МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Математические основы решения задач в агроинженерии

Часть 2

***Учебное пособие содержит сведения,
необходимые для формирования общепрофессиональных компетенций
при подготовке бакалавров по направлению 35.03.06 Агроинженерия,
и рекомендуется Федеральным УМО
для использования в учебном процессе***

Зерноград – 2025

УДК 517(075)
М34

Печатается по решению методического совета Азово-Черноморского инженерного института – филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Донской государственный аграрный университет» в г. Зерограде

Рецензенты:

доктор физико-мататематических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» ФГБОУ ВО ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова ***Пасенчук А.Э.,***

директор ФГБНУ «АНЦ «Донской»», доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН ***Пахомов В.И.***

Математические основы решения задач в агроинженерии: учебное пособие. Ч. 2 / В.В. Серёгина, М.Н. Середина, Н.М. Удинцова, Д.В. Степовой, Т.В. Жидченко, Н.Н. Грачева, Н.Б. Руденко. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2025. – 215 с.

М 34

ISBN 978-5-91833-232-0
ISBN 978-5-91833-234-4 (ч. 2)

Данное учебное пособие является второй частью учебного пособия «Математические основы решения задач в агроинженерии. Часть 1». В учебное пособие включены следующие разделы курса «Математика»: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного. Каждый раздел содержит необходимый теоретический материал, приводятся подробные решения типовых примеров и задач по каждому разделу, примеры построения математических моделей процессов, встречающихся в агроинженерной практике.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия.

ISBN 978-5-91833-232-0
ISBN 978-5-91833-234-4 (ч. 2) УДК 517(075)

© В.В. Серёгина, М.Н. Середина, Н.М. Удинцова и др., 2025
© Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……...……. 5
ЧАСТЬ 1 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ…….. 6
ГЛАВА 1 ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА…….. 6
1.1 Понятие первообразной и неопределённого интеграла….. 6
1.2 Основные свойства неопределённого интеграла..... 7
1.3 Таблица интегралов……..... 8
1.4 Методы интегрирования……..... 10
1.5 Классы интегрируемых функций……... 19
ГЛАВА 2 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ…….. 38
2.1 Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.. 38
2.2 Понятие определённого интеграла……. 41
2.3 Геометрический смысл определённого интеграла…..... 42
2.4 Механический смысл определённого интеграла……. 43
2.5 Свойства определённого интеграла……...……..... 43
2.6 Интеграл с переменным верхним пределом……..... 46
2.7 Формула Ньютона-Лейбница……. 47
2.8 Методы вычисления определённых интегралов……... 48
2.9 Геометрические приложения определённого интеграла….. 52
2.10 Решение задач механики, гидростатики, термодинамики и электродинамики…….…….. 71
2.11 Несобственные интегралы……..……. 81
ГЛАВА 3 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ……..……. 88
3.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла…..... 88
3.2 Определение двойного интеграла……..……..... 92
3.3 Геометрический смысл двойного интеграла……. 94
3.4 Физический смысл двойного интеграла…… 94
3.5 Свойства двойного интеграла……. 95
3.6 Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах…….. 96
3.7 Вычисление двойного интеграла в полярных координатах…….. 105
3.8 Геометрические приложения двойных интегралов…….. 110
3.9 Решение инженерных задач разделов механики с использованием двойных интегралов…… 116

ЧАСТЬ 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ……….. 122
ГЛАВА 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО……..……. 122
4.1 Понятие комплексного числа……..... 122
4.2 Операции над комплексными числами…….. 122
4.3 Алгебраическая форма записи комплексного числа…… 124
4.4 Геометрическое изображение комплексных чисел…….. 126
4.5 Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа……. 128
4.6 Комплексные числа в электротехнике……... 136
ГЛАВА 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ…… 140
5.1 Начальные сведения…….…. 140
5.2 Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка…….…... 141
5.3 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными…….……. 144
5.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка……...…….. 150
5.5 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли……..…….. 154
5.6 Основные понятия о дифференциальных уравнениях второго порядка…….……..... 163
5.7 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка……. 166
5.8 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка……...…… 176
5.9 Моделирование механических и электродинамических процессов……..... 195
5.10 Системы дифференциальных уравнений первого порядка……..... 204
ЛИТЕРАТУРА……. 212

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие является второй частью учебного пособия «Математические основы решения задач в агроинженерии. Часть 1». С точки зрения методического подхода это учебное пособие является логическим продолжением первой части, что предполагает сохранение стиля изложения, принятого в части 1. В целом обе части направлены на создание математического фундамента знаний и умений, необходимого для освоения базовых дисциплин не только естественнонаучного цикла, но и многих дисциплин технического характера.

В предлагаемом учебном пособии содержатся разделы курса «Математика», предусмотренные учебным планом направления 35.03.06 Агроинженерия, не вошедшие в первую часть пособия.

Данное учебное пособие включает в себя следующие разделы: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного. Изложение каждого из этих разделов, как и в части 1, ведется следующим образом: излагается необходимый теоретический материал, приводятся подробные решения типовых примеров и задач по каждому разделу, приводятся примеры построения математических моделей процессов, встречающихся в агроинженерной практике.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия.

Учебное пособие направлено на формирование следующих компетенций, предусмотренных федеральным государственным стандартом высшего образования соответствующего направления подготовки:

– способности решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий;

– способности применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

ЧАСТЬ 1 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

ГЛАВА 1 ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1 Понятие первообразной и неопределённого интеграла

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для всех $x \in (a;b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и при этом $F'(x) = f(x)$.

Например, каждая из функций $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3 + 1$, $F_3(x) = x^3 - 11{,}3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как $\left(x^3\right)' = 3x^2$, $\left(x^3 + 1\right)' = 3x^2$, $\left(x^3 - 11{,}3\right)' = 3x^2$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Очевидно, что по заданной функции первообразная определяется не единственным образом. В частности, указанные в приведенном примере первообразные функции $f(x) = 3x^2$ отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми. Оказывается, что это справедливо для любых первообразных фиксированной функции.

Теорема об общем виде первообразной. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задаётся формулой $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Определение. Для функции $f(x)$, определенной на интервале $(a;b)$, множество всех её первообразных на этом интервале называют неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$.

Из теоремы вытекает, что если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная.}$$

Знак « $\int$ » называется знаком неопределённого интеграла,

$f(x)$ − подынтегральной функцией,

$f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Процедуру нахождения неопределённого интеграла от заданной функции $f(x)$ называют интегрированием этой функции или «взятием неопределённого интеграла».

Отметим, что процесс интегрирования в некотором смысле является обратным к процессу дифференцирования. Однако, по производной, однозначно восстановить функцию, как отмечено выше, невозможно. Более того, в отличие от операции дифференцирования не для каждой элементарной функции существует элементарная первообразная, это означает, что не каждый неопределённый интеграл может быть выражен через элементарные функции. Интегралы такого типа принято называть «неберущимися». Например, неберущимися являются следующие интегралы:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx.$$

1.2 Основные свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Покажем это: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

Воспользовавшись формулой для дифференциала функции $df(x) = f'(x)dx$ и свойством 1, получим $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$

3. $\int dF(x) = F(x)+C.$

Так как $d(F(x)) = F'(x)dx$, то $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, то есть $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k = const$.

Действительно, $k\int f(x)dx = k\left[F(x)+C\right] = k\,F(x)+C_1 = \int k\,f(x)dx$.

5. Интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от данных функций, то есть

$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

В самом деле, если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а $G(x)$ – одна из первообразных функции $g(x)$ на интервале $(a;b)$, то

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \left[F(x)+C_1\right] \pm \left[G(x)+C_2\right] = \left[F(x)\pm G(x)\right] + \left(C_1 + C_2\right) =$$

$$= \left[F(x)\pm G(x)\right] + C = \int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx.$$

1.3 Таблица интегралов

Все формулируемые ниже формулы доказываются проверкой того, что производная (или дифференциал) правой части доказываемой формулы совпадает с подынтегральной функцией (или с подынтегральным выражением) в левой части.

Например, доказательство формулы 13, из приведённой ниже таблицы, выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C\right)' = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)' + C' = \frac{1}{a}\cdot\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{u'}{a}}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{u'}{\left(\frac{a^2+u^2}{a^2}\right)} = \frac{u'}{a^2+u^2}.$$

Это и означает, что $\int\frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$.

Таблица неопределённых интегралов:

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$

2.1. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$

2.2. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

3. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

4.1. $\int e^u du = e^u + C$

5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$

7. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$

8. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

11. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C$

13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{u}{a} + C$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{u}{a} + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

1.4 Методы интегрирования

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Под непосредственным интегрированием понимают такие равносильные преобразования подынтегрального выражения, которые делают возможным прямое применение свойств неопределённого интеграла и таблицы неопределённых интегралов.

Пример 1.1. Найти неопределённые интегралы $\int x^5 \cdot \sqrt[4]{x^3}\,dx$, $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^3}dx$.

Решение. Если подынтегральная функция представляет собой произведение или частное различных степеней x, то её представляют как степенную функцию вида x^n, а затем применяют 2 формулу таблицы интегралов.

1. $\int x^5 \cdot \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^5 \cdot x^{\frac{3}{4}}dx = \int x^{\frac{23}{4}}dx = \frac{x^{\frac{27}{4}}}{\frac{27}{4}} + C = \frac{4x^{6\frac{3}{4}}}{27} + C = \frac{4x^6\sqrt[4]{x^3}}{27} + C.$

2. $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^3}dx = \int \frac{x^{\frac{2}{5}}}{x^3}dx = \int x^{\frac{2}{5}-3}dx = \int x^{-\frac{13}{5}}dx = \frac{x^{-\frac{8}{5}}}{-\frac{8}{5}} + C = -\frac{5}{8x^{\frac{8}{5}}} + C = -\frac{5}{8x^{1\frac{3}{5}}} + C =$

$= -\frac{5}{8x\sqrt[5]{x^3}} + C.$

В примере 1.1 мы применили следующие свойства степеней:

$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$, $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$.

Пример 1.2. Найти неопределённый интеграл

$$\int\left(5x^4 - 2\cos x + \frac{3}{\sqrt{x^2-16}} + 7\right)dx.$$

Решение. $\int\left(5x^4 - 2\cos x + \frac{3}{\sqrt{x^2-16}} + 7\right)dx =$ ← применим 5 свойство и разобьём данный интеграл на четыре интеграла

$$= \int 5x^4 dx - \int 2\cos x dx + \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2-16}} + \int 7dx =$$

применим 4 свойство и вынесем в каждом интеграле постоянный множитель

$$= 5\int x^4 dx - 2\int \cos x dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} + 7\int dx =$$

формула 2 таблицы интегралов; формула 6 таблицы интегралов; формула 16 таблицы интегралов; формула 1 таблицы интегралов

$$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 2\sin x + 3\ln\left|x + \sqrt{x^2-16}\right| + 7x + C =$$

$$= x^5 - 2\sin x + 3\ln\left|x + \sqrt{x^2-16}\right| + 7x + C.$$

Пример 1.3. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^4 - 7x + 5}{x^2} dx$.

Решение. $\int \frac{x^4 - 7x + 5}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right) dx = \int x^2 dx - 7\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{1}{x^2} dx =$

Разделим почленно числитель на знаменатель; сократим дроби и применим 5 и 4 свойства; формула 2 таблицы интегралов; формула 3 таблицы интегралов; формула 2.2 таблицы интегралов

$$= \frac{x^3}{3} - 7\ln|x| + 5 \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + C = \frac{x^3}{3} - 7\ln|x| - \frac{5}{x} + C.$$

Пример 1.4. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$.

Решение. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} dx = 2\int \sin x dx = -\cos x + C.$

В числителе мы применили тригонометрическую формулу «синус двойного угла», а затем формулу 5 таблицы интегралов.

Пример 1.5. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{4x^2-8}$.

Решение. $\int \frac{dx}{4x^2-8} = \int \frac{dx}{4\left(x^2-2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-2} =$ ← применим формулу 14 таблицы интегралов, для этого преобразуем «2»

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C = \sqrt{2}\,ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Пример 1.6. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2x^2}{x^2+3}dx$.

Решение. Воспользуемся искусственным приемом: к числителю дроби прибавим и из него вычтем одно и то же число 3, после чего выполним деление числителя на знаменатель.

$$\int \frac{2x^2}{x^2+3}dx = 2\int \frac{\left(x^2+3\right)-3}{x^2+3}dx = 2\int\left(\frac{x^2+3}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}\right)dx = 2\int dx - 6\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= 2x - 6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C = x - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

1.4.2 Метод замены переменной (метод подстановки) в неопределённом интеграле

Метод подстановки основан на следующем утверждении:

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет обратную функцию $t=\psi(x)$, тогда справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\Big|_{t=\psi(x)}.$$

Эту формулу называют ***подстановкой*** или ***формулой замены переменной в неопределённом интеграле***. Смысл при применении подстановки состоит в следующем: иногда подстановку можно подобрать так, что правая часть окажется более простой, чем левая. Отметим, что конкретные подстановки могут задаваться как формулой $x=\varphi(t)$, так и формулой $t=\psi(x)$. Некоторые рекомендации по видам подстановок будут даны ниже. Здесь ограничимся следующим примером.

Пример 1.7. Найти $\int \operatorname{tg}(x-3)dx$.

Решение. Воспользуемся формулой 11 таблицы интегралов.

Так как $d(x-3)=(x-3)'dx=dx$, то

$$\int \operatorname{tg}(x-3)dx=\int \operatorname{tg}(x-3)d(x-3)=-\ln|\cos(x-3)|+C.$$

Замечание. Такой метод интегрирования называют ***методом подведения под знак дифференциала***.

Пример 1.8. Найти $\int (7x-5)^9 dx$.

Решение. Воспользуемся формулой 2 таблицы интегралов.

Так как $d(7x-5)=(7x-5)'dx=7dx$, то $dx=\frac{1}{7}d(7x-5)$. Тогда

$$\int (7x-5)^9 dx=\frac{1}{7}\int (7x-5)^9 d(7x-5)=\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x-5)^{10}}{10}+C=\frac{1}{70}(7x-5)^{10}+C.$$

Пример 1.9. Найти $\int \frac{3xdx}{8-x^2}$.

Решение. Сделаем замену переменной, ориентируясь на формулу 2 таблицы интегралов.

$$\int \frac{3xdx}{8-x^2}=\left\|\begin{array}{l} u=8-x^2 \\ du=\left(8-x^2\right)'dx \\ du=-2xdx \\ x\,dx=\dfrac{du}{-2} \end{array}\right\|=\int \frac{3\cdot\frac{du}{-2}}{u}=-\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}=-\frac{3}{2}\ln|u|+C\Big|_{u=8-x^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|8-x^2\right|+C.$$

Пример 1.10. Найти $\int \frac{7-3x}{\sqrt{5x^2+8}}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\int \frac{7-3x}{\sqrt{5x^2+8}}dx=\int\frac{7dx}{\sqrt{5x^2+8}}-\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{5x^2+8}}.$$

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

$$1)\int\frac{7dx}{\sqrt{5x^2+8}}=\left\|\begin{array}{l}u^2=5x^2\\ u=\sqrt{5}x\\ du=\left(\sqrt{5}x\right)'dx\\ du=\sqrt{5}dx\\ dx=\dfrac{du}{\sqrt{5}}\end{array}\right|\begin{array}{l}a^2=8\end{array}\left\|\right.=\int\frac{7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=$$

$$=\frac{7}{\sqrt{5}}ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C\Big|_{u=\sqrt{5}x,\ a^2=8}=\frac{7}{\sqrt{5}}ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+8}\right|+C;$$

$$2)\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{5x^2+8}}=\left\|\begin{array}{l}v=5x^2+8\\ dv=\left(5x^2+8\right)'dx\\ dv=10xdx\\ x\,dx=\dfrac{dv}{10}\end{array}\right\|=\int\frac{3\cdot\frac{dv}{10}}{\sqrt{v}}=\frac{3}{10}\int\frac{dv}{\sqrt{v}}=\frac{3}{10}\cdot2\sqrt{v}+C\Big|_{v=5x^2+8}=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8}+C.$$

Тогда исходный интеграл будет равен:

$$\int\frac{7-3x}{\sqrt{5x^2+8}}dx=\frac{7}{\sqrt{5}}ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+8}\right|-\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8}+C.$$

Пример 1.11. Вычислить интеграл $\int\frac{2x+5}{x^2-4x+5}dx$, выполнив подстановку $t=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+5\right)'$.

Решение. Пусть $t=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+5\right)'=\frac{1}{2}\left(2x-4\right)=x-2$. Выполним соответствующую замену переменной.

$$\int\frac{2x+5}{x^2-4x+5}dx=\left\|\begin{array}{l}t=x-2\\ x=t+2\\ dx=\left(t+2\right)'dt\\ dx=dt\end{array}\right\|=\int\frac{2\left(t+2\right)+5}{\left(t+2\right)^2-4\left(t+2\right)+5}dt=$$

$$= \int \frac{2t+4+5}{t^2+4t+4-4t-8+5}\,dt = \int \frac{2t+9}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{9}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{для 1 интеграла} \\ u = t^2+1 \\ du = \left(t^2+1\right)' dt \\ du = 2t\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{du}{u} + 9\int \frac{dt}{t^2+1^2} = \ln|u| + 9\operatorname{arctg}\frac{t}{1} + C\Big|_{u=t^2+1} =$$

$$= \ln\left(t^2+1\right) + 9\operatorname{arctg} t + C\Big|_{t=x-2} = \ln\left(x^2-4x+5\right) + 9\operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

Замечание. Замена $t = \frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'$ упрощает интегралы, содержащие квадратные трехчлены ax^2+bx+c.

1.4.3 Метод интегрирования по частям

Теорема. Пусть подынтегральное выражение в неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ может быть представлено в виде $f(x)dx = u dv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые на интервале $(a;b)$ функции. Тогда имеет место формула

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du. \qquad (1.1)$$

Оказывается, что для некоторых классов подынтегральных выражений можно так выбрать функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, что неопределенный интеграл в правой части формулы (1.1) интегрирования по частям окажется проще, чем интеграл в левой части. Приведем некоторые из таких ситуаций.

1. $\int P_n(x)\left\{\begin{array}{c} e^{\alpha x} \\ \sin\alpha x \\ \cos\alpha x \end{array}\right\} dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами.

В этом случае рекомендуется положить $u = P_n(x)$, $dv = \begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix} dx$, а формулу (1.1) интегрирования по частям следует применить n раз.

2. $\int P_n(x) \begin{Bmatrix} \log_a kx \\ \arcsin mx \\ \arccos mx \\ \operatorname{arctg} mx \\ \operatorname{arcctg} mx \end{Bmatrix} dx$. В этом случае $u = \begin{Bmatrix} \log_a kx \\ \arcsin mx \\ \arccos mx \\ \operatorname{arctg} mx \\ \operatorname{arcctg} mx \end{Bmatrix}$, $dv = P_n(x)dx$, а формулу (1.1) интегрирования по частям в рассматриваемом случае рекомендуется применить 1 раз.

3. Интегралы вида $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$, $\int \sin(\ln \alpha x) dx$, $\int \cos(\ln \alpha x) dx$, $\int \ln(\sin \alpha x) dx$, $\int \ln(\cos \alpha x) dx$.

При нахождении интегралов указанного типа формулу (1.1) интегрирования по частям следует применять дважды до получения линейного уравнения относительно искомого интеграла. При её первом применении безразлично, что выбрать в качестве u, а при втором её применении в качестве u следует выбрать функцию, родственную той, что была выбрана в первый раз.

Приведем некоторые примеры применения формулы интегрирования по частям.

Пример 1.12. Найти $\int (7-x)\cos 2x \, dx$.

Решение. Данный интеграл первого типа, следовательно,

$$\int (7-x)\cos 2x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = 7-x \quad \to \; du = -dx \\ dv = \cos 2x \, dx \to v = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right\| =$$

$$= (7-x)\cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot (-dx) = \frac{(7-x)}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{(7-x)}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x \, d(2x) = \frac{(7-x)}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Замечание. При нахождении v произвольную постоянную C полагают равной нулю, то есть в качестве v берут только одну из первообразных.

Пример 1.13. Найти $\int\left(x^2-2x+5\right)\ln x\,dx$.

Решение. Данный интеграл второго типа, следовательно,

$$\int\left(x^2-2x+5\right)\ln x\,dx=\left\|\begin{array}{l} u=\ln x \quad\to\quad du=\left(\ln x\right)'dx=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=\left(x^2-2x+5\right)dx\to v=\int\left(x^2-2x+5\right)dx=\dfrac{x^3}{3}-x^2+5x \end{array}\right\|=$$

$$=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)-\int\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)-$$

$$-\int\left(\frac{x^2}{3}-x+5\right)dx=\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-5x+C.$$

Пример 1.14. Найти $\int x\ln^2 x dx$.

Решение. Данный интеграл второго типа, так как интеграл $\int\ln^2 x dx$ отсутствует в таблице интегралов.

$$\int x\ln^2 x dx=\left\|\begin{array}{l} u=\ln^2 x \quad\to\; du=\left(\ln^2 x\right)'dx=2\ln x\cdot\left(\ln x\right)'dx=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dv=xdx \quad\to\quad v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\|=$$

$$=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\int x\ln x\,dx=$$

Применим второй раз формулу интегрирования по частям

$$=\left\|\begin{array}{l} u=\ln x \quad\to\; du=\left(\ln x\right)'dx=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=xdx\to v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\|=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{2}\int xdx=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

Пример 1.15. Найти $\int \frac{2xdx}{\sin^2 7x}$.

