и их производительности, а также от правил организации работы, обладает определенной ***эффективностью функционирования*** (пропускной способностью), позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок.

Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Для достижения этой цели ставятся ***задачи теории массового обслуживания***, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров): характера потока заявок, числа каналов и их производительности и правил работы СМО.

В качестве ***характеристик эффективности*** функционирования СМО можно выбрать три основные группы (обычно средних) показателей:

1. Показатели ***эффективности использования*** СМО:

1.1. Абсолютная пропускная способность СМО – среднее число заявок, которое сможет обслужить СМО в единицу времени;

1.2. Относительная пропускная способность СМО – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших за это же время заявок;

1.3. Средняя продолжительность периода занятости СМО;

1.4. Коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок и тому подобное;

2. Показатели ***качества обслуживания*** заявок:

2.1. Среднее время ожидания заявки в очереди;

2.2. Среднее время пребывания заявки в СМО;

2.3. Вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания;

2.4. Вероятность того, что вновь поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию;

2.5. Закон распределения времени ожидания заявки в очереди;

2.6. Закон распределения времени пребывания заявки в СМО;

2.7. Среднее число заявок, находящихся в очереди;

2.8. Среднее число заявок, находящихся в СМО и тому подобное;

3. Показатели ***эффективности функционирования пары*** «СМО – клиент», где под «клиентом» понимают всю совокупность заявок или некий их источник.

К числу таких показателей относится, например, средний доход, приносимый СМО в единицу времени и тому подобное.

Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания порождает в СМО случайный процесс.

Определение. Случайным процессом (или случайной функцией) называется соответствие, при котором каждому значению аргумента (в данном случае – моменту из промежутка времени проводимого опыта) ставится в соответствие случайная величина (в данном случае – состояние СМО).

Поэтому для решения задач теории массового обслуживания необходимо изучить случайный процесс, протекающий в СМО, то есть необходимо построить и проанализировать его математическую модель. Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если этот случайный процесс удовлетворяет определенным условиям, которые будут рассмотрены ниже.

2. Случайные процессы с дискретными состояниями

Случайный процесс, протекающий в СМО, состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое: меняется число занятых каналов, число заявок, стоящих в очереди и тому подобное.

Это означает, что СМО представляет собой физическую систему ***дискретного типа*** с конечным (или счетным) множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, в момент, когда осуществляется какое-то событие (приход новой заявки, освобождение канала, уход заявки из очереди и тому подобное).

Рассмотрим физическую систему X с конечным множеством состояний $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В любой момент времени t система X может быть в одном из этих состояний. Обозначим $p_k(t)$ (k =1,2,...,n) вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии x_k.

Очевидно, для любого t

$$\sum_k p_k(t) = 1.$$

Случайные процессы с дискретными состояниями бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.

Первые отличаются тем, что переходы из состояния в состояние могут происходить только в строго определенные, разделенные конечными интервалами моменты времени $t_1, t_2, \ldots$.

Случайные процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы из состояния в состояние возможен в любой момент времени t.

В качестве примера дискретной системы X, в которой протекает случайный процесс с непрерывным временем, рассмотрим группу из n самолетов, совершающих налет на территорию противника, обороняемую системой ПВО. Ни момент обнаружения группы, ни момент начала работы пусковых установок системы ПВО заранее не известны.

Различные состояния системы соответствуют различному числу пораженных самолетов в составе группы:

x_0 – не уничтожено ни одного самолета,

x_1 – уничтожен ровно один самолет,

…………………………………….

x_n – уничтожены все n самолетов.

Схема возможных состояний системы и возможных переходов из состояния в состояние показана на рисунке 1 (такая схема называется ***графом состояний***).

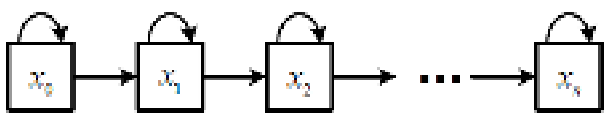

Рисунок 1 − Схема системы с необратимыми переходами

Стрелками показаны возможные переходы системы из состояния в состояние. Закругленная стрелка, направленная из состояния x_k в него же, означает, что система может не только перейти в соседнее состояние x_{k+1}, но и остаться в прежнем состоянии.

Для данной системы характерны ***необратимые переходы*** (уничтоженные самолеты не восстанавливаются); в связи с этим из состояния x_n никакие переходы в другие состояния уже невозможны.

Отметим, что граф состояний на рис. 1 показывает только переходы из состояния в соседнее состояние и не показывает «перескоки» через состояние: эти прескоки отброшены как практически невозможные. Действительно, для того чтобы система «перескочила» через состояние, нужно, чтобы строго одновременно были поражены два или более самолета, а вероятность такого события равна нулю.

Случайные процессы, протекающие в СМО, как правило, представляют собой процессы с непрерывным временем. Это связано со случайностью потока заявок.

В противоположность системе с необратимыми переходами, рассмотренной в предыдущем примере, для СМО также характерны ***обратимые переходы***: занятый канал может освободиться.

В качестве примера рассмотрим одноканальную СМО (например, одну телефонную линию), в которой заявка, заставшая канал занятым, не становится в очередь, а покидает систему (получает «отказ»).