Решение. Данный интеграл можно отнести к первому типу, так как без x в числителе мы будем иметь табличный интеграл. Следовательно:

$$\int \frac{2xdx}{\sin^2 7x} = \left\| \begin{matrix} u = 2x \quad \to \; du = (2x)' dx = 2dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 7x} \to v = \int \dfrac{dx}{\sin^2 7x} = \dfrac{1}{7}\int \dfrac{d(7x)}{\sin^2 7x} = -\dfrac{1}{7}\operatorname{ctg}7x \end{matrix} \right\| =$$

$$= 2x \cdot \left(-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x \right) - \int \left(-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x \right) \cdot 2dx = -\frac{2x}{7}\operatorname{ctg}7x + \frac{2}{7}\int \operatorname{ctg}7x dx =$$

$$= -\frac{2x}{7}\operatorname{ctg}7x + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}\int \operatorname{ctg}7x d(7x) = -\frac{2x}{7}\operatorname{ctg}7x + \frac{2}{49}\ln|\sin 7x| + C.$$

Пример 1.16. Найти $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

Решение. Очевидно, это интеграл третьего типа, имеем

$$I = \int e^{2x}\sin x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = e^{2x} \quad \to \quad du = \left(e^{2x}\right)' dx = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin x\,dx \to v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

Применим второй раз формулу интегрирования по частям

$$= e^{2x}\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)\cdot 2e^{2x}\,dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = e^{2x} \quad \to \quad du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos x\,dx \to v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{matrix} \right\| = -e^{2x}\cos x +$$

$$+ 2\left(e^{2x}\cdot\sin x - \int \sin x\cdot 2e^{2x}dx\right) = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx.$$

Таким образом, $I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4I$.

Выразим из полученного равенства искомый интеграл I:

$$I + 4I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x,$$

$$5I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x,$$

$$I = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + C.$$

1.5 Классы интегрируемых функций

В связи с тем, что существуют неберущиеся интегралы, актуальной задачей является задача об описании классов функций, для которых существуют первообразные, являющиеся элементарными функциями.

1.5.1 Интегрирование рациональных функций

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, то есть функции, которые можно представить в виде дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то рациональная дробь называется неправильной.

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби с тем же знаменателем. Это представление осуществляется при помощи процедуры деления многочленов «уголком». Процедура деления уголком аналогична процедуре деления чисел, с той лишь разницей, что при делении многочленов используются степени x, а не степени 10.

Например, $\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$; $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$.

Таким образом, задача интегрирования рациональной функции сводится к интегрированию многочлена $W(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$ и интегрированию правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

Интеграл от многочлена легко вычисляется:

$$\int W(x)dx=\int\left(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m\right)dx=a_0\frac{x^{m+1}}{m+1}+a_1\frac{x^m}{m}+\ldots+a_mx+C.$$

Отыскание интеграла от правильной рациональной дроби основано на следующих фактах:

1. В алгебре доказывается, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения $Q(x)=A(x-\alpha)^n\cdot\ldots\cdot\left(x^2+2px+q\right)^m\cdot\ldots$, где A – коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, а квадратные трёхчлены вида $x^2+2px+q$ имеют отрицательные дискриминанты (то есть не имеют действительных корней).

2. Если рациональная дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная, а многочлен $Q(x)$ представлен в виде $Q(x)=A(x-\alpha)^n\cdot\ldots\cdot\left(x^2+2px+q\right)^m\cdot\ldots$, то эту рациональную дробь можно единственным образом представить в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+2px+q\right)}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+2px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+2px+q\right)^m}+\ldots, \qquad (1.2)$$

где A_1, $A_2,\ldots$, A_n, M_1, N_1, M_2, $N_2,\ldots$, M_m, $N_m,\ldots$ – некоторые вещественные числа.

Равенство (1.2) называется ***разложением рациональной функции на элементарные рациональные дроби***.

Пример 1.17. Разложить правильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ на сумму элементарных, если :

1) знаменатель $Q(x)=x(x+3)(x-4)\ \Rightarrow\ \dfrac{R(x)}{Q(x)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{x-4}$;

2) знаменатель $Q(x)=\left(x^2+7\right)\left(x^2+2x+8\right)\ \Rightarrow\ \dfrac{R(x)}{Q(x)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+7}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+8}$;

3) знаменатель $Q(x)=(x-2)(x+5)^3 \Rightarrow \dfrac{R(x)}{Q(x)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+5}+\dfrac{C}{(x+5)^2}+\dfrac{D}{(x+5)^3}$,

где A, B, C, D – коэффициенты, которые надо определить.

Чтобы определить числа $A_1,\ A_2,\ldots,A_n,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2,\ldots,M_m,\ N_m,\ldots$, умножают обе части разложения (1.2) с неизвестными пока $A_1,\ A_2,\ldots$ на $Q(x)$.

В результате будут получены две равных дроби с одинаковыми знаменателями. Но тогда должны быть равны и числители этих дробей. Поскольку равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x, должны быть равны между собой. Приравнивая эти коэффициенты, получают систему уравнений, из которой находят неизвестные коэффициенты $A_1,\ A_2,\ldots,A_n,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2,\ldots,M_m,\ N_m,\ldots$

Отметим также, что равенство многочленов, в частности, влечет за собой и равенства левой и правой частей при любых частных значениях x. Это иногда позволяет облегчить нахождение коэффициентов $A_1,\ A_2,\ldots,A_n,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2,\ldots,M_m,\ N_m,\ldots$ Оказалось, что для этих целей удобны корни знаменателя.

Описанный метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется ***методом неопределенных коэффициентов***.

Реализация метода неопределенных коэффициентов приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов:

I. $\int \dfrac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha|+C$;

II. $\int \dfrac{A}{(x-\alpha)^r}dx = -\dfrac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}+C,\ r>1$;

III. $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx$;

IV. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+2px+q\right)^r}dx,\ r>1,\ r\in\mathbb{N}.$

Первые два интеграла являются табличными. Интеграл III типа сводится к табличным при помощи замены $t=\frac{1}{2}\left(x^2+2px+q\right)'=x+p$ (пример 1.11). Интеграл IV типа с помощью той же замены приводится к вычислению двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+2px+q\right)^r}dx=\left\|\begin{matrix}t=x+p\\x=t-p\\dx=dt\end{matrix}\right\|=\int \frac{A(t-p)+B}{\left((t-p)^2+2p(t-p)+q\right)^r}dt=$$

$$=\int \frac{At-Ap+B}{\left(t^2-2pt+p^2+2pt-2p^2+q\right)^r}dt=\int \frac{At+B-Ap}{\left(t^2-p^2+q\right)^r}dt=\int \frac{At+(B-Ap)}{\left(t^2+\left(q-p^2\right)\right)^r}dt.$$

Но квадратные трёхчлены $x^2+2px+q$ мы условились рассматривать с отрицательными дискриминантами. Поэтому (по формуле для чётного коэффициента при x): $D=\left(\frac{2p}{2}\right)^2-1\cdot q=p^2-q=-\left(q-p^2\right)<0 \Leftrightarrow q-p^2>0.$

Обозначим $a^2=\left(q-p^2\right)$ и окончательно получим:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+2px+q\right)^r}dx=A\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^r}+(B-Ap)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^r}.$$

Первый интеграл элементарно приводится к табличному, а ко второму интегралу можно применить формулу интегрирования по частям.

Пример 1.18. Найти $\int \frac{5x-3}{(x-4)(x+1)}dx.$

Решение. Дробь, стоящая под знаком интеграла, является правильной, (здесь: степень числителя равна 1, а степень знаменателя равна 2). Разложим дробь на сумму простейших (пример 1.7):

$$\frac{5x-3}{(x-4)(x+1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}\quad\Big|\cdot(x-4)(x+1),$$

$$\frac{(5x-3)(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+1)}=\frac{A(x-4)(x+1)}{x-4}+\frac{B(x-4)(x+1)}{x+1},$$

$$5x-3=A(x+1)+B(x-4).$$

Последовательно в последнем тождестве положим значения x равными действительным корням знаменателя. Так мы сразу находим коэффициенты.

При $x=4 \;\rightarrow\; 5\cdot 4-3=A(4+1)+B\cdot 0 \;\Rightarrow\; A=\frac{17}{5}$.

При $x=-1 \;\rightarrow\; 5\cdot(-1)-3=A\cdot 0+B(-1-4) \;\Rightarrow\; B=\frac{8}{5}$.

Тогда $\int\frac{5x-3}{(x-4)(x+1)}dx=\int\frac{\frac{17}{5}}{x-4}dx+\int\frac{\frac{8}{5}}{x+1}dx=\frac{17}{5}\ln|x-4|+\frac{8}{5}\ln|x+1|+C$.

Пример 1.19. $\int\frac{4x^3-6x^2+24x-50}{(x^2+7)(x-2)}dx$.

Решение. Дробь, стоящая под знаком интеграла, является неправильной (степень числителя и степень знаменателя равны 3). Выделим целую часть (делением уголком), предварительно раскрыв скобки в знаменателе:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3-6x^2+24x-50 & x^3-2x^2+7x-14 \\ \underline{4x^3-8x^2+28x-52} & 4 \\ 2x^2-4x+2 & \end{array}.$$

Тогда дробь, стоящую под интегралом, можно представить в виде суммы:

$$\frac{4x^3-6x^2+24x-50}{(x^2+7)(x-2)}=4+\frac{2x^2-4x+2}{(x^2+7)(x-2)}.$$

Теперь разложим правильную дробь на сумму простейших:

$$\frac{2x^2-4x+2}{(x^2+7)(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+7}+\frac{C}{x-2} \quad \Big|\cdot(x^2+7)(x-2),$$

$$\frac{(2x^2-4x+2)(x^2+7)(x-2)}{(x^2+7)(x-2)}=\frac{(Ax+B)(x^2+7)(x-2)}{x^2+7}+\frac{C(x^2+7)(x-2)}{x-2},$$

$$2x^2-4x+2=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+7),$$

$$2x^2-4x+2=A\left(x^2-2x\right)+B(x-2)+C\left(x^2+7\right).$$

Тут приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & 2=A+C, & (1)\\ x & -4=-2A+B, & (2)\\ x^0 & 2=-2B+7C. & (3)\end{array}$$

Решим систему уравнений:

(1) $\rightarrow$ $A=2-C$,

(2) $\rightarrow$ $-4=-2(2-C)+B$,

$-4=-4+2C+B$,

$B=-2C$,

(3) $\rightarrow$ $2=-2\cdot(-2C)+7C$,

$2=4C+7C$,

$C=\dfrac{2}{11}$ $\Rightarrow$ $A=2-\dfrac{2}{11}=\dfrac{20}{11}$, $B=-2\cdot\dfrac{2}{11}=-\dfrac{4}{11}$, тогда

$$\int\frac{4x^3-6x^2+24x-50}{\left(x^2+7\right)(x-2)}dx=\int\left(4+\frac{\frac{20}{11}x-\frac{4}{11}}{x^2+7}+\frac{\frac{2}{11}}{x-2}\right)dx=4\int dx+\frac{20}{11}\int\frac{x}{x^2+7}dx-$$

$$-\frac{4}{11}\int\frac{dx}{x^2+7}+\frac{2}{11}\int\frac{dx}{x-2}=\left\|\begin{array}{l}\text{для 2 интеграла}\\ u=x^2+7\\ du=2xdx\\ xdx=\dfrac{du}{2}\end{array}\right\|=4x+\frac{20}{11}\int\frac{\frac{du}{2}}{u}-\frac{4}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}+$$

$$+\frac{2}{11}\ln|x-2|=4x+\frac{10}{11}\int\frac{du}{u}-\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+\frac{2}{11}\ln|x-2|=4x+\frac{10}{11}\ln\left|x^2+7\right|-$$

$$-\frac{4}{11\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+\frac{2}{11}\ln|x-2|+C.$$

Пример 1.20. Найти $\int \frac{x+7}{x(x-3)^2}dx$.

Решение. Дробь, стоящая под знаком интеграла, является правильной, (здесь: степень числителя равна 1, а степень знаменателя равна 3). Разложим дробь на сумму простейших (пример 1.7):

$$\frac{x+7}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2} \quad \Big| \cdot x(x-3)^2,$$

$$\frac{(x+7)x(x-3)^2}{x(x-3)^2}=\frac{Ax(x-3)^2}{x}+\frac{Bx(x-3)^2}{x-3}+\frac{Cx(x-3)^2}{(x-3)^2},$$

$$x+7=A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx.$$

Сначала в последнем равенстве положим x равным нулям знаменателя (пример 1.18):

При $x=3 \;\rightarrow\; 3+7=A\cdot 0+B\cdot 0+3C \;\Rightarrow\; C=\frac{10}{3}$.

При $x=0 \;\rightarrow\; 0+7=A\cdot(-3)^2+B\cdot 0+C\cdot 0 \;\Rightarrow\; A=\frac{7}{9}$.

Корней знаменателя больше нет, но еще один коэффициент не найден. В этом случае положим x равным любому действительному числу. Например,

$$x=1 \;\rightarrow\; 1+7=A\cdot(1-3)^2+B\cdot 1\cdot(1-3)+C\cdot 1,$$

$$8=4A-2B+C,$$

$$8=4\cdot\frac{7}{9}-2B+\frac{10}{3},$$

$$2B=\frac{28}{9}+\frac{10}{3}-8=-\frac{14}{9} \;\Rightarrow\; B=-\frac{7}{9}.$$

Тогда $\int \frac{dx}{x(x-3)^2}=\int\left(\frac{\frac{7}{9}}{x}+\frac{-\frac{7}{9}}{x-3}+\frac{\frac{10}{3}}{(x-3)^2}\right)dx=\frac{7}{9}\ln|x|-\frac{7}{9}\ln|x-3|+$

$$+\frac{10}{3}\cdot\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+C=\frac{7}{9}\ln|x|-\frac{7}{9}\ln|x-3|-\frac{10}{3(x-3)}+C.$$

Пример 1.21. Найти $\int \frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Согласно данным выше рекомендациям, формальное разложение имеет следующий вид:

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \left| \cdot x\left(x^2+1\right)^2 \right.,$$

$$\frac{\left(x^2-1\right)x\left(x^2+1\right)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax\left(x^2+1\right)^2}{x}+\frac{(Bx+C)x\left(x^2+1\right)^2}{x^2+1}+\frac{(Dx+E)x\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$x^2-1=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)\left(x^2+1\right)x+(Dx+E)x,$$

$$x^2-1=A\left(x^4+2x^2+1\right)+(Bx+C)\left(x^3+x\right)+(Dx+E)x,$$

$$x^2-1=Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex,$$

$$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Приравнивая коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x^1 и x^0, приходим к системе уравнений:

$$\begin{array}{l|ll} x^4 & 0=A+B, & (1)\\ x^3 & 0=C, & (2)\\ x^2 & 0=2A+B+D, & (3)\\ x^1 & 0=C+E, & (4)\\ x^0 & -1=A. & (5) \end{array}$$

$$(5)\to(1)\Rightarrow -1+B=0\Leftrightarrow B=1,$$

$$(2)\to(4)\Rightarrow E=0,$$

$$(3)\to 0=2\cdot(-1)+1+D\Leftrightarrow D=2.$$

Тогда разложение подынтегральной дроби будет:

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{1\cdot x+0}{x^2+1}+\frac{2\cdot x+0}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},$$

а интеграл:

$$\int \frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx = -\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{для 2, 3 интегралов} \\ u = x^2+1 \\ du = 2xdx \\ xdx = \dfrac{du}{2} \end{array} \right\| = -\ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} + \int\frac{du}{u^2} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{u} + C\Big|_{u=x^2+1} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{x^2+1} + C\,.$$

Пример 1.22. Найти $\int\frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}dx$.

Решение. Положим $t = \frac{1}{2}\left(x^2-2x+5\right)' = \frac{1}{2}(2x-2) = x-1 \;\Rightarrow x = t+1,$ тогда

$x^2-2x+5 = (t+1)^2-2(t+1)+5 = t^2+2t+1-2t-2+5 = t^2+4$, следовательно,

$$\int\frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}dx = \left\| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right\| = \int\frac{5(t+1)+3}{\left(t^2+4\right)^2}dt = \int\frac{5t+8}{\left(t^2+4\right)^2}dt =$$

$$= \int\frac{5t\,dt}{\left(t^2+4\right)^2} + \int\frac{8dt}{\left(t^2+4\right)^2}\,.$$

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

$$1)\ \int\frac{5t\,dt}{\left(t^2+4\right)^2} = \left\| \begin{array}{l} z = t^2+4 \\ dz = 2tdt \\ tdt = \dfrac{dz}{2} \end{array} \right\| = \frac{5}{2}\int\frac{dz}{z^2} = -\frac{5}{2z} + C\Big|_{z=t^2+4} = -\frac{5}{2\left(t^2+4\right)} + C\Big|_{t=x-1} =$$

$$= -\frac{5}{2\left(x^2-2x+5\right)} + C\,;$$

$$2)\ \int\frac{8dt}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{8}{4}\int\frac{4}{\left(t^2+4\right)^2}dt = 2\int\frac{t^2+4-t^2}{\left(t^2+4\right)^2}dt = 2\int\left(\frac{t^2+4}{\left(t^2+4\right)^2} - \frac{t^2}{\left(t^2+4\right)^2}\right)dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+4}\,dt - 2\int \frac{t^2}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt = \left\| \begin{array}{l} \text{Для 2 - го интеграла применим формулу} \\ \text{интегрирования по частям :} \\ u = t \quad \to \quad du = dt \\ dv = \dfrac{t}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt \to v = \int \dfrac{t}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt = -\dfrac{1}{2\left(t^2+4\right)} \end{array} \right\|$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+4}\,dt - 2\left(-\frac{t}{2\left(t^2+4\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4} \right) = 2\int \frac{1}{t^2+4}\,dt + \frac{t}{t^2+4} - \int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+4}\,dt + \frac{t}{t^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + \frac{t}{t^2+4} + C\Big|_{t=x-1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{x^2-2x+5} + C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}\,dx = \int \frac{5t\,dt}{\left(t^2+4\right)^2} + \int \frac{8dt}{\left(t^2+4\right)^2} = -\frac{5}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} +$$

$$+ \frac{x-1}{x^2-2x+5} + C = \frac{2x-7}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

1.5.2 Интегрирование иррациональных функций

Некоторые интегралы от простейших иррациональных функций сводятся к интегралам от рациональных функций (или, как говорят, рационализируются) и могут быть найдены методами, рассмотренными ранее.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} \right)dx,$

где a, b, c, d – некоторые числа $\left(\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d} \right)$,

m – натуральное число,

R – рациональная функция от x и от $\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Покажем, что такой интеграл рационализируется подстановкой $t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

В самом деле, $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,

$ax+b = t^m cx + t^m d$,

$ax - t^m cx = t^m d - b$,

$x\left(a - t^m c\right) = t^m d - b$,

$x = \dfrac{dt^m - b}{a - ct^m}$.

Тогда $x' = \left(\dfrac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)' = \dfrac{dmt^{m-1}\left(a - ct^m\right) - \left(dt^m - b\right)\left(-cmt^{m-1}\right)}{\left(a - ct^m\right)^2} =$

$$= \frac{mt^{m-1}\left(da - dct^m + dct^m - bc\right)}{\left(a - ct^m\right)^2} = \frac{mt^{m-1}\left(da - bc\right)}{\left(a - ct^m\right)^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{mt^{m-1}\left(ad - bc\right)}{\left(ct^m - a\right)^2}\,dt\,.$$

Окончательно получим

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t\right)\frac{mt^{m-1}\left(ad - bc\right)}{\left(ct^m - a\right)^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt\,,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция аргумента t.

Пример 1.23. Вычислить $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\dfrac{dx}{1-x}$.

Решение. Сделав подстановку $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, получим:

$t^2 = \dfrac{1+x}{1-x}$,

$1 + x = t^2 - xt^2$,

$x + xt^2 = t^2 - 1$,

$x\left(1 + t^2\right) = t^2 - 1$,

$x = \dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 1 - \dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2} = \dfrac{1 + t^2 - t^2 + 1}{1 + t^2} = \dfrac{2}{1 + t^2}$;

$$x' = \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}\right)' = \frac{2t\cdot\left(1+t^2\right)-\left(t^2-1\right)\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{2t\left(1+t^2-t^2+1\right)}{\left(1+t^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2t\cdot 2}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{4t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Далее имеем: $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x} = \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{1-x}dx = \int t\cdot\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{4t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2} =$

$$= 2\int\frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg}t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Пример 1.24. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int\frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\left(\sqrt[6]{x}\right)^3} = \left\|\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x} \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array}\right\| = \int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3} = \int\frac{6t^5dt}{t^2(1+t)} =$

$$= 6\int\frac{t^3dt}{t+1} = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

Здесь, при интегрировании рациональной дроби, мы выделили целую часть делением уголком:

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t+1 \\ \hline t^3+t^2 & t^2-t+1 \\ \hline -t^2 & \\ -t^2-t & \\ \hline -t & \\ t+1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

Пример 1.25. Найти $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Поскольку трехчлен x^2+x+1 имеет отрицательный дискриминант, сделаем подстановку $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$ или $x+1=t^2-2tx$; отсюда

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t} \quad \Rightarrow \quad dx=x'dt=\frac{2t(1+2t)-(t^2-1)\cdot 2}{(1+2t)^2}dt=\frac{2t+4t^2-2t^2+2}{(1+2t)^2}dt=$$

$$=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt.$$

Тогда $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int \dfrac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}dt$. Далее имеем:

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{D}{(1+2t)^2} \quad \Big| \cdot t(1+2t)^2,$$

$$2t^2+2t+2=A(1+2t)^2+Bt(1+2t)+Dt,$$

$$2t^2+2t+2=A(1+4t+4t^2)+B(t+2t^2)+Dt,$$

$$2t^2+2t+2=(4A+2B)t^2+(4A+B+D)t+A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений первой степени относительно A, B, D:

$$\begin{cases} 4A+2B=2, & (1) \\ 4A+B+D=2, & (2) \\ A=2. & (3) \end{cases}$$

$(3)\to(1) \Rightarrow 4\cdot 2+2B=2 \Leftrightarrow B=-3,$

$(2)\to 4\cdot 2+(-3)+D=2 \Leftrightarrow D=-3.$ Следовательно,

$\dfrac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}=\dfrac{2}{t}-\dfrac{3}{1+2t}-\dfrac{3}{(1+2t)^2}$, и окончательно

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)dt=-2\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+2t)}{1+2t}-$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+2t)}{(1+2t)^2}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C\Bigg|_{t=x+\sqrt{x^2+x+1}}=$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C.$$

Интегралы вида $\int R\left(x^m;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x^m;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$,

$\int R\left(x^m;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ интегрируются с помощью следующих тригонометрических подстановок:

1) $\int R\left(x^m;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$: $x=a\sin t$, $dx=a\cos xdt$,

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t;$$

2) $\int R\left(x^m;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$: $x=a\operatorname{tg}t$, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}=\frac{a}{\cos t}$;

3) $\int R\left(x^m;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$: $x=\frac{a}{\sin t}$, $dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$,

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=a\operatorname{ctg}t.$$

В случае, когда показатель степени m является нечетным числом, целесообразнее использовать подстановку, как в примере 1.23, то есть обозначить корень за t.

Пример 1.26. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Решение. Под интегралом мы видим x^5, поэтому сделаем замену, аналогичную примеру 1.23:

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^2-2}}=\left\|\begin{array}{l}t=\sqrt{x^2-2}\\x^2-2=t^2\\x=\sqrt{t^2+2}\\dx=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+2}}dt=\frac{tdt}{\sqrt{t^2+2}}\end{array}\right\|=\int\frac{\sqrt{\left(t^2+2\right)^5}}{t}\cdot\frac{tdt}{\sqrt{t^2+2}}=\int\sqrt{\left(t^2+2\right)^4}dt=$$

$$= \int \left(t^2+2\right)^2 dt = \int \left(t^4+4t+4\right)dt = \frac{t^5}{5} + 2t^2 + 4t + C = \frac{\sqrt{\left(x^2-2\right)^5}}{5} + 2\left(x^2-2\right) +$$

$$+ 4\sqrt{x^2-2} + C.$$

1.5.3 Интегрирование тригонометрических функций

Рациональной функцией от двух переменных u и v называется функция $R(u;\ v)$, получающаяся из двух переменных u и v и некоторых постоянных, над которыми производятся только операции сложения, вычитания, умножения и деления. Если переменные u и v, в свою очередь, являются функциями переменной x: $u=\varphi(x),\ v=\psi(x)$, то функция $R[\varphi(x);\ \psi(x)]$ называется рациональной функцией от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Например, функция $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+2\cos x}$ является рациональной функцией относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть $f(x)=R(\sin x;\cos x)$.

Интегралы от некоторых рациональных тригонометрических функций сводятся к интегралам от рациональных алгебраических функций.

Интегралы вида $\int R(\sin x;\ \cos x)dx$ всегда сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки, которая называется ***универсальной тригонометрической подстановкой*:**

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \ \Rightarrow\ x=2\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{2}{t^2+1}dt;\ \sin x=\frac{2t}{t^2+1};\ \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}. \qquad (1.3)$$

Тогда $\int R(\sin x;\cos x)dx = 2\int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2};\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Хотя такая подстановка позволяет найти любой интеграл от рациональных тригонометрических функций, во многих случаях она приводит к громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими, более эффективными подстановками, которые приведём ниже.

1. Если ***подынтегральная функция чётная*** относительно совокупности функций sin *x* и cos *x*, то есть $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$ как, например,

$$R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x + d},$$

то целесообразно применить подстановку $t = tg\, x$, при этом:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\ . \qquad (1.4)$$

2. Если ***подынтегральная функция нечётная*** относительно функции sin *x*, то есть $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ как, например,

$$R(\sin x; \cos x) = \sin^3 x \cdot (5 + \cos^2 x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

3. Если ***подынтегральная функция нечётная*** относительно функции $\cos x$, то есть $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ как, например,

$$R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{\cos^5 x \cdot \sin^2 x}\ ,$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sin x$.

4. Если подынтегральная функция представляет собой произведение чётных степеней синуса и косинуса, то есть $R(\sin x; \cos x) = \sin^{2n} x \cos^{2m} x$, то её можно упростить с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \qquad (1.5)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \qquad (1.6)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,. \qquad (1.7)$$

5. При вычислении интегралов от произведения двух тригонометрических функций пользуются формулами преобразования произведения в сумму:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)], \qquad (1.8)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right], \tag{1.9}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]. \tag{1.10}$$

6. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$, где $n=2,3,4,\ldots,$ решают подстановкой соответственно $u=\mathrm{tg}x$, $u=\mathrm{ctg}x$.

Иногда полезно использовать формулы:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\mathrm{tg}^2\alpha,\ \ \frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\mathrm{ctg}^2\alpha. \tag{1.11}$$

Если показатель степени $n=2$, то проще воспользоваться тригонометрическими формулами:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1.13}$$

Пример 1.27. Найти $\int\frac{1}{1+\sin x}dx$.

Решение. Воспользуемся подстановкой (1.3):

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\left\|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t\\ x=2\mathrm{arctg}t\\ \sin x=\dfrac{2t}{t^2+1}\\ dx=\dfrac{2}{t^2+1}dt\end{array}\right\|=\int\frac{1}{1+\dfrac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}dt=\int\frac{1}{\dfrac{1+t^2+2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\frac{2}{1+2t+t^2}dt=2\int\frac{d(1+t)}{(1+t)^2}=2\cdot\frac{(1+t)^{-1}}{-1}+C=-\frac{2}{1+t}+C\Big|_{t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=-\frac{2}{1+\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}+C.$$

Пример 1.28. Найти $\int \frac{\cos^3 5x}{\sqrt{\sin 5x}}dx$.

Решение. В числителе $\cos 5x$ с нечётным положительным показателем степени. Отделим от $\cos^3 5x$ один множитель, а затем используем формулу $\cos^2 5x = 1-\sin^2 5x$ и сделаем замену переменной:

$$\int \frac{\cos^3 5x}{\sqrt{\sin 5x}}dx = \int \frac{\cos^2 5x}{\sqrt{\sin 5x}}\cos 5x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 5x}{\sqrt{\sin 5x}}\cos 5x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = \sin 5x \\ du = 5\cos 5x dx \\ \cos 5x dx = \dfrac{du}{5} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{u^2}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{5}\int u^{\frac{3}{2}}du = \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{u} - \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{u} - \frac{2}{25}\sqrt{u^5} + C\Big|_{u=\sin 5x} = \frac{2}{5}\sqrt{\sin 5x} - \frac{2}{25}\sqrt{\sin^5 5x} + C.$$

В примере 1.28 мы применили следующие свойства степеней:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}},\quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}.$$

Пример 1.29. Найти $\int \sin^2 2x dx$.

Решение. Так как под интегралом $\sin 2x$ с чётным положительным показателем степени, то применим формулу (1.5):

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Пример 1.30. Найти $\int \operatorname{ctg}^2 7x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.13):

$$\int \operatorname{ctg}^2 7x dx = \int \frac{\cos^2 7x}{\sin^2 7x} dx = \int \frac{1-\sin^2 7x}{\sin^2 7x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 7x} - \frac{\sin^2 7x}{\sin^2 7x} \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 7x} dx -$$

$$- \int dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{\sin^2 7x} d(7x) - x = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg} 7x - x + C.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение первообразной.
2. Каковы основные свойства неопределённого интеграла?
3. Перечислить этапы решения интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x-2x^2}}$.
4. Записать формулу интегрирования по частям.
5. Объяснить правило разложения рациональной дроби на сумму простейших.
6. Перечислить методы нахождения неопределённых коэффициентов при разложении рациональной дроби на сумму простейших.
7. Сформулировать универсальную тригонометрическую подстановку.
8. Какую подстановку следует делать в интегралах, содержащих линейную иррациональность?
9. Привести примеры тригонометрических подстановок для интегрирования иррациональностей.
10. Указать целесообразные подстановки для отыскания интегралов:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, \quad \int e^{\cos x} \sin x \, dx, \quad \int x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx, \quad \int \sin x \cos x \, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

ГЛАВА 2 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

2.1.1 Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$ вещественной оси. Криволинейной трапецией называют часть плоскости, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox $(y = 0)$ и графиком функции $y = f(x)$ (рисунок 2.1).

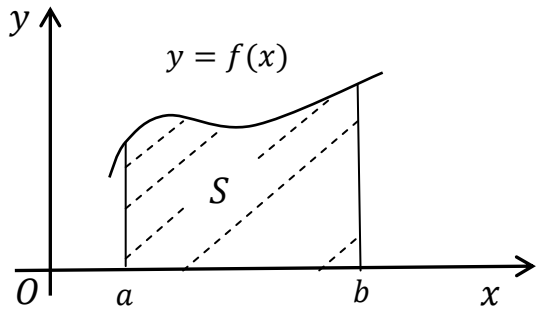


Рисунок 2.1 − Криволинейная трапеция

Будем искать площадь криволинейной трапеции. Поступим следующим образом: разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ (рисунок 2.2). На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (длина отрезка разбиения $[x_{i-1}; x_i]$), где $i = \overline{1,n}$.

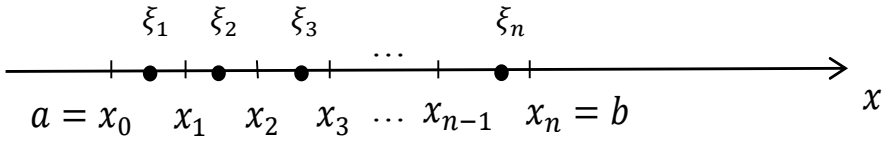


Рисунок 2.2 – Разбиение отрезка

Площадь криволинейной трапеции найдем сначала приближённо. Через каждую из точек x_i, $i = \overline{1,n}$ проведем прямые параллельно оси Oy, разбиваю-

щие криволинейную трапецию на элементарные части. Площадь каждой из элементарных частей приближённо заменим площадью прямоугольника со сторонами Δx_i, $f(\xi_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Площадь всей криволинейной трапеции приблизительно равна площади построенной «ступенчатой» фигуры (рисунок 2.3).

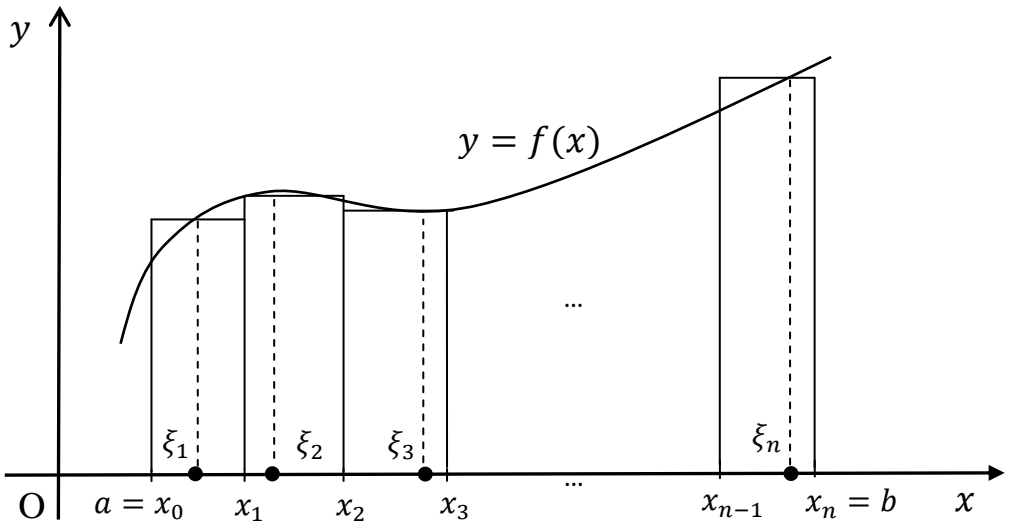


Рисунок 2.3 – Разбиение криволинейной трапеции

Поскольку площадь элементарной части с номером i есть $f(\xi_i)\Delta x_i$, то для искомой площади имеет место приближённое равенство $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Ясно, что написанное приближённое равенство тем точнее, чем «мельче» разбиение криволинейной трапеции на элементарные части.

Будем говорить, что разбиение измельчается неограниченно, если построена последовательность описанных разбиений так, что $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta x_i\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Из приведенных выше соображений вытекает, что площадь криволинейной трапеции может быть найдена по формуле

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right). \qquad (2.1)$$

2.1.2 Задача о массе прямолинейного стержня

Предположим, что материальный стержень расположен на отрезке $[a;b]$ вещественной оси и плотность распределения масс этого стержня $\rho = \rho(x)$ известна как функция точки $x \in [a;b]$. Функцию $\rho(x)$ будем считать непрерывной. Требуется найти массу всего стержня.

Сначала найдем приближённое значение массы стержня. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n элементарных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = \overline{1,n}.$

Поскольку на достаточно малых промежутках значения непрерывной функции $(\rho(x))$ меняются мало, то можно считать, что приближённо плотность на элементарном отрезке с номером i равна $\rho(\xi_i)$. Тогда, по известной формуле для массы однородного стержня, масса элементарного отрезка есть $\rho(\xi_i)\Delta x_i$.

Следовательно, искомая масса $M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$. При этом последнее приближённое равенство тем точнее, чем мельче разбиение отрезка $[a;b]$ на элементарные части. Из приведенных соображений следует, что

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i \right), \tag{2.2}$$

где $\lambda = \max\limits_{i=1,n} \{\Delta x_i\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Формулы (2.1) и (2.2), решающие разные задачи, приводят к совершенно идентичным вычислениям. Более того, оказалось, что по аналогичным формулам могут быть получены решения огромного количества других задач из самых разных областей естествознания. Это привело к мысли о существовании общего, абстрактного понятия, обобщающего формулы (2.1), (2.2) и другие аналогичные. Этим понятием является определённый интеграл, определение которого даётся ниже.

2.2 Понятие определённого интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y=f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n отрезков точками $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.

На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1};x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и обозначим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ (длина отрезка разбиения $[x_{i-1};x_i]$), где $i=\overline{1,n}$ (рисунок 2.2).

Определение. Сумму вида

$$\sigma_n=f(\zeta_1)\Delta x_1+f(\zeta_2)\Delta x_2+\ldots+f(\zeta_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2.3)$$

называют интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, построенную по произведённому разбиению отрезка на элементарные части и выбранным точкам ξ_i.

Очевидно, что интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка $[a;b]$, так и от выбора точек ξ_i, $i=\overline{1,n}$.

Обозначим, как и выше, $\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta x_i\}$ и будем говорить, что разбиение отрезка на элементарные части неограниченно измельчается, если $\lambda\to 0$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a;b]$, если предел интегральной суммы (2.3) при $\lambda\to 0$ существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ точками $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ и выбора точек ξ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то определённым интегралом от этой функции по отрезку $[a;b]$ называют предел интегральных сумм (2.3) при условии неограниченного измельчения отрезка.

Определённый интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right). \qquad (2.4)$$

Число a называют нижним пределом интегрирования, а число b – верхним пределом интегрирования, функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Вопрос об условиях существования определённого интеграла связан с исследованием поведения интегральных сумм и является сложным. В связи с этим мы приведем без доказательства достаточное условие существования определенного интеграла.

Теорема. Достаточное условие существования определённого интеграла. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда она интегрируема на этом отрезке.

2.3 Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. При решении задачи о площади криволинейной трапеции мы получили, что её площадь может быть найдена по формуле (2.1). Сравнивая правую часть этой формулы с определением определённого интеграла, заключаем, что

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.5)$$

Это означает, что определённый интеграл от неотрицательной подынтегральной функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$.

2.4 Механический смысл определённого интеграла

Вернемся к задаче о массе прямолинейного стержня. При решении задачи о массе стержня, расположенного на отрезке $[a;b]$ и имеющего плотность распределения масс $\rho(x)$, была получена формула (2.2). Сравнивая эту формулу с определением определённого интеграла (2.4), заключаем, что имеет место равенство

$$M = \int_a^b f(x)dx \ . \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) означает, что определённый интеграл от неотрицательной подынтегральной функции численно равен массе стержня, лежащего на отрезке интегрирования, причем плотность распределения масс этого стержня является подынтегральной функцией.

2.5 Свойства определённого интеграла

Ниже мы предполагаем, что все интегралы, содержащиеся в приводимых формулах, существуют. Доказательства этих формул немедленно вытекают из свойств сумм и пределов.

Пусть $b > a$, тогда:

1. $\int_a^b dx = b - a$.

2. Если поменять местами пределы интегрирования, то определённый интеграл сменит знак на противоположный, то есть $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. Для любого $c \in [a;b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, то есть $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где $k = const$.

5. Определённый интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от функций слагаемых, то есть

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\le g(x)\ \ \forall x\in[a;b]$, то и $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Следствие из свойства 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\ge 0\ \ \forall x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

7. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $m\le f(x)\le M\ \ \forall x\in[a;b]$, то $m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)$.

8. ***Теорема о среднем***. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда найдется точка $c\in[a;b]$, такая что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Ясно, что $m\le f(x)\le M\ \ \forall x\in[a;b]$, где m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Тогда, в силу свойства 6, имеем $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$.

Но $\int_a^b k\,dx = (\text{по свойству 4}) = k\int_a^b dx = (\text{по свойству 1}) = k(b-a)$, поэтому предыдущее неравенство можно будет преобразовать следующим образом:

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ или $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

Поскольку непрерывная функция принимает все значения, заключенные между своими наименьшим и наибольшим, то найдётся точка $c \in [a;b]$ такая, что $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Замечание. Число $f(c)$ называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

9. ***Интегрирование чётных и нечётных функций на симметричном отрезке***.

***Теорема* 1.** Если функция $f(x)$ нечётна (то есть $f(-x) = -f(x)$) и непрерывна на отрезке $[-a;a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

***Теорема* 2.** Если функция $f(x)$ чётна (то есть $f(-x) = f(x)$) и непрерывна на отрезке $[-a;a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

10. ***Интегрирование периодических функций на отрезке, кратном периоду***.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***периодической*** с периодом T, если для всех x из области определения функции справедливо $f(x \pm T) = f(x)$.

Напомним, что периодом называется наименьшее число $T > 0$, удовлетворяющее последнему равенству.

Теорема. Если функция $f(x)$ – периодическая и непрерывная на отрезке $[0;T]$, то $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$, где T – период функции $f(x)$.

2.6 Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(t)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда она интегрируема на произвольном отрезке $[a;x]$, где $x\in(a;b]$. Рассмотрим следующую функцию аргумента x:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt. \qquad (2.7)$$

Определение. Функция $\Phi(x)$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема Барроу. Для любой интегрируемой на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для этой функции на интервале $(a;b)$.

Доказательство. По определению производной имеем $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}$,

где $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt$.

В силу свойства 3 определенных интегралов

$\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$, поэтому $\Delta\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Согласно теореме о среднем найдётся точка $c\in[x;x+\Delta x]$ такая, что $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\cdot(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x$. А точку c в этом случае можно представить в виде $c=x+\theta\cdot\Delta x$ при $\theta\in(0;1)$. Тогда

$\Delta\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x$, где $\theta\in(0;1)$. Следовательно,

$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\cdot\Delta x)=f(x)$. Это значит, что функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

2.7 Формула Ньютона-Лейбница

Из теоремы Барроу и теоремы об общем виде первообразной следует, что если $F(x)$ ещё одна первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то найдется такая константа C, что $\Phi(x)-F(x)=C$ или $\Phi(x)=F(x)+C$, поэтому $\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C$. Отметим, что последнее равенство верно для всех $x\in[a;b]$.

Полагая $x=a$, получим $\int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C$. Отсюда, по свойству 1 определённого интеграла, получаем $0=F(a)+C \Rightarrow C=-F(a)$.

Теперь, полагая $x=b$, получим $\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)+C=F(b)-F(a)$, то есть

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). \tag{2.8}$$

Формулу (2.8) называют формулой Ньютона-Лейбница. Разность $F(b)-F(a)$ иногда записывают в виде $F(x)\Big|_a^b$. Поэтому формуле Ньютона-Лейбница можно придать следующий вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \tag{2.9}$$

где $F(x)$ – любая из первообразных функции $f(x)$.

Пример 2.1. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение. Вычислим интеграл, применив таблицу неопределенных интегралов и формулу Ньютона-Лейбница (2.9):

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1.$$

Пример 2.2. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Используем таблицу неопределённых интегралов, затем по формуле Ньютона-Лейбница получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}1=2\operatorname{arctg}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Приведём второй способ вычисления данного интеграла – с использованием свойства 9.

Так как подынтегральная функция $\frac{1}{1+x^2}$ является чётной, то

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{1}=2(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=2\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

2.8 Методы вычисления определённых интегралов

В связи с тем, что формула Ньютона-Лейбница позволяет свести вычисление определённого интеграла к нахождению первообразной, все методы нахождения неопределённых интегралов применимы и для определённых. Разумеется, при этом соответствующие методы должны быть модифицированы.

2.8.1 Метод замены переменной (метод подстановки)

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива ***формула замены переменных в определённом интеграле***

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Замечание. При вычислении определённого интеграла с помощью замены переменной не нужно возвращаться к старой переменной, но обязательно следует пересчитать пределы интегрирования:

x	t
b	α
a	β

Пример 2.3. Вычислить $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Сделаем замену переменной.