Это – дискретная система с непрерывным временем и двумя возможными состояниями:

x_0 – канал свободен,

x_1 – канал занят.

Переходы из состояния в состояние обратимы. Граф состояний показан на рисунке 2:

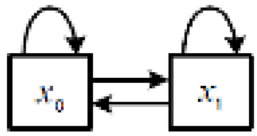

Рисунок 2 − Схема системы с обратимыми переходами

Для того чтобы описать случайный процесс, протекающий в дискретной системе с непрерывным временем, прежде всего нужно проанализировать причины, вызывающие переход системы из состояния в состояние.

Для СМО основным фактором, обусловливающим протекающие в ней процессы, является поток заявок. Поэтому математическое описание любой СМО начинается с потока заявок.

Потоки событий

Определение. Под ***потоком событий*** понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей, поток заказных писем, поступающих в почтовое отделение и тому подобное).

Поток характеризуется ***интенсивностью*** λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Определение. Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени.

Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай.

Типичным для системы массового обслуживания является случайный поток заявок.

Определение. Поток событий называется ***стационарным***, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda\ (t) = \lambda$. Это не значит, что фактическое число событий, появляющихся в единицу времени, постоянно, поток неизбежно (если только он не регулярный) имеет какие-то случайные сгущения и разрежения.

Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера: на один участок длины 1 может попасть больше, на другой – меньше событий, но среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

Определение. Поток событий называется ***потоком без последействия***, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий попавших на другой.

По сути, это означает, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени независимо друг от друга, вызванные каждое своими собственными причинами. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А вот поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них).

Определение. Поток событий называется ***ординарным***, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов – неординарен.

Определение. Поток событий называется ***простейшим*** (или стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия.

Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин: при наложении достаточного большого числа n независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i (i =1, 2, ..., n)) получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью λ, равной сумме интенсивностей входящих потоков, то есть

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Название «пуассоновский» связано с тем, что для простейшего потока число m событий, попадающих на произвольный интервал времени (0, t), распределено по закону Пуассона

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!} . \tag{29}$$

В частности, вероятность того, что за время t не произойдет ни одного события (m = 0), равна

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{30}$$

Пример 12. На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ = 1,2 вызовов в минуту. Найти вероятность того, что за две минуты:

а) не придет ни одного вызова;

б) придет ровно один вызов;

в) придет хотя бы один вызов.

Решение. Случайная величина X – число вызовов за две минуты – распределена по закону Пуассона с параметром

$$\lambda t = 1{,}2\cdot 2 = 2{,}4.$$

а) Вероятность того, что вызовов не будет ($m = 0$), вычислим по формуле (30):

$$P_0(2) = e^{-2{,}4} \approx 0{,}091.$$

б) Вероятность одного вызова ($m = 1$) вычислим по формуле (29):

$$P_1(2) = \frac{(\lambda t)^1 \cdot e^{-\lambda t}}{1!} = \frac{2{,}4 \cdot e^{-2{,}4}}{1} \approx \frac{2{,}4 \cdot 0{,}091}{1} \approx 0{,}218.$$

в) Вероятность хотя бы одного вызова равна:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P_0(2) \approx 1 - 0{,}091 \approx 0{,}909 .$$

Найдем распределение интервала времени T между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока.

В соответствии с формулой (30) вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна

$$P(T \geq t) = P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

а вероятность противоположного события, то есть функция распределения случайной величины T, есть

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} . \qquad (31)$$

Функция распределения (31) определяет показательный (экспоненциальный) закон распределения. Таким образом, *интервал времени между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение*, для которого математическое ожидание равно среднему квадратичному отклонению случайной величины:

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda},$$

и обратно по величине интенсивности потока λ.

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на *элементарный (малый)* отрезок времени Δt хотя бы одного события потока согласно (31) равна:

$$P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda\, \Delta t. \tag{32}$$

Эта приближенная формула, получаемая заменой функции $e^{-\lambda \Delta t}$ лишь двумя первыми членами ее разложения в ряд Маклорена по степеням Δt , тем точнее, чем меньше Δt .

Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями использую граф состояний, в котором каждое состояние $S_0, S_1, \ldots, S_n$ исследуемой системы изображают в виде прямоугольника, а переход из состояния S_i в S_j под воздействием простейших потоков событий показывают дугой (стрелкой).

Определение. Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями потоков λ_{ij} называют ***размеченным***.

Рассмотрим математическое описание случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на следующем примере.

Пример 13. Техническое устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Возможные состояния системы можно перечислить:

S_0 – оба узла исправны;

S_1 – первый узел ремонтируется, второй исправен;

S_2 – второй узел ремонтируется, первый исправен;

S_3 – оба узла ремонтируются.

Решение. Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3). Так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния S_1 в S_0 – под воздействием потока «окончаний ремонтов» первого узла и так далее.