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left\| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right\| \quad \begin{array}{c|c} x & t=\sqrt{x} \\ \hline 4 & \sqrt{4}=2 \\ \hline 0 & \sqrt{0}=0 \end{array} \quad \| = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\left(\int\limits_0^2 \frac{1+t}{1+t}dt - \int\limits_0^2 \frac{1}{1+t}dt \right) = 2\left(\int\limits_0^2 dt - \int\limits_0^2 \frac{1}{1+t}dt \right) = 2\Big(t-\ln|1+t|\Big)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\big[(2-\ln 3)-(0-\ln 1)\big] = 4-2\ln 3 = 4-\ln 9.$$

Пример 2.4. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(8-x^2\right)^2}$.

Решение. Сделаем замену переменной.

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(8-x^2\right)^2} = \left\| \begin{array}{l} u=8-x^2 \\ du=-2xdx \\ xdx=\dfrac{1}{-2}du \end{array} \right\| \quad \begin{array}{c|c} x & u=8-x^2 \\ \hline 1 & 8-1^2=7 \\ \hline 0 & 8-0^2=8 \end{array} \quad \| = \int\limits_8^7 \frac{\frac{1}{-2}du}{u^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_8^7 \frac{du}{u^2} =$$

$$(\text{свойство 2}) = \frac{1}{2}\int\limits_7^8 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int\limits_7^8 u^{-2}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{112}.$$

Пример 2.5. Вычислить $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$.

Решение. Под знаком интеграла $\sin x$ с нечётным положительным показателем степени. Отделим от $\sin^3 x$ один множитель, используем формулу $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ и сделаем замену переменной:

$$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 x\sqrt{\cos x}\sin xdx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1-\cos^2 x\right)\sqrt{\cos x}\sin xdx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \cos x \\ du = \sin x dx \end{matrix} \right\| \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & u = \cos x \\ \hline \pi/2 & \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \hline \pi/3 & \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \quad \left\| = \int\limits_{1/2}^{0} \left(1-u^2\right)\sqrt{u}du = (\text{свойство 2}) = \right.$$

$$= \int\limits_{0}^{1/2} \left(1-u^2\right)u^{\frac{1}{2}}du = \int\limits_{0}^{1/2} \left(u^2-1\right)u^{\frac{1}{2}}du = \int\limits_{0}^{1/2} \left(u^{\frac{5}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du = \left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{2u^3\sqrt{u}}{7} - \frac{2u\sqrt{u}}{3}\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{2\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}}{7} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{1}{28\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{-25}{84\sqrt{2}} = -\frac{25\sqrt{2}}{168}.$$

2.8.2 Метод интегрирования по частям

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют непрерывные производные на интервале $(a;b)$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям для определенных интегралов:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \tag{2.10}$$

или, в более подробной записи

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Пример 2.6. Вычислить $\int\limits_1^3 (x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Применим формулу (2.10) интегрирования по частям для определённого интеграла, учитывая, что интеграл первого типа:

$$\left\| \begin{array}{l} u = x+1 \quad \to \; du = dx \\ dv = e^{3x}dx \to v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\|, \text{ тогда}$$

$$\int\limits_1^3 (x+1)e^{3x}dx = \frac{x+1}{3}e^{3x}\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\int\limits_1^3 e^{3x}dx = \left(\frac{4}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^3\right) - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_1^3 = \frac{4}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^3 -$$

$$-\frac{1}{9}\left(e^9 - e^3\right) = \frac{4}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^9 + \frac{1}{9}e^3 = \frac{11}{9}e^9 - \frac{5}{9}e^3 = \frac{e^3}{9}\left(11e^3 - 5\right).$$

Пример 2.7. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \; dx$.

Решение. Применим формулу (2.10) интегрирования по частям для определённого интеграла, учитывая, что интеграл второго типа:

$\left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \quad \to \; du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\|$, тогда $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{1+x^2}$ (=)

Вспомним, что $\int \dfrac{xdx}{1+x^2} = \int \dfrac{\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$.

(=) $\left(1 \cdot arctg\, 1 - 0\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$.

2.9 Геометрические приложения определенного интеграла

2.9.1 Вычисление площадей

Площадь криволинейной трапеции

Выше мы показали, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ $(\text{при } f(x) \geq 0)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox вычисляется по формуле (2.5) $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 2.8. Вычислить площадь, образованную одной аркой синусоиды и осью Ox.

Решение. Рассматриваемая область имеет вид, представленный на рисунке 2.4.

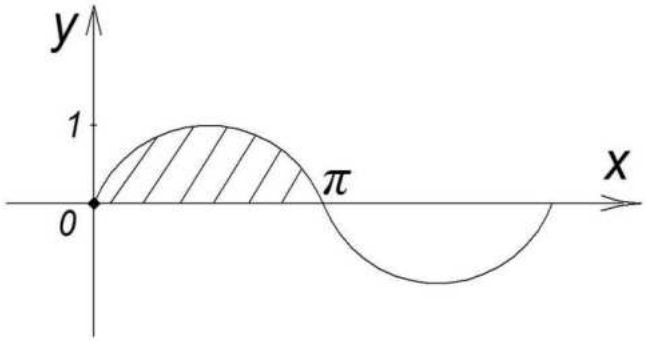


Рисунок 2.4 – Область, ограниченная одной аркой синусоиды и осью Ox

Площадь одной арки вычислим по формуле (2.5).

$S = \int_a^b f(x)\,dx$, где $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$, тогда

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Пример 2.9. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом (рисунок 2.5).

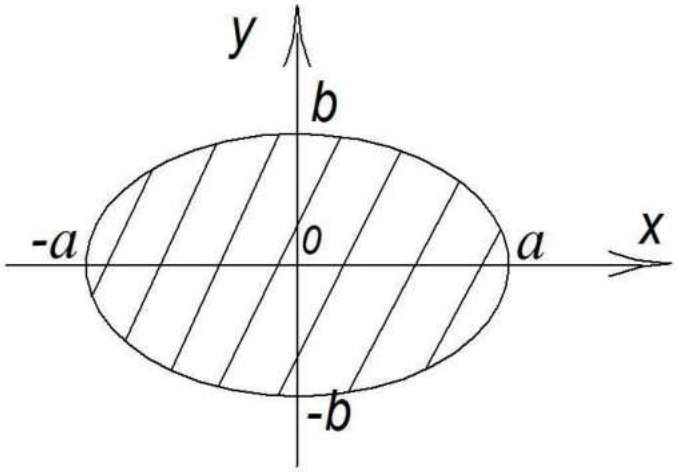


Рисунок 2.5 – Область, ограниченная эллипсом

Решение. Из канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a \ge b > 0$,

имеем $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Тогда искомую площадь можно вычислить как четыре площади фигуры, расположенной в 1 четверти, то есть

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx= \left\| \begin{array}{l} x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{c|c} x & t=\arcsin\frac{x}{a} \\ \hline a & \arcsin\frac{a}{a}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2} \\ \hline 0 & \arcsin\frac{0}{a}=\arcsin 0=0 \end{array} \right\| = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\cos t\,dt=\frac{4ba^2}{a}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=2ab\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

Площадь области, ограниченной линиями, заданными в декартовых координатах

Если функции $y = y_н(x)$ и $y = y_в(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a; b]$, причём $y_н(x) \le y_в(x)\ \forall x \in [a; b]$, то площадь области P, заключенной между графиками функций $y = y_н(x)$, $y = y_в(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рисунок 2.6) равна:

$$S = \int_a^b [y_в(x) - y_н(x)]dx. \qquad (2.11)$$

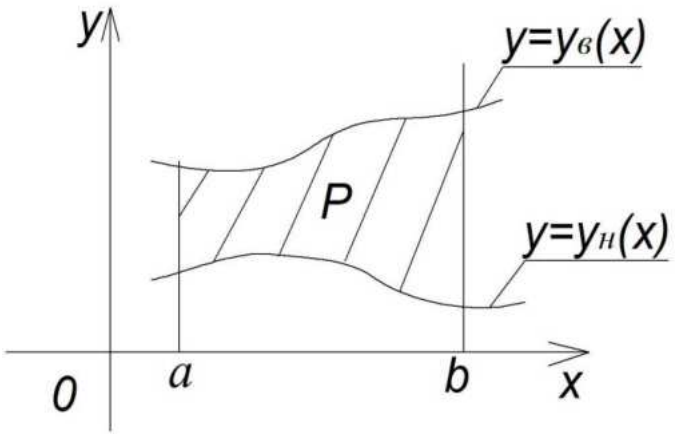


Рисунок 2.6 – Область P, заключенная между графиками функций $y = y_н(x)$ и $y = y_в(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$

Пример 2.10. Найти площадь области, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2 - 2$ (рисунок 2.7).

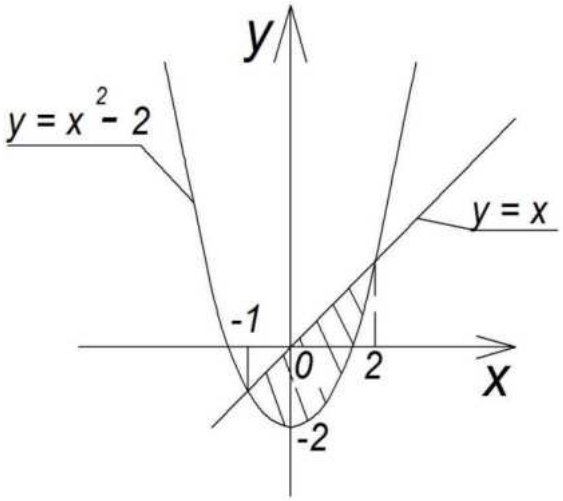


Рисунок 2.7 – Область, ограниченная линиями $y = x$ и $y = x^2 - 2$

Решение. Воспользуемся формулой (2.11):

$$S=\int_a^b\left[y_в(x)-y_н(x)\right]dx,\ \text{где}\ y_в=x,\ y_н=x^2-2.$$

Для определения пределов интегрирования a и b найдем точки пересечения заданных параболы и прямой. Приравняем их ординаты и получим $x^2-2=x\ \Rightarrow\ x_1=-1,\ x_2=2$. То есть $a=-1,\ b=2$.

Тогда искомая площадь будет:

$$S=\int_{-1}^{2}\left[x-\left(x^2-2\right)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+2\cdot2\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)\right)=\left(\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)=$$

$$=\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2=6+\frac{3}{2}-\frac{9}{3}=6+1{,}5-3=4{,}5.$$

Пример 2.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x,\ x=3y,\ x=10-2y$.

Решение. Построим искомую фигуру (рисунок 2.8).

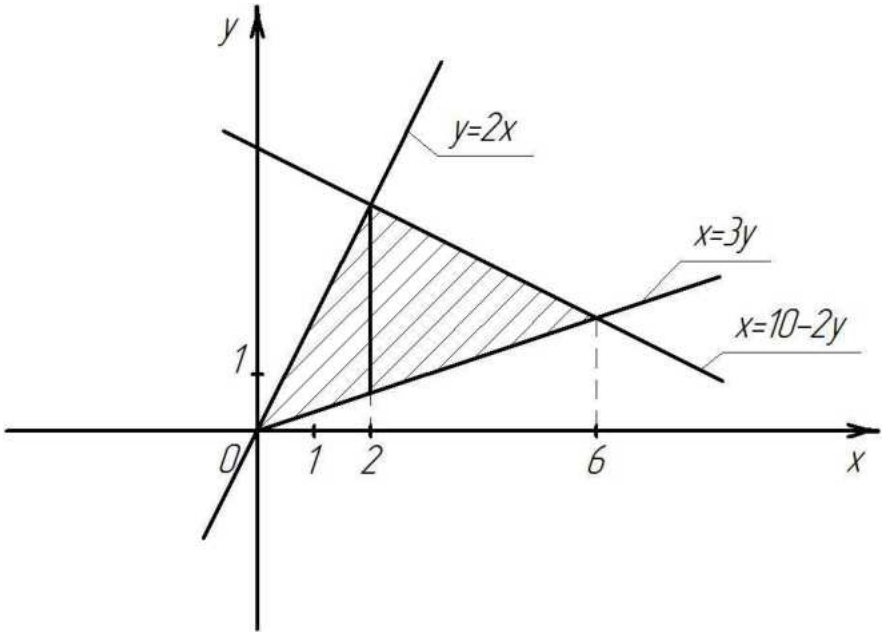


Рисунок 2.8 – Область, ограниченная линиями $y=2x,\ x=3y,\ x=10-2y$

Найдём абсциссы точек пересечения данных линий:

а) $\begin{cases} y = 2x \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \; x_1 = 0;$

б) $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \; x_2 = 6;$

в) $\begin{cases} x = 10 - 2y \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \; x_3 = 2.$

Для вычисления площади данной фигуры необходимо разбить её на две части вертикальной прямой $x = 2$ и посчитать как сумму площадей полученных фигур:

$S = S_1 + S_2$, где, согласно формуле (2.11),

$$S_1 = \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{3}x\right) dx = \left(x^2 - \frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{4}{6} = \frac{12-2}{3} = \frac{10}{3};$$

$$S_2 = \int_2^6 \left(5 - \frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) dx = \int_2^6 \left(5 - \frac{5x}{6}\right) dx = \left(5x - \frac{5x^2}{12}\right)\Bigg|_2^6 = \left(5 \cdot 6 - \frac{5 \cdot 36}{12}\right) - \left(5 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 4}{12}\right) =$$

$$= 30 - 15 - 10 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}.$$

Тогда $S = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} = \frac{30}{3} = 10.$

Площадь области, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах

Если функция $r = r(\varphi)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, то площадь области $P = \{(r; \varphi): \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le r(\varphi)\}$, граница которой в полярной системе координат задана графиком функции $r = r(\varphi)$, лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рисунок 2.9), определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi. \qquad (2.12)$$

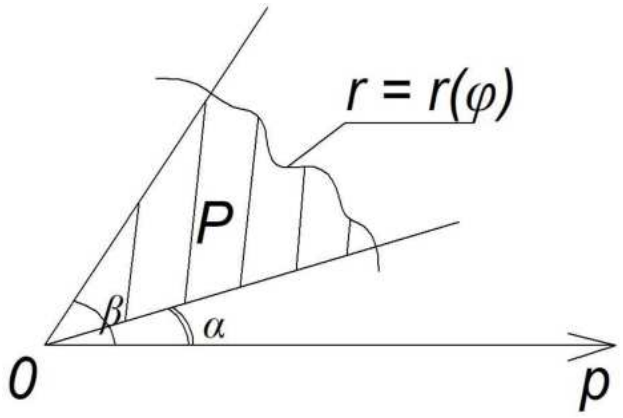


Рисунок 2.9 – Область P, заданная
в полярной системе координат

Пример 2.12. Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, которая называется ***кардиоидой***.

Решение. Построим кардиоиду (рисунок 2.10). Для этого составим таблицу значений функции:

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
r	$2a$	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$

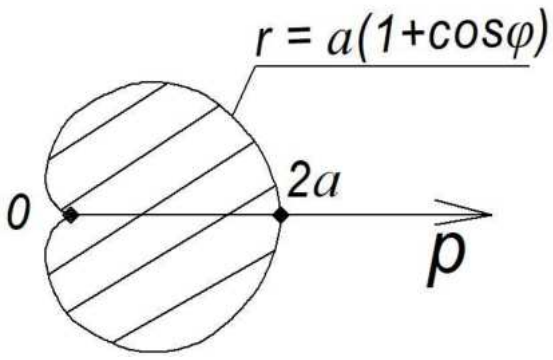


Рисунок 2.10 – Область, ограниченная кардиоидой

По формуле (2.12) вычисления площади в полярной системе координат получаем

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos\varphi)]^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi + 2\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi \right) = \frac{a^2}{2}\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\left(2\pi + 2\sin 2\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi \right) - \left(0 + 2\sin 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\sin 0 \right) \right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[(2\pi + 0 + \pi + 0) - 0 \right] = \frac{a^2}{2}\cdot 3\pi = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Площадь области, ограниченной линиями, заданными параметрически

Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой Γ, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2;\ (x')^2 + (y')^2 \ne 0 \quad \forall t \in [t_1;\, t_2],$$

определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\, dt. \tag{2.13}$$

Пример 2.13. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом, пользуясь параметрическими уравнениями.

Решение. Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тогда по формуле (2.13) для вычисления площади имеем

$S = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\, dt$, где $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$

$\Rightarrow x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = b\cos t$, тогда

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t \right) dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(cos^2 t + sin^2 t\right)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{ab}{2}\cdot t\Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}\left(2\pi - 0\right) = ab\pi .$$

2.9.2 Вычисление длин кривых

Понятие спрямляемости кривой

Пусть задана некоторая кривая L. Разобьем эту кривую на части точками $M_0, M_1, M_2, .., M_n$ и впишем в эту кривую ломаную с точками излома $M_0, M_1, M_2, .., M_n$. Каждому такому разбиению поставим в соответствие длину этой ломаной $\ell_n = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k$ (рисунок 2.11).

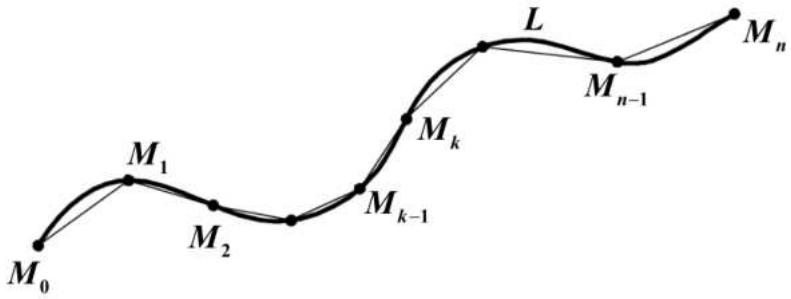


Рисунок 2.11 – Разбиение кривой L

Рассмотрим последовательность таких разбиений и будем говорить, что разбиение неограниченно измельчается, если $\lambda = \max_{k=1,n}\{M_{k-1}M_k\} \to 0$.

Определение. Будем говорить, что кривая L спрямляема (имеет длину), если существует предел $\ell = \lim_{\lambda \to 0} \ell_n$, не зависящий от способа выбора последовательности разбиений кривой. При этом её длиной называют число ℓ.

Замечание. Термин «спрямляемость» происходит из представления о том, что спрямляемую кривую можно «выпрямить» и расположить на отрезке прямой, длина которого есть длина кривой.

Дифференциал длины дуги кривой

Предположим, что спрямляемая кривая L задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [t_0; t_1].$

Часть длины кривой L, соединяющей точки $M_0(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$ и $M(x(t); y(t); z(t))$, будем рассматривать как функцию аргумента t и обозначать $\ell(t)$.

Теорема. Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ дифференцируемы в точке t, то и функция $\ell(t)$ также дифференцируема и при этом имеет место формула $d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$.

Доказательство. По определению производной имеем

$\dfrac{d\ell}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \ell}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \rho}{\Delta t}$, где $\Delta\rho$ расстояние между точками $M(x(t); y(t); z(t))$ и $M(x(t+\Delta t); y(t+\Delta t); z(t+\Delta t))$.

По формуле расстояния между двумя точками

$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, где $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$, $\Delta z = z(t+\Delta t) - z(t)$.

Поэтому, ввиду непрерывности функции корня (при неотрицательных значениях аргумента) и существования производных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, получаем

$$\frac{d\ell}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2}} = \sqrt{\lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 \right]} =$$

$$= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,.$$

Отметим, что в частности из теоремы вытекают следующие формулы для дифференциала длины дуги плоской кривой:

1. Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0; t_1]$, то $d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$.

2. Если кривая является графиком функции $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$, где функция $f(x)$ дифференцируема, то $d\ell = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

Заметим, что последняя формула вытекает из предыдущей ввиду того, что задание кривой уравнением $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$ равносильно её параметрическому заданию $\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a; b]$.

3. Если кривая является графиком функции $x = \varphi(y)$ при $y \in [c; d]$, где функция $\varphi(y)$ дифференцируема, то $d\ell = \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\,dy$.

Формулы для вычисления длин дуг кривых

Поскольку для длины дуги кривой имеет место соотношение $\ell = \int d\ell$, то полученные выше формулы для вычисления дифференциала приводят к следующим соответствующим формулам для вычисления длин дуг кривых. Разумеется, запись каждой из приводимых ниже формул определяется выражением для дифференциала длины дуги. Последнее определяется способом задания кривой. Таким образом:

1. Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [t_0; t_1]$, то

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt. \qquad (2.14)$$

2. Если плоская кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_0; t_1]$, то

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \qquad (2.15)$$

3. Если кривая является графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$, то

$$\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2.16)$$

4. Если кривая является графиком дифференцируемой функции $x = \varphi(y)$ при $y \in [c; d]$, то

$$\ell = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\, dy. \qquad (2.17)$$

5. Если плоская кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ при $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функции $r(\varphi)$, $r'(\varphi)$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$, то

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \qquad (2.18)$$

Пример 2.14. Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y = x^{3/2}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение. Длину дуги вычислим по формуле (2.16) $\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$, где $a = 0$, $b = 5$.

Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим: $f'(x) = y' = \frac{3}{2} x^{1/2} \Rightarrow$

$[f'(x)]^2 = \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2 = \frac{9x}{4}$, тогда

$$\ell=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\left\|\begin{array}{l}t=1+\dfrac{9x}{4}\\ dt=\dfrac{9}{4}dx\\ dx=\dfrac{4}{9}dt\end{array}\right\|\begin{array}{|c|c|}\hline x & t=1+\dfrac{9x}{4}\\ \hline 5 & 1+\dfrac{9\cdot5}{4}=\dfrac{49}{4}\\ \hline 0 & 1+\dfrac{9\cdot0}{4}=1\\ \hline\end{array}=\int_1^{\frac{49}{4}}\sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}dt=\frac{4}{9}\int_1^{\frac{49}{4}}t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{\frac{49}{4}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Bigg|_1^{\frac{49}{4}}=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3}-\sqrt{(1)^3}\right)=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^3-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}-1\right)=\frac{8}{27}\cdot\frac{335}{8}=\frac{335}{27}.$$

Пример 2.15. Вычислить длину части арки циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ при $0\le t\le\pi$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.15) $\ell=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$, где $t_0=0$, $t_1=\pi$, $x'=(a(t-\sin t))'=a(1-\cos t)$, $y'=(a(1-\cos t))'=a\sin t$, тогда

$$\ell=\int_0^{\pi}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin t^2\right)}dt=a\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos t+1}dt=a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a\cdot2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi}=-4a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos0\right)=-4a(0-1)=4a.$$

Здесь мы воспользовались формулой $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$.

Пример 2.16. Вычислить длину первого витка логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.18) $\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$.

Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π, то есть $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$. Так как $r' = e^{\varphi}$, то

$$\ell = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\left(e^{\varphi}\right)^2 + \left(e^{\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}}\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} e^{\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}\, e^{\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - e^{0}\right) = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right).$$

2.9.3 Вычисление объёмов тел и площадей поверхностей вращения

Объём тела с известным поперечным сечением

Пусть для некоторого тела имеется такая ось, что известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными к оси. Такие сечения называют поперечными, а тела – телами с известными поперечными сечениями. Для определенности будем считать, что упомянутая выше ось есть ось *Ox* (рисунок 2.12).

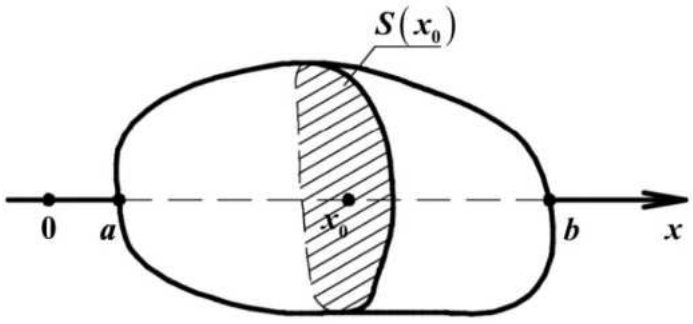


Рисунок 2.12 – Тело с известными поперечными сечениями

Будем считать, что площадь поперечного сечения $S(x)$ является непрерывной функцией аргумента x. Требуется найти объём описанного тела.

Произведём следующие построения. Разобьем отрезок $[a;b]$ на элементарные части точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Длины элементарных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = \overline{1,n}$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ произвольным образом выберем точку $t_k,\ k = \overline{1,n}$ и проведем через неё плоскость, перпендикулярную к оси *Ox*.

В результате тело будет разбито на n элементарных частей (рисунок 2.13), в каждой из которых построенное «срединное» сечение с площадью $S(t_k)$ (рисунок 2.14).

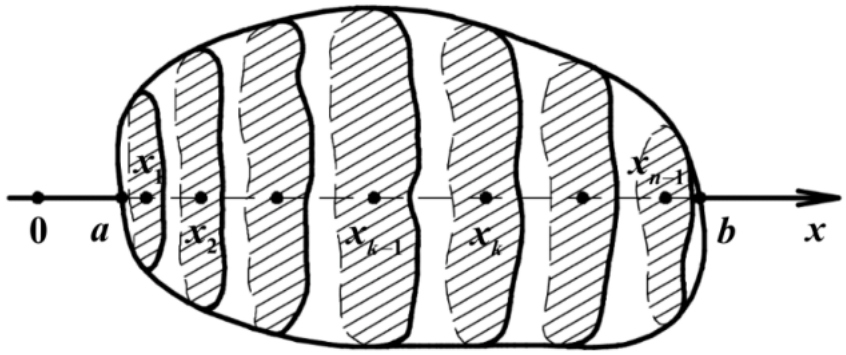


Рисунок 2.13 – Разбиение тела на n элементарных частей

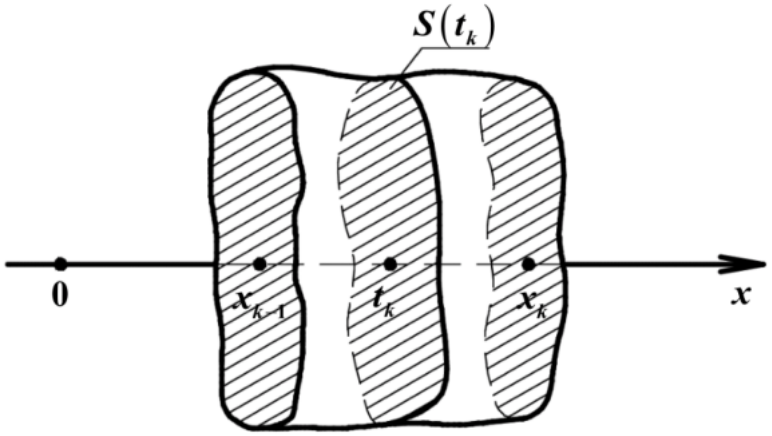


Рисунок 2.14 – «Срединное» сечение тела с площадью $S(t_k)$

Очевидно, объём всего тела есть сумма объёмов элементарных частей, а объём элементарной части с номером k есть приближенно $S(t_k)\Delta x_k$.

Таким образом, получаем $V \approx \sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta x_k$, причём выписанное приближённое равенство тем точнее, чем мельче разбиение отрезка $[a; b]$ на элементарные части.

Поскольку $\sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta x_k$ есть интегральная сумма для интеграла $\int_a^b S(x)dx$, то ввиду непрерывности функции $S(x)$ существует предел $\lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta x_k \right) = \int_a^b S(x)dx$, где $\lambda = \max_{k=\overline{1,n}}\{\Delta x_k\}$. Таким образом, получаем

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{2.19}$$

Пример 2.17. Найти объём части тела, ограниченного эллиптическим конусом с вершиной в точке $M_0(0; 0; h)$, направляющей $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ и плоскостью Oxy.

Решение. Ясно, что перпендикулярные к оси Oz плоскости рассекают тело по фигурам, ограниченным эллипсами с полуосями $a(z)$, $b(z)$, где z – аппликата точки пересечения секущей плоскости с осью Oz (рисунок 2.15).

Площадь такой фигуры есть $S(z) = \pi a(z)b(z)$, где $0 \le z \le h$. Но тогда искомый объём ввиду формулы (2.19) $V = \pi \int_0^h a(z)b(z)dz$.

Чтобы найти $a(z)$, $b(z)$, рассмотрим $\Delta A'O'M_0$ и ΔAOM_0 (рисунок 2.15). Очевидно, эти треугольники подобны, поэтому $\dfrac{a}{h} = \dfrac{z(z)}{h - z} \Rightarrow a(z) = \dfrac{a(h - z)}{h}$.

Аналогичным образом получаем $b(z) = \dfrac{b(h - z)}{h}$.

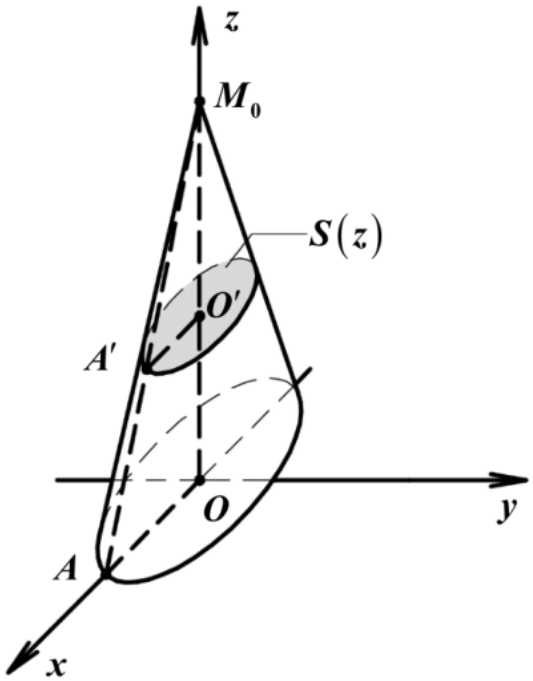


Рисунок 2.15 – Тело, ограниченное эллиптическим конусом

Тогда $V=\pi\int\limits_0^h a(z)b(z)dz=\pi\int\limits_0^h \frac{a(h-z)}{h}\cdot\frac{b(h-z)}{h}dz=\frac{\pi ab}{h^2}\int\limits_0^h (h-z)^2\,dz=$

$$=\frac{\pi ab}{h^2}\cdot\frac{-(h-z)^3}{3}\Bigg|_0^h=-\frac{\pi ab}{3h^2}\cdot(h-z)^3\Bigg|_0^h=-\frac{\pi ab}{3h^2}\left[(h-h)^3-(h-0)^3\right]=$$

$$=-\frac{\pi ab}{3h^2}\left(0-h^3\right)=\frac{\pi abh^3}{3h^2}=\frac{\pi abh}{3}.$$

Объём тела вращения

Пусть на отрезке $[a;b]$ оси Ox определена непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$. Напомним, что плоскую фигуру, ограниченную линиями $y=f(x),\ x=a,\ \ x=b,\ y=0,$ называют криволинейной трапецией.

Представим себе, что криволинейная трапеция вращается вокруг оси Ox как вокруг линии симметрии. В результате точки криволинейной трапеции «заметают» часть пространства, называемую телом вращения. Ясно, что каж-

дая точка поверхности тела вращения лежит на окружности радиуса $f(x)$ с центром в точке оси *Ox*. Это означает, что площадь перпендикулярного сечения тела вращения может быть найдена по формуле $S(x)=\pi f^2(x)$, где x – абсцисса любой точки перпендикулярного сечения.

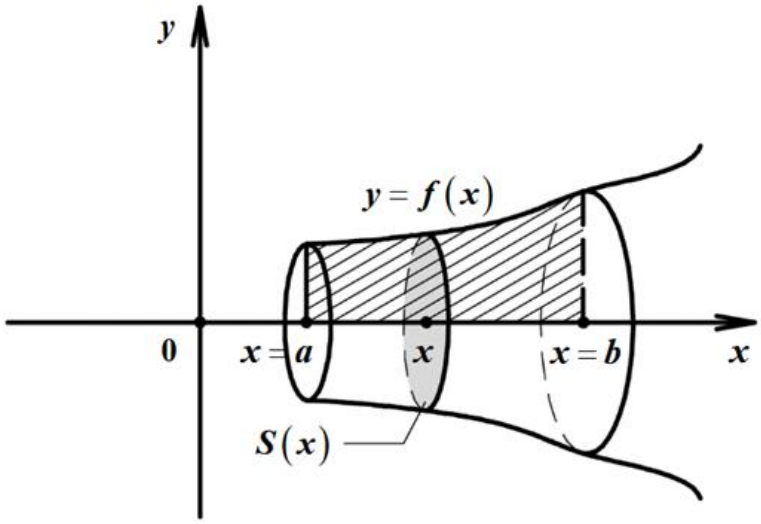


Рисунок 2.16 – Объём тела вращения вокруг оси *Ox*

Согласно формуле (2.19), в рассматриваемом случае имеем

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (2.20)$$

Замечание. Выше для описания тела вращения ось *Ox* была выбрана лишь для определенности. Аналогичным образом определяется тело вращения с любой осью в качестве оси симметрии. В частности, определено тело вращения относительно оси *Oy*. Ясно, что такие тела вращения являются результатом вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=\varphi(y),\ y=c,\ \ y=d,\ x=0,$ а его объём может быть найден по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (2.21)$$

Пример 2.18. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* плоской фигуры, ограниченной линиями $y=3x,\ y=0,\ y=4-x^2$.

Решение. Строим искомую фигуру (рисунок 2.17).

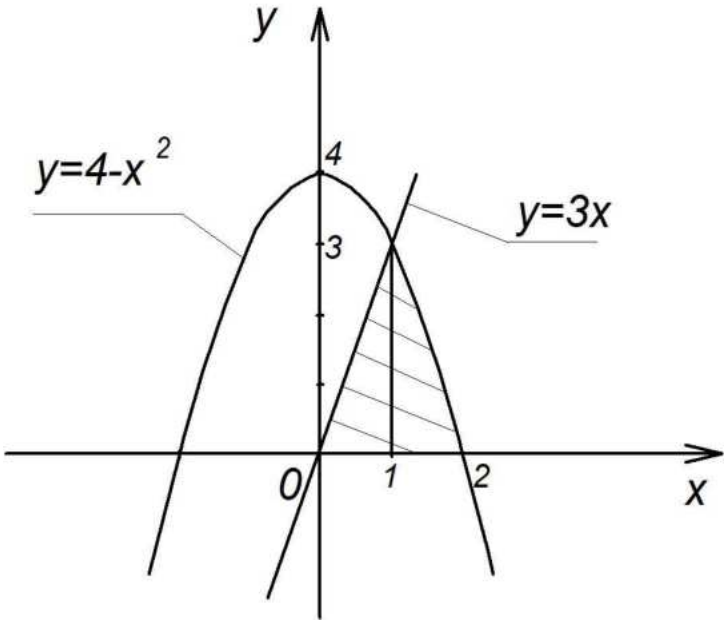


Рисунок 2.17 – Фигура, ограниченная линиями
$y=3x,\ y=0,\ y=4-x^2$

Для вычисления данного объёма нужно разбить плоскую фигуру на две части вертикальной прямой $x=1$ и найти сумму объёмов получившихся тел $V_x=V_1+V_2$, где V_1 и V_2 найдём по формуле (2.20).

$V_1=\pi\int\limits_{a_1}^{b_1} f_1^2(x)dx$, где $a_1=0,\ b_1=1,\ f_1(x)=3x$, тогда

$$V_1=\pi\int_0^1 (3x)^2\,dx=\pi\int_0^1 9x^2\,dx=\pi\cdot 3x^3\Big|_0^1=3\pi\left(1^3-0^3\right)=3\pi.$$

$V_2=\pi\int\limits_{a_2}^{b_2} f_2^2(x)dx$, где $a_2=1,\ b_2=2,\ f_2(x)=4-x^2$, тогда

$$V_2=\pi\int_1^2 \left(4-x^2\right)^2\,dx=\pi\int_1^2 \left(16-8x^2+x^4\right)dx=\pi\left(16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$= \pi\left[\left(16\cdot 2 - \frac{8\cdot 2^3}{3} + \frac{2^5}{5}\right) - \left(16\cdot 1 - \frac{8\cdot 1^3}{3} + \frac{1^5}{5}\right)\right] = \pi\left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \left(16 - \frac{8}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] =$$

$$= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} - 16 + \frac{8}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi\left(16 - \frac{56}{3} + \frac{31}{5}\right) = \frac{53\pi}{15}.$$

Окончательно получим $V_x = 3\pi + \frac{53\pi}{15} = \frac{98\pi}{15}$.

Пример 2.19. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 0$, $y + 2x = 4$.

Решение. Строим искомую фигуру (рисунок 2.18).

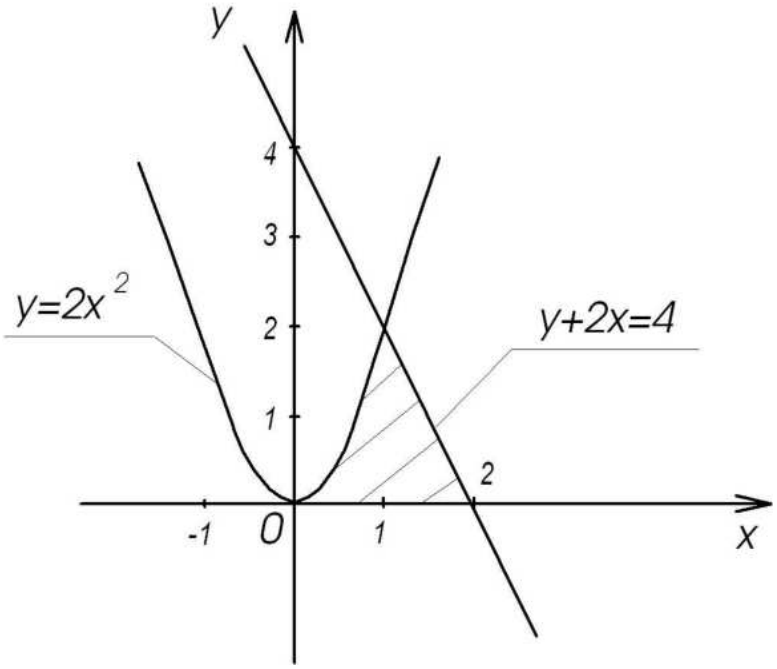


Рисунок 2.18 – Фигура, ограниченная линиями
$y = 2x^2$, $y = 0$, $y + 2x = 4$

Для вычисления данного объёма нужно найти разность объёмов тел $V_y = V_1 - V_2$, где V_1 и V_2 найдём по формуле (2.21) $V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$, при этом границы интегрирования c и d будут одинаковыми для V_1 и V_2: $c = 0$, $d = 2$.

$V_1 = \pi \int\limits_c^d \varphi_1^2(y)dy$, где $\varphi_1(y)$ найдём из уравнения $y + 2x = 4$:

$x = \dfrac{4-y}{2} = 2 - \dfrac{y}{2} = \varphi_1(y)$, тогда

$$V_1 = \pi \int\limits_0^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int\limits_0^2 \left(4 - 2y + \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \left(4y - y^2 + \frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \left[\left(4 \cdot 2 - 2^2 + \frac{2^3}{12}\right) - 0\right] = \pi \left(8 - 4 + \frac{2}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}.$$

$V_2 = \pi \int\limits_c^d \varphi_2^2(y)dy$, где $\varphi_2(y)$ найдём из уравнения $y = 2x^2$: $x^2 = \dfrac{y}{2} = \varphi_2^2(y)$,

тогда $V_1 = \pi \int\limits_0^2 \dfrac{y}{2} dy = \pi \cdot \dfrac{y^2}{4}\Bigg|_0^2 = \pi \left(\dfrac{2^2}{4} - 0\right) = \pi$.

Окончательно получим $V_y = \dfrac{14\pi}{3} - \pi = \dfrac{11\pi}{3}$.

2.10 Решение задач механики, гидростатики, термодинамики и электродинамики

Путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени $[t_1; t_2]$ выражается интегралом

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \tag{2.22}$$

Работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a; b]$, численно равна интегралу

$$A = \int\limits_a^b F(x)dx. \tag{2.23}$$

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x=a$, $x=b$, $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ (рисунок 2.19), вычисляется по формуле

$$Q=g\rho\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)xdx. \tag{2.24}$$

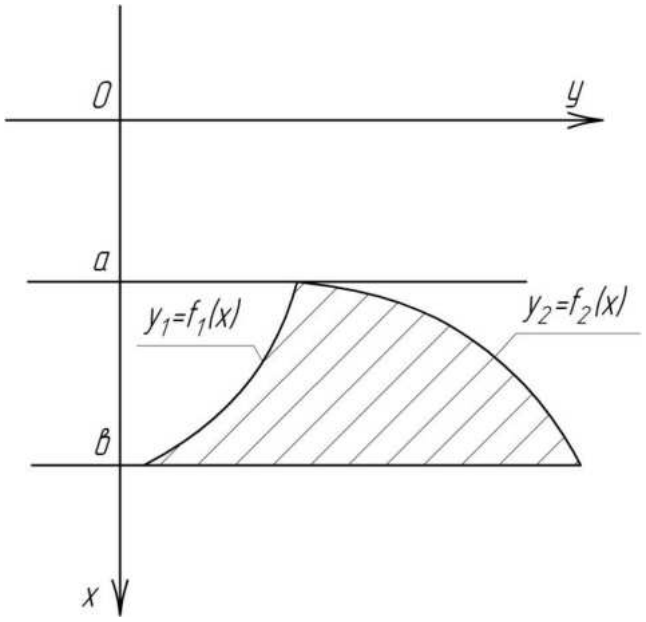


Рисунок 2.19 – Пластина, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$

Масса m плоской дуги находится по формулам:

1. Если дуга задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, то

$$m=\rho\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \tag{2.25}$$

2. Если дуга задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то

$$m=\rho\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \tag{2.26}$$

3. Если дуга задана уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, то

$$m=\rho\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\,d\varphi. \tag{2.27}$$

Статические моменты относительно координатных осей плоской дуги находятся по формулам:

1. Если дуга задана уравнением $y = f(x),\ a \le x \le b$, то

$$S_x = \rho\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad S_y = \rho\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \tag{2.28}$$

2. Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),$ $t_1 \le t \le t_2$, то

$$S_x = \rho\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt, \qquad S_y = \rho\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \tag{2.29}$$

3. Если дуга задана уравнением $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$S_x = \rho\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\,d\varphi, \qquad S_y = \rho\int_\alpha^\beta r\cos\varphi\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\,d\varphi. \tag{2.30}$$

Моменты инерции относительно координатных осей плоской дуги находятся по формулам:

1. Если дуга задана уравнением $y = f(x),\ a \le x \le b$, то

$$M_x = \rho\int_a^b y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad M_y = \rho\int_a^b x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \tag{2.31}$$

2. Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),$ $t_1 \le t \le t_2$, то

$$M_x = \rho\int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt, \quad M_y = \rho\int_{t_1}^{t_2} (x(t))^2\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \tag{2.32}$$

3. Если дуга задана уравнением $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$M_x = \rho\int_\alpha^\beta r^2\sin^2\varphi\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\,d\varphi, \quad M_y = \rho\int_\alpha^\beta r^2\cos^2\varphi\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\,d\varphi. \tag{2.33}$$

Координаты центра тяжести плоской дуги находятся по формулам:

$$x_C = \frac{S_y}{m}, \quad y_C = \frac{S_x}{m}, \tag{2.34}$$

где m − масса кривой.