Граф состояний системы изображен на рисунке 3:

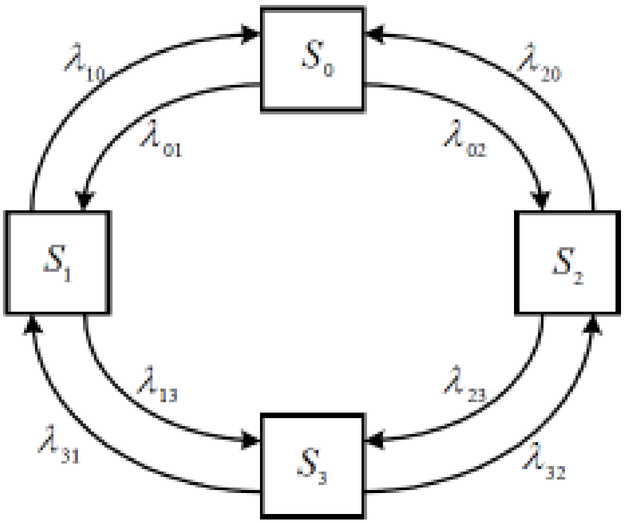

Рисунок 3 – Размеченный граф состояний СМО

На графе (рис. 3) отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2 . Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из S_0 в S_3) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из S_3 в S_0) можно пренебречь.

Напомним, что *вероятностью i-го состояния* называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. При этом

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1.$$

Рассмотрим систему в момент t и, задав малый промежуток Δt, найдем вероятность $p_0(t+\Delta t)$ того, что система в момент $t+\Delta t$ будет находиться в состоянии S_0.

Это достигается разными способами:

1) система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0, а за время Δt не вышла из него;

2) система в момент t с вероятностями $p_1(t)$ (или $p_2(t)$) находилась в состоянии S_1 (или S_2) и за время Δt перешла в состояние S_0.

Найдем вероятность первого варианта. Вывести систему из состояния S_0 (см. рис. 3) можно суммарным простейшим потоком (при наложении двух простейших потоков, как уже отмечалось, получается опять простейший поток) с интенсивностью $\lambda_{01} + \lambda_{02}$, то есть в соответствии с формулой (32), с вероятностью, приближенно равной $(\lambda_{01} + \lambda_{02})\cdot\Delta t$. А вероятность того, что система не выйдет из состояния S_0, равна $1- (\lambda_{01} + \lambda_{02})\cdot\Delta t$.

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 и не выйдет из него за время Δt (то есть вероятность первого варианта), по теореме умножения вероятностей равна:

$$p_0(t)\cdot(1- (\lambda_{01} + \lambda_{02})\cdot\Delta t).$$

Найдем вероятность второго варианта. Под действием потока интенсивностью λ_{10} (или λ_{20}) (см. рис. 3) система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{10}\cdot\Delta t$ (или $\lambda_{20}\cdot\Delta t$).

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0, по этому способу равна:

$$p_1(t)\cdot\lambda_{10}\cdot\Delta t$$

или

$$p_2(t)\cdot\lambda_{20}\cdot\Delta t.$$

Применяя теорему сложения вероятностей (для попарно несовместных событий), получим:

$$p_0(t + \Delta t) = p_1(t)\cdot\lambda_{10}\cdot\Delta t+ p_2(t)\cdot\lambda_{20}\cdot\Delta t + p_0(t)\cdot(1- (\lambda_{01} + \lambda_{02})\cdot\Delta t),$$

откуда

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\cdot\lambda_{10} + p_2(t)\cdot\lambda_{20} - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\cdot p_0(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (приближенные равенства, связанные с применением формулы (32), перейдут в точные), получим в левой части уравнения производную $p'_0(t)$ (обозначим ее для простоты p'_0):

$$p'_0 = \lambda_{10} \cdot p_1 + \lambda_{20} \cdot p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) \cdot p_0.$$

Получено дифференциальное уравнение первого порядка. Рассуждая аналогично для других состояний системы S, можно получить ***систему дифференциальных уравнений Колмогорова*** для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p'_0 = \lambda_{10} \cdot p_1 + \lambda_{20} \cdot p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) \cdot p_0 \\ p'_1 = \lambda_{01} \cdot p_0 + \lambda_{31} \cdot p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) \cdot p_1 \\ p'_2 = \lambda_{02} \cdot p_0 + \lambda_{32} \cdot p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) \cdot p_2 \\ p'_3 = \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{23} \cdot p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot p_3 \end{cases}. \tag{33}$$

Сформулируем ***правило составления уравнений Колмогорова.*** В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, умноженных на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го) состояния.

В системе (33) независимых уравнений на единицу меньше общего числа уравнений. Поэтому для решения системы необходимо добавить уравнение

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1.$$

Особенность решения дифференциальных уравнений вообще состоит в том, что требуется задавать так называемые начальные условия, в данном случае – вероятности состояний системы в начальный момент $t = 0$. Так, например, систему уравнений (33) естественно решать при условии, что в начальный момент оба узла исправны и система находилась в состоянии S_0, то есть при начальных условиях

$$p_0(0) = 1,\ p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0 \cdot$$

Как решать подобные уравнения? Вообще говоря, системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решать аналитически, но это удобно, когда число уравнений не превосходит двух (иногда – трех). Если уравнений больше, обычно их решают на ЭВМ.

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как *функции времени*. Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в *предельном стационарном режиме*, то есть при $t \to \infty$, которые называются *предельными* (*финальными*) вероятностями состояний.

Смысл предельных вероятностей состояния S_i состоит в том, что они показывают *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.*

Например, если предельная вероятность состояния S_0, то есть $p_0 = 0{,}5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

Как же вычислить предельные вероятности? Очень просто. Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим.