Пример 2.20. Найти статические моменты относительно координатных осей однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$, расположенной во второй четверти (рисунок 2.20).

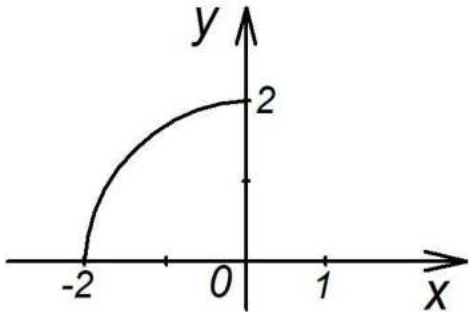


Рисунок 2.20 – Дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$,
расположенная во второй четверти

Решение. Воспользуемся формулами (2.28):

$S_x = \rho\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, $S_y = \rho\int\limits_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, где $a=-2$, $b=0$, $\rho = const$.

Так как уравнение дуги $y = \sqrt{4-x^2}$, то $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Упростим подкоренное выражение под знаком интеграла:

$$1+(y')^2 = 1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4-x^2+x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}, \text{ тогда}$$

$$S_x = \rho\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \rho\int\limits_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx = 2\rho\int\limits_{-2}^{0}dx = 2\rho\,x\Big|_{-2}^{0} = 4\rho;$$

$$S_y = \rho\int\limits_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \rho\int\limits_{-2}^{0} x\cdot\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx = 2\rho\int\limits_{-2}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}\,x = \left\|\begin{array}{l} u = 4-x^2 \\ du = -2x\,dx \\ x\,dx = \dfrac{1}{-2}\,du \end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{c|c} x & u = 4-x^2 \\ \hline -2 & 4-(-2)^2 = 0 \\ \hline 0 & 4-0^2 = 4 \end{array}\right\| = 2\rho\int\limits_0^4 \frac{\frac{1}{-2}\,du}{\sqrt{u}} = -\rho\int\limits_0^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left(\begin{array}{l}\text{по свойству 2}\\ \text{определённ ого}\\ \text{интеграла}\end{array}\right) = \rho\int\limits_4^0 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \rho\cdot 2\sqrt{u}\Big|_4^0 = 0 - \rho\cdot 2\sqrt{4} = -4\rho\,.$$

Пример 2.21. ***Механика***

Найти работу, которую надо затратить на сжатие пружины на 0,2 *м*, если для сжатия её на 0,01 *м* нужна сила в 60 *Н*.

Решение. Рассмотрим малую деформацию dx, в пределах которой деформирующую силу F можно считать постоянной.

Работа силы F определяется по формуле

$$dA = F\,dx\,. \tag{2.35}$$

По закону Гука сила F, растягивающая (или сжимающая) пружину, пропорциональна этому растяжению (или сжатию), то есть

$$F = kx, \tag{2.36}$$

где x − величина растяжения (сжатия),

k − коэффициент жесткости пружины.

Тогда (2.35) примет вид

$$dA = kx\,dx\,. \tag{2.37}$$

По условию задачи сила $F = 60\,H$ сжимает пружину на 0,01 *м*. Тогда, учитывая равенство (2.36), получим

$$60 = k\cdot 0{,}01 \text{ или } k = 6000.$$

Полную работу деформирующей силы найдем интегрируя (2.37) в пределах от 0 до $l = 0{,}2$ *м*:

$$A = \int_0^l dA = \int_0^{0,2} kxdx = \int_0^{0,2} 6000xdx = 3000x^2 \Big|_0^{0,2} = 3000 \cdot 0{,}2^2 = 60\,(Дж).$$

Пример 2.22. ***Гидростатика***

Найти давление дизельного топлива на стенки цилиндрического бака на каждом метре глубины. Высота бака $H = 3$ *м*, радиус $r = 2$ *м*, $\rho = 860\,\frac{кг}{м^3}$.

Решение. Бак полностью заполнен дизельным топливом. На расстоянии y от начала координат (рисунок 2.21) выделим на поверхности бака элементарное кольцо с высотой dy и площадью боковой поверхности $dS = 2\pi r\,dy$.

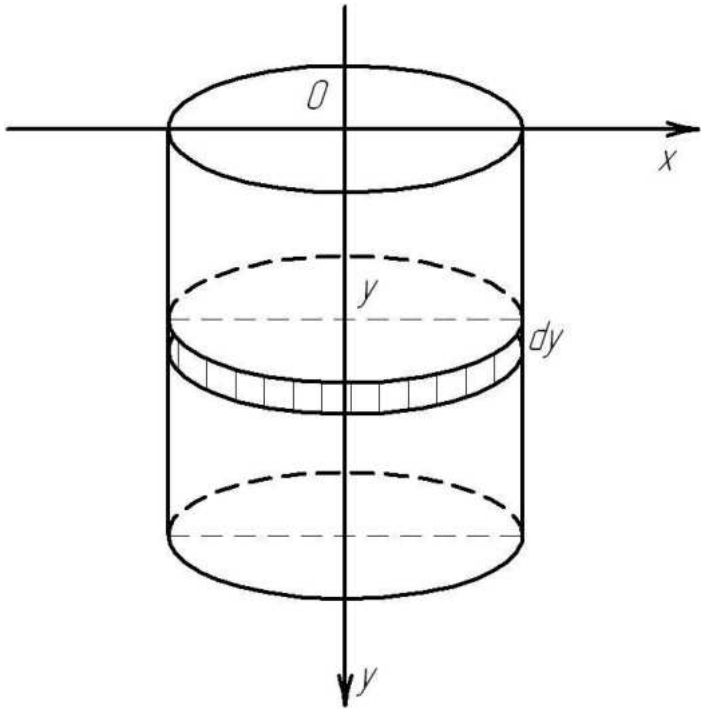


Рисунок 2.21 – Цилиндрический бак

Давление бензина на это кольцо $dQ = \rho \cdot y \cdot dS = \rho \cdot y \cdot 2\pi r dy$.

Проинтегрировав последнее равенство по переменной y на промежутках $[0;1]$, $[0;2]$, $[0;3]$, получим давление летнего дизельного топлива на каждом метре:

$$Q_1 = \int_0^1 dQ = \int_0^1 \rho \cdot y \cdot 2\pi r\, dy = \rho \cdot 2\pi r \int_0^1 y\, dy = \rho \cdot \pi r \cdot y^2 \Big|_0^1 = \rho \cdot \pi r \cdot 1 = 860\pi\ (кг);$$

$$Q_2 = \int_0^2 dQ = \int_0^2 \rho \cdot y \cdot 2\pi r\, dy = \rho \cdot 2\pi r \int_0^2 y\, dy = \rho \cdot \pi r \cdot y^2 \Big|_0^2 = \rho \cdot \pi r \cdot 4 = 3440\pi\ (кг);$$

$$Q_3 = \int_0^3 dQ = \int_0^3 \rho \cdot y \cdot 2\pi r\, dy = \rho \cdot 2\pi r \int_0^3 y\, dy = \rho \cdot \pi r \cdot y^2 \Big|_0^3 = \rho \cdot \pi r \cdot 9 = 7740\pi\ (кг).$$

Пример 2.23. ***Гидростатика***

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями $a = 5{,}2\ м$, $b = 3{,}7\ м$ и высотой $H = 2\ м$.

Решение. По закону Паскаля сила давления жидкости Q на площадку S с глубиной погружения h выражается формулой

$$Q = \gamma S h,$$

где $\gamma = g\rho$ − удельный вес жидкости (при этом площадка S расположена горизонтально),

g − ускорение свободного падения,

ρ − плотность жидкости.

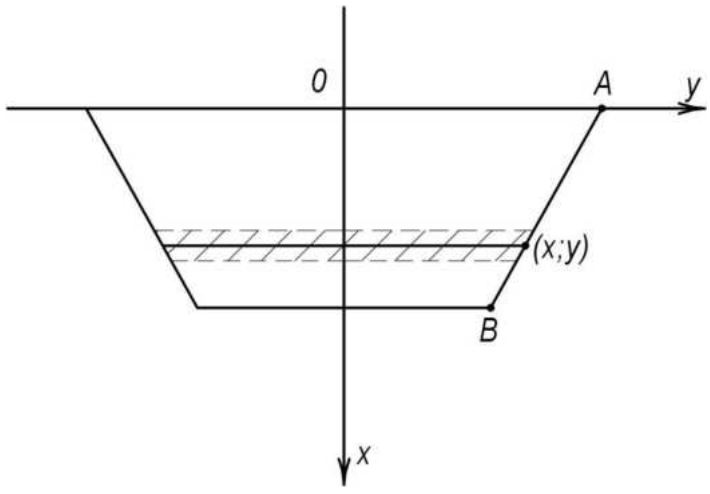


Рисунок 2.22 – Плотина, имеющая форму равнобедренной трапеции

Давление в жидкости передается одинаково во всех направлениях. Выделим в трапеции элементарную полоску шириной dx на расстоянии x от начала координат (рисунок 2.22). При $dx \to 0$ давление во всех частях полоски можно считать одинаковым, равным $dQ = \gamma\, x\, dS$, где x – глубина погружения полоски (при $dx \to 0$ можно считать все точки полосы одинаково удаленными от оси Oy), $dS = 2y \cdot dx$ – площадь полоски (площадь трапеции равна произведению длины средней линии $2y$ на высоту dx).

Тогда элементарное давление

$$dQ = 2\gamma \cdot x\, y\, dx. \qquad (2.38)$$

Точки $A\left(0; \frac{a}{2}\right)$ и $B\left(H; \frac{b}{2}\right)$ (рисунок 2.22), тогда прямая AB определяется уравнением: $\frac{x-0}{H-0} = \frac{y-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{2y-a}{b-a} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{H} \cdot x + a\right)$.

Подставим последнее выражение в (2.38) и получим: $dQ = \gamma \cdot \left(\frac{b-a}{H} \cdot x + a\right) x\, dx$. Тогда искомую силу найдём по формуле

$$Q = \int_0^H dQ = \int_0^H \gamma \cdot \left(\frac{b-a}{H} \cdot x + a\right) x dx = \gamma \int_0^H \left(\frac{b-a}{H} \cdot x^2 + ax\right) dx =$$

$$= \gamma \left(\frac{b-a}{H} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^H = \gamma \left(\frac{b-a}{H} \cdot \frac{H^3}{3} + \frac{aH^2}{2}\right) = \gamma \left(\frac{(b-a)H^2}{3} + \frac{aH^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\gamma(2b+a)H^2}{6}.$$

По условию $a = 5{,}2\ м$, $b = 3{,}7\ м$, $H = 2\ м$, $\gamma = 1000\ \frac{кг}{м^3}$, тогда сила давления воды на плотину $Q = 8400\ кг$.

Пример 2.24. ***Термодинамика***

Азот N_2 массой $0{,}05\,кг$ расширяется изотермически при температуре $T = 253\,K$, и его давление уменьшается от $P_1 = 202\,кПа$ до $P_1 = 101\,кПа$. Определить работу расширения азота.

Решение. Работа в термодинамике при малом изменении объема dV определяется формулой $dA = PdV$, где $P = \dfrac{mRT}{MV}$ – из уравнения Менделеева-Клапейрона, тогда

$$dA = \frac{m\,RT}{MV}\,dV\,, \tag{2.39}$$

где m – масса газа;

$R = 8{,}31\dfrac{Дж}{моль \cdot K}$ – универсальная газовая постоянная;

T – температура;

$M = 0{,}028\dfrac{кг}{моль}$ – молярная масса азота.

Постоянную работу газа найдем, интегрируя (2.39):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} dA = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m\,RT}{MV}\,dV = \frac{m\,RT}{M}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m\,RT}{M}\ln|V|\Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{m\,RT}{M}\left(\ln V_2 - \ln V_1\right) =$$

$$= \frac{m\,RT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Отношение объемов определим по закону Бойля-Мариотта:

$P_1 V_1 = P_2 V_2$ или $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{P_1}{P_2}$, тогда окончательно получим:

$$A = \frac{mRT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{mRT}{M}\ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{0{,}05\cdot 8{,}31\cdot 253}{0{,}028}\ln\frac{202\cdot 10^3}{101\cdot 10^3} \approx 2602\,кДж.$$

Пример 2.25. ***Электродинамика***

Определить электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода сопротивлением $R = 3\,Ом$ при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2\,B$ до $U = 4\,B$ в течение $t = 30\,c$.

Решение. По определению сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, тогда заряд, протекающий за малый промежуток времени dt: $dq = Idt$ (изменением силы тока и напряжения в этом случае можно пренебречь).

По закону Ома $I = \frac{U}{R}$, следовательно, $dq = \frac{U}{R}dt$, где напряжение изменяется по линейному закону

$$U = U_0 + kt. \tag{2.40}$$

Тогда

$$dq = \frac{(U_0 + kt)}{R}dt. \tag{2.41}$$

Из формулы (2.40) получим скорость изменения напряжения: $k = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4-2}{20} = 0{,}1\left(\frac{B}{c}\right)$.

Вычислим искомый заряд, интегрируя (2.41) в пределах от 0 до t:

$$q = \int_0^t dq = \int_0^{30} \frac{U_0 + kt}{R}dt = \left(\frac{U_0 t}{R} + \frac{k t^2}{2R}\right)\Bigg|_0^{30} = \frac{2\cdot 30}{3} + \frac{0{,}1\cdot 30^2}{2\cdot 3} = 35\,(кДж).$$

Пример 2.26. ***Электромагнетизм***

По двум параллельным проводникам, длиной 2,5 *м* каждый, находящимся на расстоянии $r = 0{,}2\,м$ друг от друга, текут одинаковые токи $I = 1000\,A$. Вычислить силу взаимодействия токов.

Решение. Предположим, что токи текут в одном направлении. Ток I_1 создает в месте расположения второго тока I_2 магнитное поле, магнитная индукция которого определяется по формуле $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$.

По закону Ампера на каждый элемент длины dl второго провода в магнитном поле действует сила $dF = I_2 B_1 dl \sin\alpha$, где $\sin\alpha = 1$. Тогда $dF = I_2 B_1 dl$, следовательно,

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl, \tag{2.42}$$

где $I_1 = I_2 = I$,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Гн}{м}$ – магнитная постоянная.

Интегрируя (2.42) по длине проводника, получим:

$$F = \int_0^l dF = \int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \int_0^{2,5} dl = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \cdot l \Big|_0^{2,5} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0{,}2} \cdot 2{,}5 = 2{,}5(H).$$

2.11 Несобственные интегралы

2.11.1 Несобственные интегралы 1-го рода (несобственные интегралы с бесконечными пределами)

Определение. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; +\infty)$, интегрируема на любом отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и существует (конечный) предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, то его называют ***несобственным интегралом первого рода*** и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{2.43}$$

В этом случае говорят также, что несобственный интеграл ***сходится*** на промежутке $[a;+\infty)$, а функция $f(x)$ называется интегрируемой (в несобственном смысле) на промежутке $[a;+\infty)$. Если же предел не существует, то говорят, что интеграл ***расходится***.

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (2.44)$$

Для несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ положим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2.45)$$

и будем говорить, что он ***сходится***, если сходятся оба интеграла в правой части формулы (2.45). Если хотя бы один из интегралов $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***расходится***.

Нетрудно убедиться в том, что выбор точки c не влияет на сходимость и значение (если оно определено) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Определение. Несобственный интеграл первого рода называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Пример 2.27. Выяснить, сходится ли интеграл $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По формуле (2.43)

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}b - \operatorname{arctg}0\right) =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - 0\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \dfrac{\pi}{2}$. Полученный предел конечный.

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится.

Пример 2.28. Проверить, сходится ли интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx$.

Решение. По формуле (2.43)

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\sin b - \sin 0\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\sin b - 0\right) =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$.

Полученный предел не существует, поэтому несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx$ расходится.

Пример 2.29. Выяснить, сходится ли интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x\,dx$.

Решение. По формуле (2.45), а затем, по формулам (2.43) и (2.44) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0}e^x\,dx + \int\limits_0^{+\infty}e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^x dx = \lim_{a\to-\infty}e^x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}e^x\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - e^0\right) = \left(1 - e^{-\infty}\right) + \left(e^{+\infty} - 1\right) = 1 - e^{-\infty} + e^{+\infty} - 1 =$$

$$= -\frac{1}{e^{+\infty}} + e^{+\infty} = -\frac{1}{\infty} + \infty = 0 + \infty = \infty.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$ расходится.

Пример 2.30. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$, если α – некоторое число.

Решение. По формуле (2.45) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$. Рассмотрим два случая.

1. Если $\alpha \neq 1$, то для любого $b>1$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(x^{1-\alpha}\bigg|_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1\right).$$

1.1. При $\alpha>1 \Rightarrow 1-\alpha<0$, тогда

$$\frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) = \frac{1}{1-\alpha} (0-1) = \frac{-1}{1-\alpha}.$$

1.2. При $\alpha<1 \Rightarrow 1-\alpha>0$, тогда

$$\frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha} (\infty - 1) = \infty.$$

2. Если $\alpha = 1$, то для любого $b>1$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

2.11.2 Несобственные интегралы 2-го рода (несобственные интегралы от неограниченных функций)

Определение. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b)$, не ограничена на этом промежутке и интегрируема на отрезке $[a; \eta]$ $\forall \eta \in (a; b)$, причем существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)dx$, то его называют ***несобственным интегралом второго рода*** и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to b-0} \int_a^\eta f(x)dx. \qquad (2.46)$$

Говорят также, что такой несобственный интеграл ***сходится*** на отрезке $[a; b]$, а $f(x)$ называют интегрируемой в несобственном смысле на $[a; b]$. Если предел не существует, то говорят, что интеграл ***расходится***.

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a; b]$, не ограничена на нем и интегрируемая $\forall \eta \in (a; b)$, то аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to a+0} \int_\eta^b f(x)dx. \qquad (2.47)$$

Если $f(x)$ определена на $(a; b)$ и сходятся интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то полагают по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.48)$$

Пример 2.31. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, где $\alpha > 0$ – некоторое число.

Решение. По формуле (2.47) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a \to +0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Рассмотрим два случая.

1. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\lim_{a \to +0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a \to +0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \to +0} \left(x^{1-\alpha}\Big|_a^1 \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \to +0} \left(1 - a^{1-\alpha}\right).$$

1.1. При $\alpha > 1 \Rightarrow 1-\alpha < 0$, тогда

$$\frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \to +0} \left(1 - a^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \to +0} \left(1 - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{0}\right) = \frac{1}{1-\alpha}(1-\infty) = \infty.$$

1.2. При $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1-\alpha > 0$, тогда

$$\frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \to +0} \left(1 - a^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}(1-0) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2. Если $\alpha = 1$, то

$$\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+0} \ln x\Big|_a^1 = \lim_{a\to+0}\left(\ln 1 - \ln a\right) = \ln 1 - \left(-\infty\right) = \infty .$$

Итак, при $0 < \alpha < 1$ данный интеграл сходится, а при $\alpha \geq 1$ расходится.

Пример 2.32. Исследовать сходимость интеграла $\int_5^8 \frac{dx}{x-7}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x-7}$ неограниченна во внутренней точке $x = 7$ отрезка $[5;8]$, то сначала применим формулу (2.48) $\int_5^8 \frac{dx}{x-7} = \int_5^7 \frac{dx}{x-7} + \int_7^8 \frac{dx}{x-7}$. Дальше рассмотрим отдельно каждый интеграл по формулам (2.46) и (2.47).

1. $\int_5^7 \frac{dx}{x-7} = \lim_{\eta\to7-0}\int_5^\eta \frac{dx}{x-7} = \lim_{\eta\to7-0}\left(\ln|x-7|\Big|_5^\eta\right) = \lim_{\eta\to7-0}\left(\ln|\eta-7| - \ln|5-7|\right) =$

$= \lim_{\eta\to7-0}\left(\ln|\eta-7| - \ln 2\right) = \ln|-0| - \ln 2 = -\infty$, то есть первый интеграл расходится.

2. $\int_7^8 \frac{dx}{x-7} = \lim_{\eta\to7+0}\int_\eta^8 \frac{dx}{x-7} = \lim_{\eta\to7+0}\left(\ln|x-7|\Big|_\eta^8\right) = \lim_{\eta\to7+0}\left(\ln|8-7| - \ln|\eta-7|\right) =$

$= \lim_{\eta\to7+0}\left(\ln 1 - \ln|\eta-7|\right) = \lim_{\eta\to7+0} \ln|\eta-7| = \ln|+0| = +\infty$, то есть и второй интеграл расходится.

Следовательно, исходный интеграл расходится.

Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;b]$?
2. Дать определение определенного интеграла.
3. Каков геометрический смысл определенного интеграла, от заданной функции?
4. Перечислить основные свойства определенного интеграла.
5. Записать формулу Ньютона-Лейбница.
6. В чем состоит способ подстановки для вычисления определенного интеграла?
7. Как выглядит формула интегрирования по частям для определенного интеграла?
8. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?
9. Записать формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых и в полярных координатах.
10. Записать формулу для вычисления объёма тела вращения.

ГЛАВА 3 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

3.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задач, приводящих к понятию двойного интеграла, огромное число. Мы ниже приведём две из таких задач, чтобы подчеркнуть, насколько разными могут быть области естествознания, требующие применения понятия двойного интеграла.

Задача об объёме цилиндрического тела

Определение. Назовем ***цилиндрической поверхностью*** поверхность, образованную прямой движущейся вдоль некоторой кривой (направляющей) параллельно некоторой оси. Прямая, осуществляющая это движение, называется ***образующей цилиндрической поверхности***.

Под ***цилиндрическим телом*** (рисунок 3.1) будем понимать тело, ограниченное следующими поверхностями:

1) областью D, лежащей в плоскости Oxy;

2) цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz и направляющей, являющейся границей области D;

3) некоторой поверхностью $z = f(x; y)$, непрерывной и неотрицательной в области D.

Требуется найти объём описанного цилиндрического тела.

Отметим, что поверхность $z = f(x; y)$ проецируется на область D параллельно оси Oz.

Проведем следующие построения. Разобьём область D некоторыми кривыми на части ΔD_i, $i = \overline{1, n}$, которые мы будем называть элементарными.

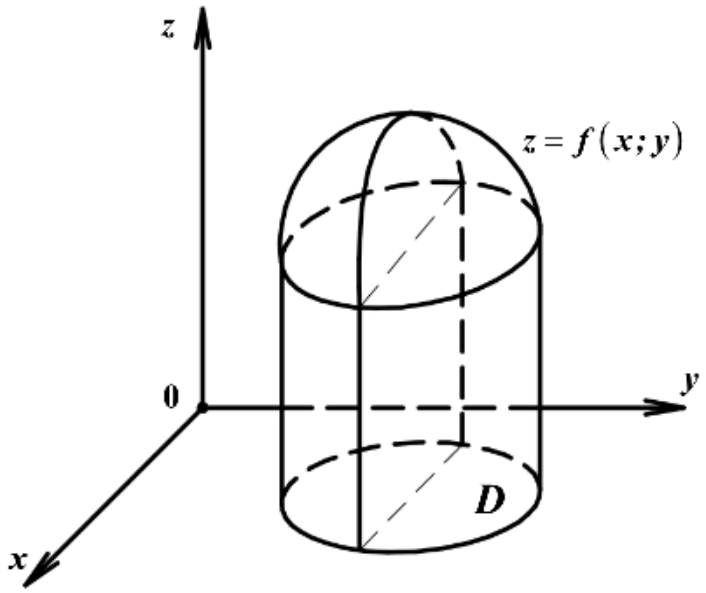


Рисунок 3.1 – Цилиндрическое тело

Через каждую кривую, разбивающую область D, проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. В результате рассматриваемое цилиндрическое тело будет разбито на элементарные части, которые, разумеется, также являются цилиндрическими телами. В каждой из элементарных частей ΔD_i выберем точку $P_i(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$ (рисунок 3.2) и найдём значение $f(P_i) = f(x_i; y_i)$.

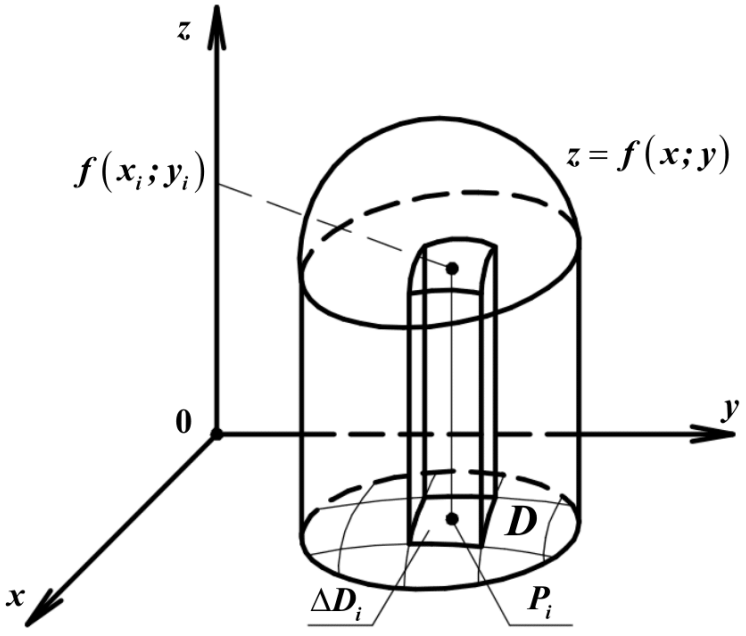


Рисунок 3.2 – Разбиение цилиндрического тела

В связи с тем, что функция $z = f(x; y)$ непрерывна, можно считать построенное разбиение столь мелким, что $f(x; y) = f(x_i; y_i)$ $\forall (x; y) \in \Delta D_i$, $i = \overline{1, n}$. Но тогда объём элементарной части $\Delta V_i \approx f(x_i; y_i)\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь ΔD_i, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом,

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i .$$

Ясно, что $V = \lim\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i \right)$ при условии, что разбиение неограниченно измельчается.

Уточним теперь, что означает условие неограниченного измельчения разбиения. Будем говорить, что разбиение тела неограниченно измельчается, если построена последовательность разбиений на элементарные части так, что объёмы всех элементарных частей стремятся к нулю. Выполнение этого условия можно обеспечить, потребовав, чтобы наибольший из диаметров элементарных частей ΔD_i, $i = \overline{1, n}$ стремился к нулю. При этом диаметром $(diam)$ области будем называть наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы области.

Положим $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1, n}} \{diam \Delta D_i\}$, тогда

$$V = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i \right). \qquad (3.1)$$

Замечание. Мы ограничились рассмотрением цилиндрических тел с образующей, параллельной оси аппликат, только для определенности. Вообще говоря, под цилиндрическим телом принято понимать любое тело, которое может быть получено из описанного перемещением его в пространстве как твердого тела.

Задача о массе пластины

Пусть материальная пластина лежит на плоскости Oxy и занимает при этом область D. Будем считать, что известна плотность распределения масс пластины как функция точки области D: $\rho = \rho(x; y)$. Функцию $\rho(x; y)$ будем считать непрерывной в области D. Требуется найти массу пластины.

Проведём, как и при решении предыдущей задачи, следующие построения. Разобьём область D на элементарные части ΔD_i и выберем внутри каждой из них произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$ (рисунок 3.3).

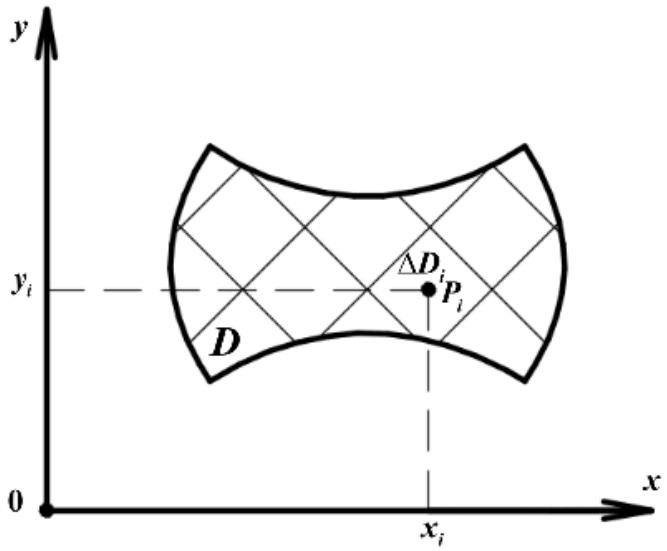


Рисунок 3.3 – Разбиение области D

Разбиение будем считать настолько мелким, что плотность внутри элементарной части ΔD_i можно считать приблизительно постоянной, равной $\rho(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда, в силу известной из элементарной физики формулы, масса однородной (приблизительно) пластинки ΔD_i есть $\Delta M_i \approx \rho(x_i; y_i)\Delta S_i$, $i = \overline{1, n}$.

Следовательно, искомая масса $M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i; y_i)\Delta S_i$.

Ясно, что выписанное приближённое равенство тем точнее, чем мельче разбиение пластины на элементарны части. Но тогда

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i; y_i) \Delta S_i \right), \tag{3.2}$$

где $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{diam \Delta D_i\}$.

3.2 Определение двойного интеграла

Задачи об объеме и массе, приведенные выше, приводят к вычислению выражений (3.1) и (3.2), которые отличаются только обозначением функции. Более того, как было отмечено выше, такими же методами могут быть решены и многие другие задачи. Это приводит к необходимости введения общего понятия, объединяющего и обобщающего все эти задачи.

Пусть в замкнутой области D на плоскости Oxy определена непрерывная функция $f(x; y)$. Разобьем область D произвольным способом на n частичных областей ΔD_i, площади которых обозначим ΔS_i, $i = \overline{1,n}$.

В каждой частичной области ΔD_i выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$ и вычислим значение функции в этой точке $f(x_i; y_i)$, $i = \overline{1,n}$ (рисунок 3.3).

По произведённому разбиению области на элементарные части и выбранным точкам составим следующую сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \Delta S_i \,. \tag{3.3}$$

Сумму (3.3) называют ***интегральной суммой***, соответствующей построенному разбиению и выбранным точкам. Очевидно, интегральные суммы зависят от способа разбиения области на элементарные и от выбора точек $P_i(x_i; y_i)$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x;\, y)$ ***интегрируема*** (по Риману) в области D, если существует предел интегральных сумм (3.3) при условии неограниченного измельчения области D, не зависящий от способа разбиения области на элементарные части и от выбора точек $P_i(x_i;\, y_i)$.

Определение. Пусть функция $f(x;\, y)$ интегрируема (по Риману) в области D. ***Двойным интегралом*** по области D от функции $f(x;\, y)$ называют предел интегральных сумм (3.3) при условии неограниченного измельчения области.

Двойной интеграл принято обозначать одним из следующих символов:

$$\iint\limits_D f(x;\, y)ds \text{ или } \iint\limits_D f(x;\, y)dxdy\,.$$

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\, y_i)\Delta S_i\right), \tag{3.4}$$

где $\lambda = \max\limits_{i=1,\, n}\{diam\Delta D_i\}$.

При этом функцию $f(x;\, y)$ называют ***подынтегральной функцией***, а $f(x;\, y)dxdy$ (или $f(x;\, y)ds$) – ***подынтегральным выражением***.

Условия существования двойного интеграла связаны с исследованием поведения интегральных сумм (3.3), которое является сложным. В связи с этим приведём без доказательства достаточные условия, обеспечивающие интегрируемость функции $f(x;\, y)$ по области D.

Теорема. Достаточные условия существования двойного интеграла. Если функция $f(x;\, y)$ непрерывна в области D, то она интегрируема в этой области.

3.3 Геометрический смысл двойного интеграла

Вернёмся к задаче об объёме цилиндрического тела. Выше мы получили, что объём тела, ограниченного:

1) областью D, лежащей в плоскости Oxy;

2) цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz и направляющей, являющейся границей области D;

3) некоторой поверхностью $z = f(x; y)$, непрерывной и неотрицательной в области D,

может быть найден по формуле (3.1):

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \Delta S_i \right).$$

Сравнивая эту формулу с определением двойного интеграла (3.4), заключаем, что

$$V = \iint_D f(x; y) ds .$$

Это означает, что двойной интеграл от неотрицательной подынтегральной функции численно равен объёму цилиндрического тела, описываемого условиями 1), 2), 3).

3.4 Физический смысл двойного интеграла

Теперь рассмотрим задачу о массе пластины с известной плотностью распределения масс. Мы получили выше формулу (3.2), решающую эту задачу:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i; y_i) \Delta S_i \right).$$

Из определения двойного интеграла немедленно вытекает, что

$$M = \iint_D \rho(x; y) dx dy .$$

Таким образом, двойной интеграл от неотрицательной непрерывной функции по области D численно равен массе материальной пластины, занимающей область D плоскости Oxy, плотность распределения масс для которой совпадает с подынтегральной функцией.

3.5 Свойства двойного интеграла

Ниже мы предполагаем, что все интегралы, содержащиеся в приводимых формулах, существуют. Формулируемые ниже свойства являются простыми следствиями определения двойного интеграла, а также свойств сумм и пределов.

1. Если функции $f(x; y)$ и $\varphi(x; y)$ непрерывны в области D, то двойной интеграл от суммы этих функций равен сумме двойных интегралов от каждой функции, то есть

$$\iint\limits_D (f(x; y) \pm \varphi(x; y))ds = \iint\limits_D f(x; y)ds \pm \iint\limits_D \varphi(x; y)ds .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, то есть

$$\iint\limits_D Af(x; y)ds = A\iint\limits_D f(x; y)ds ,$$

где A – постоянная величина.

3. Если функция $f(x; y) \geq 0$ в области D, то $\iint\limits_D f(x; y)ds \geq 0$.

4. ***Теорема об оценке двойного интеграла.*** Пусть m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x; y)$ в области D, а S_D – площадь области D, тогда справедливо неравенство

$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x; y)ds \leq M S_D .$$

5. ***Теорема о среднем.*** Пусть функция $f(x; y)$ непрерывна в области D с площадью S_D. Тогда найдётся точка $P(x_0; y_0) \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x; y)ds = f(x_0; y_0) \cdot S_D .$$

6. Если область интегрирования D разбить на две части D_1 и D_2 без общих внутренних точек (рисунок 3.4), то

$$\iint\limits_D f(x; y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x; y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x; y)ds .$$

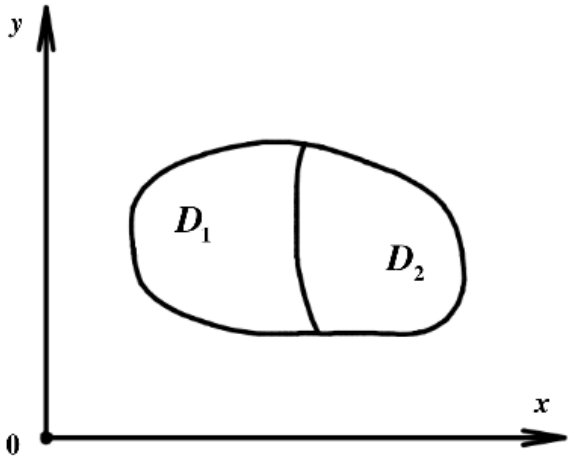


Рисунок 3.4 – Разбиение области D на две части D_1 и D_2

Замечание. Свойство 6 может быть распространено на разбиение области D на любое число областей, при условии, что каждая пара частичных областей не имеет общих внутренних точек.

3.6 Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Определение. Будем называть область D на плоскости Oxy ***правильной в направлении координатной оси***, если любая прямая, параллельная этой оси, пересекает область не более чем по одному отрезку.

Отметим, что отрезок в данном определении может вырождаться в точку.

Пример 3.1. Рассмотреть область D (рисунок 3.5) и определить, является ли она правильной в направлении какой-либо координатной оси.

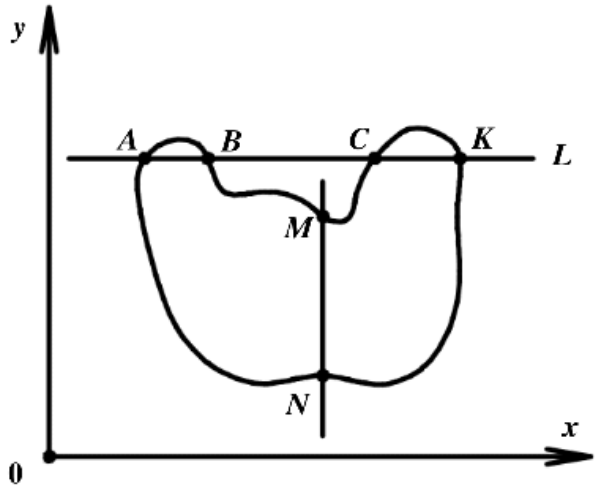


Рисунок 3.5 – Область D к примеру 3.1

Решение. 1. Параллельно оси Oy проведём прямую, пересекающую область. Любая прямая, например MN, пересекает область по одному отрезку. Следовательно, область D – правильная относительно оси Oy.

2. Относительно оси Ox область D – неправильная, так как существуют прямые, пересекающие эту область более чем по одному отрезку. Например, прямая L пересекает область D по двум отрезкам – AB и CK.

Пусть область D – правильная относительно оси Oy (рисунок 3.6). Спроецируем область D на ось Ox, тогда её граница точками A и B разобьётся на две линии, уравнения которых $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $a \le x \le b$. Проведем через область D прямую α, параллельную оси Oy. Эта прямая пересекает область по отрезку MN.

Будем двигаться по прямой α в направлении, совпадающем с положительным направлением оси Oy. Назовем точку M – точкой входа прямой в область, а точку N – точкой выхода прямой из области. Ордината точки входа $y_{вх} = \varphi_1(x)$, а точки выхода – $y_{вых} = \varphi_2(x)$.

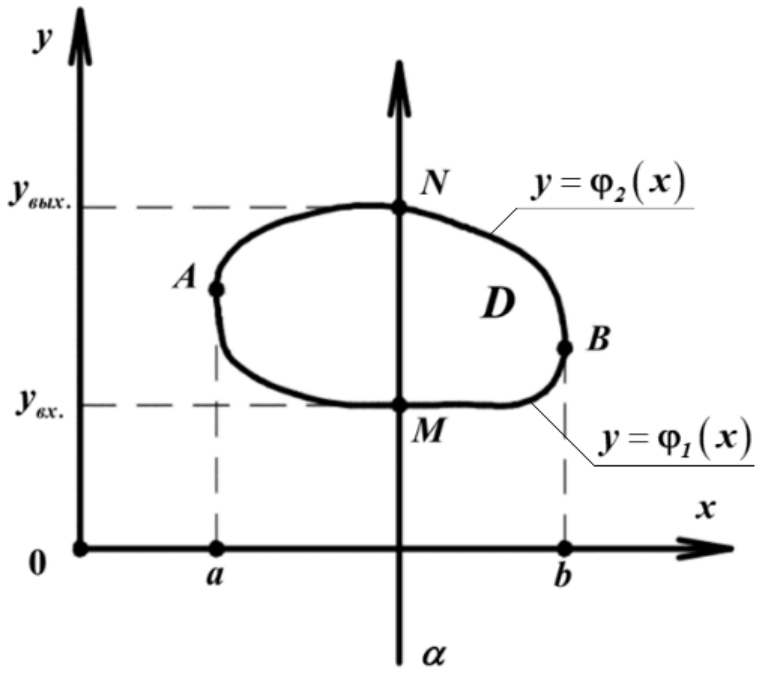


Рисунок 3.6 – Правильная относительно оси Oy область D

Построим следующий интеграл:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy .$$

Этот интеграл называют ***повторным интегралом*** от функции $f(x; y)$, построенным по правильной в направлении оси Oy области D.

Понимают повторный интеграл следующим образом: сначала для фиксированных $x \in [a; b]$ вычисляют внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy$, а затем от полученной функции аргумента x вычисляют определенный интеграл по отрезку $[a; b]$.

В случае области, правильной в направлении оси Ox, аналогичным образом может быть построен повторный интеграл

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y)dx ,$$

где $[c; d]$ – отрезок оси Oy, в который проецируется область D;

$x=\psi_1(y)$ – уравнение линии, на которой лежат точки входа в область; $x=\psi_2(y)$ – уравнение линии, на которой лежат точки выхода из области.

Теорема. Пусть область D – правильная в направлении координатной оси Oy или Ox, а функция $f(x;\,y)$ непрерывна в области D. Тогда двойной интеграл по области D равен повторному интегралу по этой же области:

$$\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\,y)dy \tag{3.5}$$

или

$$\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\,y)dx. \tag{3.6}$$

Следствие. Если область D является правильной в направлении обеих осей, то двойной интеграл равен каждому из повторных, то есть имеет место формула

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\,y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\,y)dx. \tag{3.7}$$

Формулу (3.7) называют формулой изменения порядка интегрирования.

Пример 3.2. Выразить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$ через повторные, если область D ограничена линиями $y=4-\frac{1}{4}x^2$ и $y=4-\frac{3}{2}x$.

Решение: Построим заданные линии, ограничивающие область интегрирования D (рисунок 3.7).

1. Область D является правильной в направлении оси Oy. Поэтому воспользуемся формулой (3.5) $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\,y)dy$.

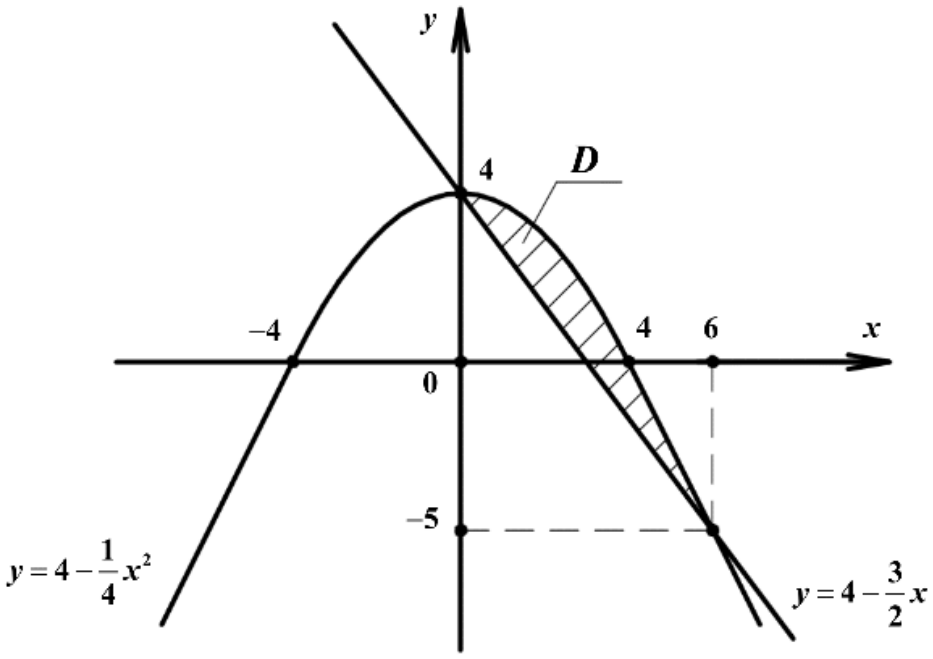


Рисунок 3.7 – Область D, ограниченная линиями $y=4-\frac{1}{4}x^2$ и $y=4-\frac{3}{2}x$

Очевидно, точки входа в область лежат на прямой $y=4-\frac{3}{2}x$, а точки выхода из области – на параболе $y=4-\frac{1}{4}x^2$, то есть $\varphi_1(x)=4-\frac{3}{2}x$, $\varphi_2(x)=4-\frac{1}{4}x^2$.