Для системы S с графом состояний, изображенном на рис. 3, такая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) \cdot p_0 = \lambda_{10} \cdot p_1 + \lambda_{20} \cdot p_2 \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13}) \cdot p_1 = \lambda_{01} \cdot p_0 + \lambda_{31} \cdot p_3 \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23}) \cdot p_2 = \lambda_{02} \cdot p_0 + \lambda_{32} \cdot p_3 \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot p_3 = \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{23} \cdot p_2 \end{cases}. \tag{34}$$

Систему можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться правилом, согласно которому слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Эту систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными p_0, p_1, p_2, p_3, казалось бы, вполне можно решить. Однако уравнения (34) однородны (не имеют свободного члена) и, значит, определяют неизвестные только с точностью до произвольного множителя.

В этом случае мы можем воспользоваться ***нормировочным условием***

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1 \tag{35}$$

и с его помощью решить систему.

При этом одно (любое) из уравнений можно отбросить (оно вытекает как следствие из остальных), то есть заменить условием нормировки (35).

Пример 14. Найти предельные вероятности для системы S (см. рис.3 и соответствующий ему пример 13, стр. 73) при $\lambda_{01} = 1$, $\lambda_{02} = 2$, $\lambda_{10} = 2$, $\lambda_{13} = 2$, $\lambda_{20} = 3$, $\lambda_{23} = 1$, $\lambda_{31} = 3$, $\lambda_{32} = 2$.

Решение. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной СМО, в соответствии с формулами (34-35) имеет вид

$$\begin{cases} (1+2)\cdot p_0 = 2\cdot p_1 + 3\cdot p_2 \\ (2+2)\cdot p_1 = 1\cdot p_0 + 3\cdot p_3 \\ (3+1)\cdot p_2 = 2\cdot p_0 + 2\cdot p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} 0$$

или

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2 \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3 \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Замечание. Здесь вместо последнего уравнения системы (34) записали нормировочное условие (35).

Решив систему, получим $p_0 = 0{,}4$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}27$, $p_3 = 0{,}13$, то есть в предельном стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находиться в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% – в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% – в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% времени – в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются).

3. Системы массового обслуживания с отказами

В качестве ***показателей эффективности*** СМО с отказами будем рассматривать:

- A – ***абсолютную пропускную способность*** СМО, то есть среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

- Q – ***относительную пропускную способность***, то есть среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой (или вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена);

- $P_{отк}$ – ***вероятность отказа*** – вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной;

- $\bar{k}$ – ***среднее число занятых каналов*** (для многоканальной системы).

Одноканальная система с отказами

Рассмотрим следующую задачу. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.

Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, – простейшие. К ним относится и поток обслуживаний – поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом.

Поскольку среднее время между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока обратно по величине интенсивности потока, а для потока обслуживаний это время есть время обслуживания (одной заявки), то среднее время обслуживания $\overline{T}_{об} = \frac{1}{\mu}$.

Система S (СМО) имеет два состояния: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят. Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 4:

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1$$

Рисунок 4 − Размеченный граф состояний одноканальной СМО с отказами

В предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений (34) для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 \\ \mu \cdot p_1 = \lambda \cdot p_0 \end{cases},$$

то есть система вырождается в одно уравнение.

Добавляя к нему нормировочное условие

$$p_0 + p_1 = 1,$$

найдем из полученной системы предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Предельные вероятности состояний p_0 и p_1 можно выразить через средние времена простоя канала $\overline{T}_{пр}$ и обслуживания одной заявки $\overline{T}_{об}$. Для этого в формулы для вероятностей следует подставить

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}}, \quad \lambda = \frac{1}{\overline{T}_{пр}}.$$

В результате получим

$$p_0 = \frac{\overline{T}_{пр}}{\overline{T}_{об} + \overline{T}_{пр}}, \quad p_1 = \frac{\overline{T}_{об}}{\overline{T}_{об} + \overline{T}_{пр}}.$$

Предельные вероятности выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0 (когда канал свободен) и S_1 (когда канал занят), то есть определяют соответственно относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа $P_{отк}$.

Очевидно, что относительная пропускная способность Q представляет собой вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (система находится в состоянии S_0 , то есть канал свободен). Всего в единицу времени приходит в среднем λ заявок и из них обслуживается λp_0 заявок. Тогда доля обслуживаемых заявок по отношению ко всему потоку заявок определяется величиной

$$Q = \frac{\lambda p_0}{\lambda} = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа $P_{отк}$ равна относительному времени, в течение которого канал занят, то есть

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Абсолютную пропускную способность (или среднее число заявок, поступающих в СМО в единицу времени) найдем, умножив относительную пропускную способность Q на интенсивность потока заявок:

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Пример 15. В фирму поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью $\lambda = 90$ вызовов в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\overline{T}_{об} = 2$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Решение. Средняя продолжительность разговора по телефону

$$\overline{T}_{об} = 2 \text{ мин} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \text{часа}.$$

Интенсивность потока обслуживаний

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}} = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30 \text{ вызовов в час.}$$

Относительная пропускная способность СМО

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{30}{90 + 30} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

то есть в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры по телефону.

Соответственно вероятность отказа СМО составит

$$P_{отк} = \frac{90}{90 + 30} = \frac{90}{120} = 0{,}75.$$

Абсолютная пропускная способность СМО

$$A = \lambda Q = 90 \cdot 0{,}25 = 22{,}5,$$

то есть в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры.

Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

Многоканальная система с отказами

Здесь мы рассмотрим одну из первых по времени, «классических» задач теории массового обслуживания. Эта задача возникла из практических нужд телефонии и была решена в 1909 г. датским инженером-математиком Эрлангом.

Задача ставится так: имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): S_0, S_1, …, S_n, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок, то есть занято k каналов.

Граф состояний системы приведен на рисунке 5:

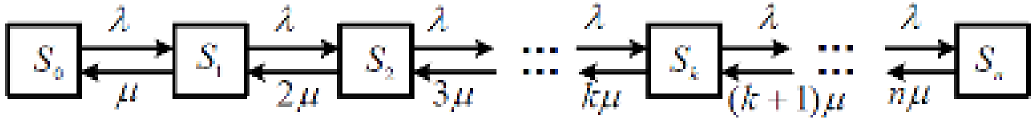

Рисунок 5 − Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами

Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое с одной и той же интенсивностью λ. Интенсивность же потока обслуживаний, переводящих систему из любого правого состояния в соседнее левое, постоянно меняется в зависимости от состояния. Действительно, если СМО находится в состоянии S_2 (два канала заняты), то она может перейти в состояние S_1 (один канал занят), когда закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, то есть суммарная интенсивность их потоков обслуживаний будет 2μ.

Аналогично суммарный поток обслуживаний, переводящий СМО из состояния S_3 (три канала заняты) в S_2, будет иметь интенсивность 3μ, то есть может освободиться любой из трех каналов и так далее.

В соответствии с графом (рис. 5) пропускную способность одного канала обозначим $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, двух каналов – $\rho = \dfrac{\lambda}{2\mu}$, трех каналов – $\rho = \dfrac{\lambda}{3\mu}$ и так далее.

Будем называть величину ρ ***приведенной интенсивностью потока заявок*** или ***интенсивностью нагрузки канала***. Она выражает среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки.

Тогда предельные вероятности состояний для рассматриваемой СМО:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}. \tag{36}$$

При этом

$$p_1 = \rho\, p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \tag{37}$$

Формулы (36) и (37) для предельных вероятностей получили названия *формул Эрланга* в честь основателя теории массового обслуживания.

Запишем ***основные показатели эффективности*** функционирования многоканальной СМО с отказами.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все n каналов системы будут заняты, то есть

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right). \qquad (38)$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k}$ − это математическое ожидание числа занятых каналов, которое определяется по известной формуле математического ожидания

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot p_i ,$$

где p_i – вероятность того, что i каналов будут заняты, k_i – количество занятых каналов.

Замечание. Величину $\bar{k}$ можно найти проще. Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, то

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu},$$

Учитывая формулу (38), получаем:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right).$$

Пример 16. Возьмем данные предыдущего примера 15 (стр. 80): в фирму поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью $\lambda = 90$ вызовов в час, средняя продолжительность разговора по телефону $\overline{T}_{об} = 2$ мин.

Определить оптимальное число телефонных номеров в фирме, если условием оптимальности считать удовлетворение из каждых 100 заявок на переговоры в среднем не менее 90 заявок (то есть относительная пропускная способность $Q \geq 0{,}9$).

Решение. Средняя продолжительность разговора по телефону (время обслуживания)

$$\overline{T}_{об} = 2 \text{ мин} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \text{часа.}$$

Вычислим интенсивность потока обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}} = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30 \text{ вызовов в час.}$$

Интенсивность нагрузки канала

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{90}{30} = 3,$$

То есть за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $\overline{T}_{об} = 2$ поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Относительная пропускная способность СМО

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{30}{90 + 30} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

вероятность отказа СМО

$$P_{отк} = \frac{90}{90 + 30} = \frac{90}{120} = 0{,}75,$$

абсолютная пропускная способность СМО

$$A = \lambda Q = 90 \cdot 0{,}25 = 22{,}5.$$

Количество каналов (телефонов) $n = 1$.

Будем постепенно увеличивать число каналов (телефонных номеров) n=2, 3, 4, ... и определим для получаемой n - канальной СМО характеристики обслуживания.

Возьмем количество каналов (телефонов) n = 2. Вероятность, что все каналы свободны по формуле (36) равна:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2!}} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2}} = \frac{1}{8{,}5} \approx 0{,}118.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = 1 - \frac{3^2}{2!} \cdot 0{,}118 = 1 - \frac{9}{2} \cdot 0{,}118 \approx 0{,}469.$$

Абсолютная пропускная способность по формуле (38) равна:

$$A = \lambda \cdot Q = 90 \cdot 0{,}469 = 42{,}21.$$

По условию задачи, относительная пропускная способность Q должна быть не менее 0,9. Видно, что величина Q значительно меньше требуемого значения. Значит необходимо увеличить количество каналов (телефонов).

Возьмем количество каналов (телефонов) n = 3. Вероятность, что все каналы свободны по формуле (36) равна:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = 1 - \frac{3^3}{3!} \cdot 0{,}077 = 1 - \frac{27}{6} \cdot 0{,}077 \approx 0{,}654.$$

Абсолютная пропускная способность по формуле (38) равна:

$$A = \lambda \cdot Q = 90 \cdot 0{,}654 = 58{,}82.$$

Величина Q=0,654 по-прежнему значительно меньше требуемого значения 0,9. Значит необходимо еще увеличить количество каналов (телефонов).

Возьмем количество каналов (телефонов) n = 4. Вероятность, что все каналы свободны по формуле (36) равна:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}} =$$

$$= \frac{1}{16,375} \approx 0,061.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = 1 - \frac{3^4}{4!} \cdot 0,077 = 1 - \frac{81}{24} \cdot 0,061 \approx 0,794\,.$$

Абсолютная пропускная способность по формуле (38) равна:

$$A = \lambda \cdot Q = 90 \cdot 0,794 = 71,47.$$

Величина Q=0,794 по-прежнему меньше требуемого значения 0,9. Значит необходимо еще увеличить количество каналов (телефонов).

Возьмем количество каналов (телефонов) n = 5. Вероятность, что все каналы свободны по формуле (36) равна:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120}} == \frac{1}{18,4} \approx 0,054.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = 1 - \frac{3^5}{5!} \cdot 0,054 = 1 - \frac{243}{120} \cdot 0,054 \approx 0,891.$$

Абсолютная пропускная способность по формуле (38) равна:

$$A = \lambda \cdot Q = 90 \cdot 0,891 = 80,16$$

Величина Q=0,891 по-прежнему меньше требуемого значения 0,9. Значит необходимо еще увеличить количество каналов (телефонов).

Возьмем количество каналов (телефонов) n = 6.

Вероятность, что все каналы свободны по формуле (36) равна:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{6!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120} + \frac{729}{720}} == \frac{1}{17{,}388} \approx 0{,}058.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 = 1 - \frac{3^6}{6!} \cdot 0{,}058 = 1 - \frac{729}{720} \cdot 0{,}058 \approx 0{,}941.$$

Абсолютная пропускная способность по формуле (38) равна:

$$A = \lambda \cdot Q = 90 \cdot 0{,}941 = 84{,}71$$

Величина Q=0,941 больше требуемого значения 0,9, следовательно, в фирме необходимо установить 6 телефонных номеров (в этом случае Q=0,941). При этом в час будут обслуживаться в среднем 84–85 заявок (A=84,71), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов) $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{84{,}71}{30} \approx 2{,}82.$

4. Системы массового обслуживания с ожиданием (очередью)

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Пусть имеется одноканальная СМО с неограниченной очередью (например, телефон-автомат с одной будкой). То есть на СМО не наложены никакие ограничения ни по длине очереди, ни по времени ожидания.

Входящий поток заявок на обслуживание – простейший поток с интенсивностью λ. Поскольку обслуживание ведет один канал, то обслуживание заявок производится с одинаковой интенсивностью μ для всех состояний.

Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний S_0, S_1, S_2, …, S_k,… по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0 – канал свободен;

S_1 – канал занят, обслуживает заявку (очереди нет);

S_2 – канал занят (одна заявка стоит в очереди);

……………………………………………………

S_k – канал занят (k-1 заявка стоит в очереди);

…………………………………………………

Размеченный граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рисунке 6:

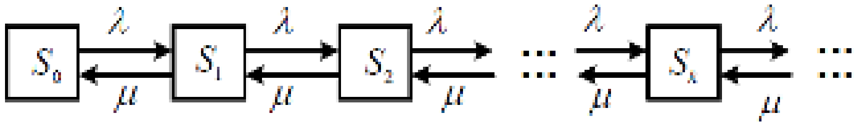

Рисунок 6 − Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием

Для такого процесса доказано, что если среднее число приходящих заявок в единицу времени меньше среднего числа обслуживаемых заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

то предельные вероятности существуют.

Если $\rho \geq 1$, то очередь растет до бесконечности.

Для определения предельных вероятностей состояний для случая одного канала n = 1 в соответствии с формулами (36–37) можно записать

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1}.$$

Предельные вероятности могут существовать лишь при $\rho < 1$.

Ряд, стоящий в скобках, сходится к сумме $\dfrac{1}{1-\rho}$, так как это геометрический ряд со знаменателем меньшим единицы. Поэтому можно записать для первого члена прогрессии

$$p_0 = 1 - \rho,$$

а предельные вероятности других состояний определяются по формулам

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = \rho \cdot (1-\rho),$$

$$p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = \rho^2 \cdot (1-\rho),$$

…………………………….

$$p_k = \rho^k \cdot p_0 = \rho^k \cdot (1-\rho),$$

…………………………..

Анализируя полученные зависимости, можно сделать вывод, что предельные вероятности состояний образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho < 1$. Тогда в этой прогрессии первый член p_0 – наибольший.

Это значит, что если СМО справляется с потоком заявок, то наиболее вероятным ее состоянием из всех возможных состояний будет отсутствие заявок в системе.

Рассмотрим ***основные показатели эффективности*** СМО с ожиданием:

Среднее число заявок в системе $L_{сист}$ определяется по формуле математического ожидания

$$L_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = (1-\rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho_k .$$

Можно показать, что эта формула преобразуется при $\rho < 1$ к виду

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием $L_{об}$ также определяется по формуле математического ожидания

$$L_{об} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = 1 - (1-\rho) = \rho.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди) $L_{оч}$ определяется как разность $L_{сист}$ и $L_{об}$

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho - \rho + \rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист}$ или в очереди $T_{оч}$ равно среднему числу заявок в системе или в очереди, деленному на интенсивность потока заявок:

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)};$$

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}.$$

Эти зависимости называют формулами *Литтла*.

Можно показать, что эта формула преобразуется при $\rho < 1$ к виду

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Пример 17. Минимаркет с одним кассиром обслуживает покупателей, интенсивность входящего потока которых равна 20 покупателей в час. Интенсивность потока обслуживания равна 25 покупателей в час.

Найти показатели эффективности СМО, а также вероятность, что в очереди стоят не более двух покупателей.

Решение. Выпишем исходные данные:

$$\lambda = 20,\ \mu = 25;\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0{,}8.$$

Верояность того, что кассир свободен, вычислим по формуле

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Тогда вероятность того, что кассир занят равна:

$$p_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Среднее число покупателей в минимаркете

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4\,(\text{покупателя}).$$

Среднее число покупателей в очереди

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2\,(\text{покупателя}).$$

Среднее время простоя в очереди

$$T_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)} = \frac{0{,}8^2}{20 \cdot (1-0{,}8)} = 0{,}16 \text{ часов} = 9{,}6 \text{ минут.}$$

Среднее время нахождения в минимаркете

$$T_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)} = \frac{0{,}8}{20 \cdot (1-0{,}8)} = 0{,}2 \text{ часа} = 12 \text{ минут.}$$

Вероятность того, что в очереди стоят не более двух покупателей, определим по формуле

$$P(n \le 2) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3,$$

где

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = \rho \cdot (1-\rho) = 0{,}8 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}16,$$

$$p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = \rho^2 \cdot (1-\rho) = 0{,}8^2 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}128,$$

$$p_3 = \rho^3 \cdot p_0 = \rho^3 \cdot (1-\rho) = 0{,}8^3 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}1024.$$

Тогда

$$P(n \le 2) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 \approx 0{,}59.$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Предельные вероятности состояний СМО для этого случая определяются по следующим формулам:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! \cdot (n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0,$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0,$$

……………………

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 ,$$

……………………

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0 ,$$

……………………

Приведем основные показатели эффективности м*ногоканальной СМО с неограниченной очередью.*

Среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди) $L_{оч}$ определяется как

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} .$$

Среднее число заявок в системе $L_{сист}$ определяется по формуле:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho .$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho .$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n! \cdot (n - \rho)} \cdot p_0 .$$

СМО с ограниченной очередью

СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено. Если заявка поступает в систему, когда все каналы заняты, то она покидает систему необслуженной.

Очевидно, что для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких СМО может быть использован тот же подход, только с той разницей, что суммировать надо не бесконечную прогрессию, а конечную.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.

В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что

а) за 1 минутун не поступит ни одного заказа;

б) за 10 минут поступит не более трех заказов.

Задача 2.

В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим, и зная, что ресторан открывается в 11.00, определить:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторане будет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18;

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане окажется новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

Задача 3.

В минимаркете две кассы. Найти относительное время пребывания этой СМО в состояниях:

S_0 – обе кассы свободны;

S_1 – одна касса свободна, а другая занята;

S_2 – обе кассы заняты,

если $\lambda_{01} = 4$, $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_{10} = 3$, $\lambda_{21} = 2$.

Задача 4.

Торговая фирма выполняет заказы на пробретение товаров по телефону. В настоящее время в офисе установлен один телефон. Интенсивность входящего потока заявок составляет 30 заявок в час. Длительность оформления заказа в среднем составляет 5 минут.

Определить показатели эффективности функционирования такой СМО.

Сколько телефонов нужно поставить в офисе, чтобы относительная пропускная способность СМО была не менее 0,75?

Задача 5.

В парикмахерской работает только один мужской мастер. Среднее время стрижки одного клиента составляет 20 мин. Клиенты в среднем приходят каждые 25 мин. Средняя стоимость стрижки составляет 60 руб. Как в первую смену с 9 до 15, так и во вторую – с 15 до 21, работают по одному мастеру. Провести анализ работы системы обслуживания. Определить ежедневный «чистый» доход каждого мастера, если он получает только 30% от выручки (остальное уходит на оплату аренды помещения, налоги, амортизацию оборудования и проч.).

Задача 6.

Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей = 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

- относительной пропускной способности Q;

- абсолютной пропускной способности A;

- вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Задача 7.

Железнодорожная сортировочная горка, на которую подаётся поток составов с интенсивностью два состава в час, представляет собой одноканальную систему массового обслуживания с неограниченной очередью. Среднее время обслуживания на горке 20 минут. Найти среднее число составов в очереди, среднее время пребывания составов в СМО, среднее время пребывания составов в очереди.

Задача 8.

Имеется двухканальная СМО с отказами, на её вход поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки – 0,8 часа. Каждая обслуженная заявка приносит доход в размере 120 рублей. Содержание каждого канала обходится в80 рублей в час. Выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трёх?

Задача 9.

Подсчитать относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число заявок в очереди, среднее число заявок в СМО, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в СМО для одноканальной СМО, с тремя местами в очереди при условии, что заявки поступают с интенсивностью 4 заявки в час, а среднее время обслуживания заявки – 0,5 часа. Как изменятся эти характеристики, если увеличить число мест в очереди до четырёх?

Задача 10.

Система массового обслуживания – билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продаёт билеты в пункты А и В. Пассажиров, желающих купить билет в пункт А , приходит в среднем трое за 20 минут, в пункт В – двое за 30 минут. Поток пассажиров простейший. Кассир в среднем обслуживает трёх пассажиров за 10 минут. Время обслуживания подчиняется показательному закону. Найти вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способности, среднее число пассажиров в очереди, среднее число пассажиров в СМО.

Задача 11.

На вход одноканальной СМО с отказами поступает поток вызовов с интенсивностью 0,4 вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания – 3 минуты. Найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО, вероятность отказа, среднее число занятых каналов.

Задача 12.

Автозаправочная станция имеет две колонки, площадка возле неё допускает одновременное ожидание не более четырёх машин. Поток автомашин, прибывающих на станцию, простейший, с интенсивностью 1 машина в минуту. Время обслуживания автомашины определяется показательным законом со средним временем обслуживания 2 минуты. Найти вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способности, среднее число машин в СМО.

Задача 13.

В кассу лодочной станции обращаются желающие прокатиться на лодке с интенсивностью 0,5 обращений в час. Средняя продолжительность обслуживания 0, 1 часа. Лодки возвращаются через 3 часа. Найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО, вероятность отказа, среднее число занятых лодок.

Задача 14. Имеются две театральные кассы. В эти кассы обращаются зрители с интенсивностью 10 заявок в час. Среднее время обслуживания одной заявки – 0,2 часа. Каждая обслуженная заявка приносит доход в размере 1200 рублей. Содержание каждого канала обходится в 20 рублей в час. Выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трёх?

Задача 15.

На вход одноканальной СМО с отказами поступает поток вызовов с интенсивностью 0,6 вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания - 5 минуты. Найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО, вероятность отказа, среднее число занятых каналов.

Задача 16.

Подсчитать относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число заявок в очереди, среднее число заявок в СМО, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в СМО для одноканальной СМО, с 4 местами в очереди при условии, что заявки поступают с интенсивностью 5 заявки в час, а среднее время обслуживания заявки – 0,6 часа. Как изменятся эти характеристики, если увеличить число мест в очереди до шести?

Задача 17.

Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок 40 заявок в час, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки – 1 минута.

Задача 18.

Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 72 заявки в час, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки – 2,5 минуты.

Какое минимальное число каналов нужно иметь этой СМО, чтобы ее относительная пропускная способность была не менее 0,9?

Контрольные вопросы

1. Дайте определение системы массового обслуживания (СМО).
2. Назовите основные компоненты СМО.
3. Как описывается входной поток требований?
4. Что такое дисциплина очереди?
5. Чем определяется механизм обслуживания СМО?
6. Чем определяется структура обслуживающей системы СМО?
7. Что является предметом теории массового обслуживания?
8. Какими бывают СМО по числу каналов?
9. Цель теории массового обслуживания.

10. Приведите характеристики эффективности функционирования СМО.
11. Что такое граф состояний СМО?
12. Дайте определение потока событий.
13. Что такое интенсивность потока?
14. Какой поток событий называется регулярным?
15. Какой поток событий называется стационарным?
16. Дайте определение потока событий без последействий.
17. Какой поток событий называется ординарным?
18. Какой поток событий называется простейшим?
19. Какой граф состояний называется размеченным?
20. Правило составления уравнений Колмогорова.
21. Смысл предельных вероятностей системы.
22. Показатели эффективности СМО с отказами.
23. Охарактеризуйте одноканальную СМО с отказами.
24. Охарактеризуйте многоканальную СМО с отказами.
25. Что такое интенсивность нагрузки канала?
26. Что такое относительная пропускная способность?
27. Показатели эффективности СМО с ожиданием.
28. Охарактеризуйте одноканальную СМО с неограниченной очередью.
29. Охарактеризуйте многоканальную СМО с неограниченной очередью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов, А.М. Экономико-математические методы и модели / А.М. Попов, В.Н. Сотников; под ред. А.М. Попова. – М.: Юрайт, 2011.

2. Кремер, Н.Ш. Исследование операций: учебное пособие / Н.Ш. Кремер. – М.: Юрайт, 2012.

3. Соболь, Б.В. Методы оптимизации: практикум / Б.В. Соболь, Б.Ч. Месхи, Г.И. Каныгин. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2009.

4. Шикин, Е.В. Математические методы и модели в управлении / Е.В.Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.: Дело, 2002.

5. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988.

6. Дюбин, Г.Н. Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. – М.: Наука, 1981.

7. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980.

8. Дубров, А.М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: учебное пособие / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев. – М.: Финансы и статистика, 1999.

Коптева Нина Алексеевна
доктор технических наук, профессор

Удинцова Надежда Михайловна
кандидат технических наук, доцент

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ
Часть 3:
Теория игр и принятие решений
в условиях риска и неопределенности.
Теория массового обслуживания

Практикум

Редактор И.А. Перкова
Верстка Г.С. Кудрявцева
Дизайн обложки С.П. Вдовикина

Подписано в печать 13.06.2019 г.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 5,8. Тираж 20 экз. Заказ № 21.

Отдел информационных технологий и издательской деятельности
Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВО Донской ГАУ
347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15.