Чтобы найти пределы внешнего интеграла, спроецируем область D на ось Ox. Тогда a и b – абсциссы точек пересечения заданных линий, которые мы найдём из системы уравнений:

$$\begin{cases} y=4-\frac{1}{4}x^2, \\ y=4-\frac{3}{2}x, \end{cases} \Rightarrow \; 4-\frac{1}{4}x^2=4-\frac{3}{2}x \; \Rightarrow \; \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x=0 \;\Big|\cdot 4,$$

$x^2-6x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=6$, то есть $a=0,\ b=6$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^6 dx \int\limits_{4-\frac{3}{2}x}^{4-\frac{1}{4}x^2} f(x;y)\,dy.$$

2. Область D является также правильной и в направлении оси Ox. Поэтому можно воспользоваться также и формулой (3.6)

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx.$$

Точка входа любой прямой, параллельной оси Ox, в область лежит на прямой $y = 4 - \frac{3}{2}x$. Но по формуле (3.6) нам нужна зависимость x от y, поэтому преобразуем уравнение прямой к виду $x = \frac{8-2y}{3}$, то есть $\psi_1(y) = \frac{8-2y}{3}$.

Точка выхода прямой из области лежит на параболе $y = 4 - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{16-4y}$ (мы рассматриваем правую ветвь параболы, значит $x \ge 0$), то есть $\psi_2(y) = \sqrt{16-4y}$.

Чтобы найти пределы внешнего интеграла, спроецируем область D на ось Oy. Тогда c и d – ординаты точек пересечения заданных линий, найдём их из системы уравнений:

$$\begin{cases} x = \frac{8-2y}{3}, \\ x = \sqrt{16-4y}, \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{8-2y}{3} = \sqrt{16-4y},$$

$$\left(\frac{8-2y}{3}\right)^2 = 16-4y,$$

$$\frac{64-32y+4y^2}{9} = 16-4y \;\Big|\cdot 9,$$

$$64-32y+4y^2 = 144-36y,$$

$$4y^2+4y-80=0,$$

$y^2 + y - 20 = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 = -5,\ y_2 = 4$, следовательно, $c = -5, d = 4$.

Получаем $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy = \int\limits_{-5}^{4} dy \int\limits_{\frac{8-2y}{3}}^{\sqrt{16-4y}} f(x;\,y)dx$.

Следствие. $\int\limits_{-5}^{4} dy \int\limits_{\frac{8-2y}{3}}^{\sqrt{16-4y}} f(x;\,y)dx = \int\limits_{0}^{6} dx \int\limits_{4-\frac{3}{2}x}^{4-\frac{1}{4}x^2} f(x;\,y)dy$.

Пример 3.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;\,y)dy$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.7)

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\,y)dx .$$

Уравнения линий, ограничивающих область интегрирования D, получим из пределов внешнего и внутреннего интегралов: $x=0,\ x=4,\ y=\frac{3}{4}x$, $y=\sqrt{25-x^2}$. Заметим, что уравнение $y=\sqrt{25-x^2}$ определяет верхнюю часть окружности $x^2+y^2=25$.

Построим область D (рисунок 3.8).

Чтобы расставить пределы при изменённом порядке интегрирования, проведём прямую параллельно оси Ox. По рисунку видно, что точка входа любой такой прямой в область D расположена на оси Oy – прямой $x=0$ (правая граница области $\psi_1(y)$). Точка выхода расположена или на прямой $y=\frac{3}{4}x\ \left(x=\frac{4}{3}y\right)$, или на окружности $x^2+y^2=25\ \left(x=\sqrt{25-y^2}\right)$, то есть левая граница $\psi_2(y)$ области задана разными аналитическими выражениями.

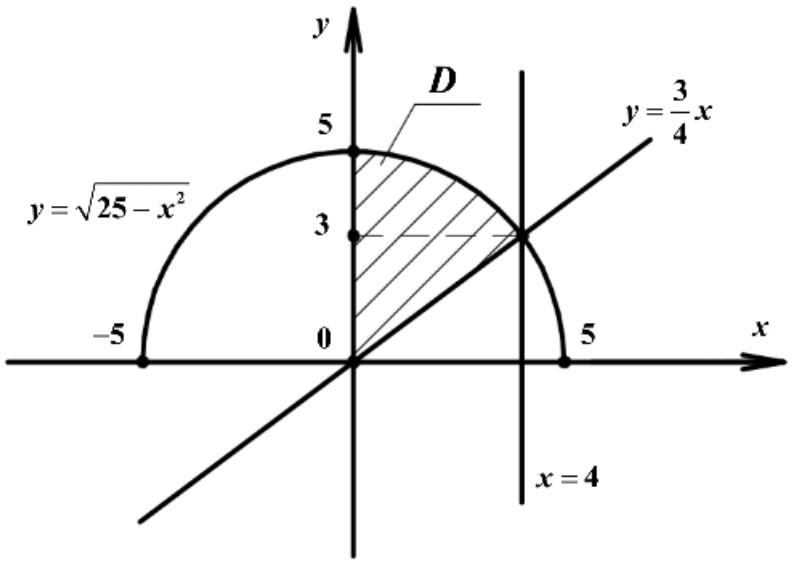


Рисунок 3.8 – Область D, ограниченная линиями

$$x=0,\ x=4,\ y=\frac{3}{4}x,\ y=\sqrt{25-x^2}$$

Разобьем D на две области D_1 и D_2 прямой, проходящей через точку $(0;3)$ параллельно оси Ox.

Тогда для области D_1 имеем: $c=0,\ d=3,\ \psi_1(y)=0,\ \psi_2(y)=\frac{4}{3}y,$

для области D_2 – $c=3,\ d=5,\ \psi_1(y)=0,\ \psi_2(y)=\sqrt{25-y^2}$, следовательно

$$\int_0^4 dx \int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy=\int_0^3 dy \int_0^{\frac{4}{3}y} f(x;y)dx+\int_3^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x;y)dx.$$

Пример 3.4. Вычислить $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y=x^2,\ y=x+2$.

Решение. Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой (3.5) или (3.6). Построим сначала область D (рисунок 3.9) и выберем порядок интегрирования.

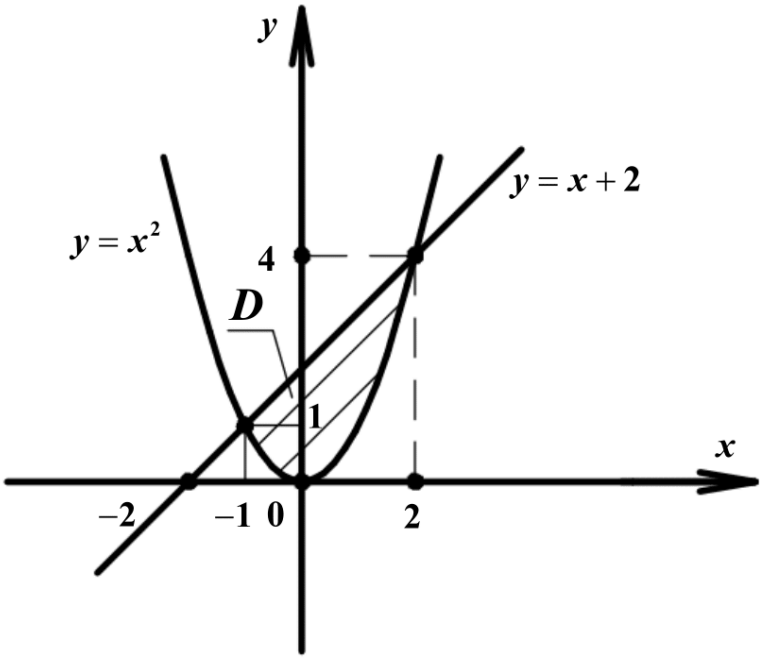


Рисунок 3.9 – Область D, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = x + 2$

Если внутренний интеграл брать по x (формула (3.6)), то нужно проводить прямую, параллельную оси Ox. В этом случае точка входа будет находиться или на параболе, или на прямой, то есть область D нужно будет разбить на две области и вычислить два повторных интеграла.

Если же внутренний интеграл брать по y (формула (3.5)), то нужно проводить прямую, параллельную оси Oy. В этом случае точка входа находится на параболе $y = x^2$ (нижняя граница области), а точка выхода на прямой $y = x + 2$ (верхняя граница области). Значит, воспользуемся формулой (3.5):

$$\iint\limits_D f(x; y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\,dy, \text{ где } \varphi_1(x) = x^2,\ \varphi_2(x) = x + 2.$$

Пределы a и b внешнего интеграла найдём, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Отсюда $x_1 = -1,\ x_2 = 2$, то есть $a = -1,\ b = 2$.

Получим $\iint\limits_D (x-2y)dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} (x-2y)dy$.

Находим сначала внутренний интеграл, при этом смотрим на x как на постоянную величину.

$$\int\limits_{x^2}^{x+2} (x-2y)dy = \int\limits_{x^2}^{x+2} x\,dy - \int\limits_{x^2}^{x+2} 2y\,dy = x\int\limits_{x^2}^{x+2} dy - 2\int\limits_{x^2}^{x+2} y\,dy = xy\Big|_{x^2}^{x+2} - y^2\Big|_{x^2}^{x+2} =$$

$$= x\left(x+2-x^2\right) - \left((x+2)^2 - \left(x^2\right)^2\right) = x^2 + 2x - x^3 - \left(x^2 + 4x + 4 - x^4\right) =$$

$$= x^2 + 2x - x^3 - x^2 - 4x - 4 + x^4 = x^4 - x^3 - 2x - 4.$$

Теперь вычисляем внешний интеграл. При этом подынтегральная функция получена нами в предыдущем действии.

$$\iint\limits_D (x-2y)dxdy = \int\limits_{-1}^{2} \left(x^4 - x^3 - 2x - 4\right)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - x^2 - 4x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{4} - 2^2 - 4\cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 - 4\cdot(-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{32}{5} - 4 - 4 - 8\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - 1 + 4\right) = \frac{32}{5} - 16 + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - 3 = \frac{33}{5} + \frac{1}{4} - 19 =$$

$$= 6\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - 19 = 6\frac{12}{20} + \frac{5}{20} - 19 = -12\frac{3}{20}.$$

3.7 Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Выше мы видели, что вычисление двойного интеграла становится достаточно простой задачей в случае правильных областей в декартовых координатах. Оказывается, что аналогичным образом может быть введено понятие области, правильной в полярной системе координат. Это позволит расширить наши возможности по вычислению двойных интегралов.

Пусть с декартовой системой координат Oxy связана полярная система координат так, что полюс совпадает с началом координат, а полярная ось

совпадает с осью Ox. Тогда декартовы и полярные координаты фиксированной точки связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{3.8}$$

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, предполагая, что область D правильная, а функция $f(x;y)$ – непрерывна в области D. Тогда в силу достаточных условий $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ существует.

Это означает, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i\right) = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$ существует и не зависит ни от способа выбора точек $(x_i;y_i)$, ни от способа разбиения области D. Пользуясь этим, свяжем разбиение области на элементарные части с полярной системой координат. Именно, разобьём область D лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, …, $\varphi=\varphi_n$ и окружностями $r=r_1$, $r=r_2$,..., $r=r_n$ (рисунок 3.10).

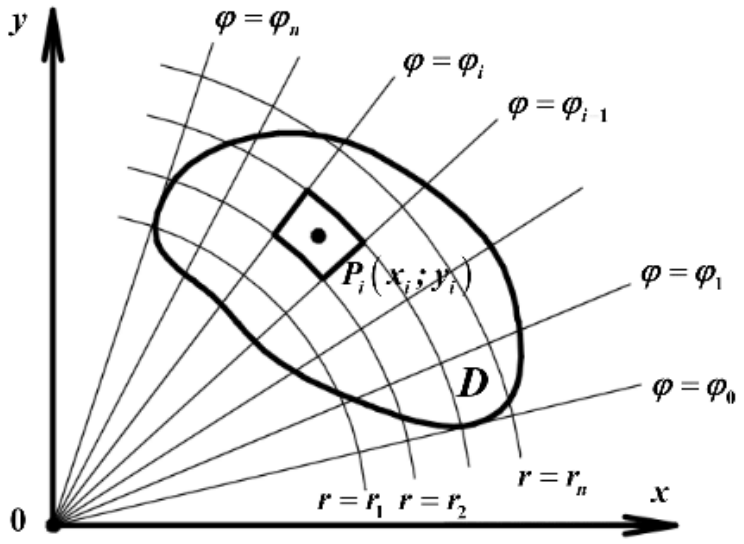


Рисунок 3.10 – Разбиение области D
в полярных координатах

Положим $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$.

В каждой из частичных областей ΔD_i выберем точку $P_i(x_i; y_i)$ и обозначим OP_i через r_i, $i = \overline{1, n}$.

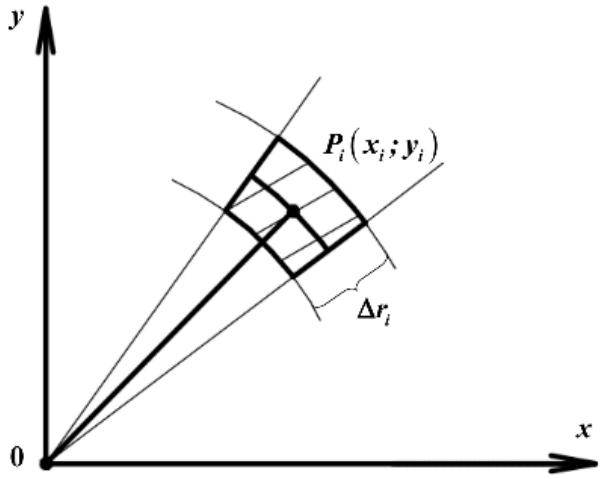


Рисунок 3.11 – Частичная область ΔD_i
в полярных координатах

Разбиение отрезков $[\varphi_1; \varphi_n]$ и $[r_1; r_n]$ будем считать столь мелким, что элементарную область ΔD_i (рисунок 3.11) можно примерно считать прямоугольником с измерениями Δr_i и $r_i \Delta \varphi_i$ (длина дуги окружности есть произведение радиуса на радианную меру соответствующего центрального угла). Тогда $\Delta S_i = \Delta r_i \cdot r_i \Delta \varphi_i = r_i \Delta r_i \, \Delta \varphi_i$, поэтому

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i\right) = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(r_i \cos\varphi_i; r_i \sin\varphi_i) r_i \Delta r_i \Delta \varphi_i\right),$$

где $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1, n}} \{diam \Delta D_i\}$.

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} f(r_i \cos\varphi_i; r_i \sin\varphi_i) r_i \Delta r_i \Delta \varphi_i$ есть интегральная сумма для интеграла $\iint\limits_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi$, то имеет место формула

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi. \qquad (3.9)$$

Полученную формулу (3.9) называют формулой перехода от прямоугольных координат к полярным координатам в двойном интеграле.

Определение. Область D называют ***правильной в полярной системе координат***, если она ограничена парой лучей $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\beta>\alpha)$ и парой кривых $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$, $(r_2(\varphi)>r_1(\varphi)\ \forall\varphi\in(\alpha;\beta))$.

По области, правильной в полярной системе координат, построим следующий повторный интеграл для функции $F(r;\varphi)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r;\varphi)dr.$$

Теорема. Если функция $F(r;\varphi)$ непрерывна в области D, правильной в полярной системе координат, то имеет место равенство

$$\iint_D F(r;\varphi)d\varphi dr=\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r;\varphi)dr.$$

Следствие. С учетом полученной выше формулы (3.9) перехода к полярным координатам имеем следующую формулу перехода от прямоугольных координат к полярным координатам:

$$\iint_D f(x;y)dxdy=\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi)rdr. \qquad (3.10)$$

Замечания. 1. Интегрирование в обратном порядке встречается редко.

2. Если полюс содержится внутри области D, то $\alpha=0$, $\beta=2\pi$.

Пример 3.5. Перейдя к полярным координатам, вычислить $\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=4$.

Решение. Сначала найдём выражение для подынтегральной функции в полярных координатах, а затем построим область интегрирования.

$$\sqrt{16-x^2-y^2}=\left\|\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\right\|=\sqrt{16-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}=$$

$$=\sqrt{16-r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\sqrt{16-r^2}\,.$$

Теперь построим область *D*, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$ (рисунок 3.12).

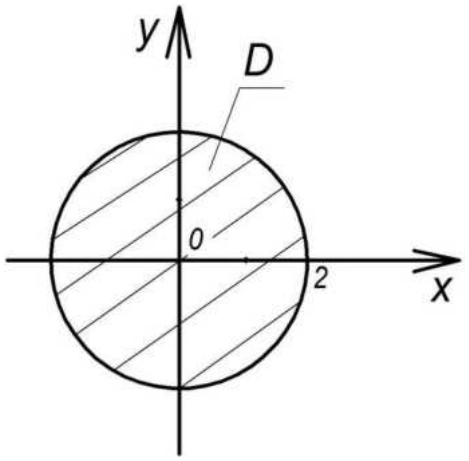


Рисунок 3.12 – Область *D*,
ограниченная окружностью $x^2+y^2=4$

Далее воспользуемся формулой (3.10)

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi)r\,dr\,.$$

Найдём выражение для уравнения окружности $x^2+y^2=4$ в полярных координатах, учитывая (3.8): $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=4$,

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4$,

$r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4$,

$r^2=4 \quad\Rightarrow\quad r=2$.

Значит, $0\le r\le 2$, то есть $r_1(\varphi)=0$, $r_2(\varphi)=2$, а так как полюс содержится внутри области D, то $\alpha=0$, $\beta=2\pi$.

Тогда по формуле (3.10) $\iint\limits_D\sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\sqrt{16-r^2}\,r\,dr\,.$

Найдём внутренний интеграл:

$$\int_0^2 \sqrt{16-r^2}\, r\, dr = \left\| \begin{array}{l} u = 16 - r^2 \\ du = -2rdr \\ rdr = -\frac{1}{2}du \end{array} \right\| \begin{array}{|c|c|} \hline r & u \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 0 & 16 \\ \hline \end{array} \| = -\frac{1}{2}\int_{16}^{12} \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_{12}^{16} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{12}^{16} =$$

$$= \frac{u\sqrt{u}}{3}\Bigg|_{12}^{16} = \frac{16\sqrt{16}}{3} - \frac{12\sqrt{12}}{3} = \frac{16\cdot 4}{3} - \frac{12\cdot 2\sqrt{3}}{3} = \frac{64}{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right).$$

Найдём внешний интеграл. Для этого «подставим» во внешний интеграл полученное выражение:

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)d\varphi = \frac{8}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right).$$

3.8 Геометрические приложения двойных интегралов

1. Площадь S плоской области D в декартовой системе координат находится по формуле

$$S = \iint\limits_D dx\, dy. \tag{3.11}$$

2. Площадь S плоской области D в полярной системе координат находится по формуле

$$S = \iint\limits_D r\, dr\, d\varphi. \tag{3.12}$$

3. Объём V тела, ограниченного областью D, лежащей в плоскости Oxy, цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz и направляющей, являющейся границей области D, а также некоторой поверхностью $z = f(x; y)$, непрерывной и неотрицательной в области D, находится по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x; y)dx\, dy. \tag{3.13}$$

Объем V тела, ограниченного сбоку цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz и направляющей, являющейся границей области D, сверху и снизу поверхностями $z = z_2(x; y)$ и $z = z_1(x; y)$, проекцией которых на плоскость Oxy является область D ($z_1(x; y) \le z_2(x; y)$ в каждой точке $(x; y)$ области D), находится по формуле

$$V = \iint\limits_D (z_2(x; y) - z_1(x; y))\,dx\,dy. \qquad (3.14)$$

Замечание. При вычислении объема цилиндрического тела не всегда необходимо изображать тело на рисунке, достаточно изобразить только область D. Область D – это сечение тела плоскостью Oxy, поэтому в уравнениях заданных поверхностей подставляем $z = 0$ и получаем уравнения линий, ограничивающих область D.

Пример 3.6. Найти площадь области, ограниченной пятилепестковой розой $r = \cos 5\varphi$.

Решение. Построим в полярной системе координат пятилепестковую розу $r = \cos 5\varphi$ (рисунок 3.13).

Так как все лепестки розы одинаковые, то по формуле (3.11) достаточно найти площадь области, ограниченной одним лепестком, и умножить на пять, то есть $S = 5\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi$.

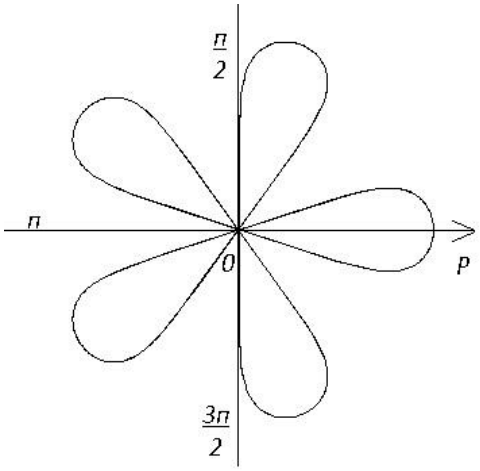


Рисунок 3.13 – Пятилепестковая роза

Найдём два луча, между которыми лежит один из пяти лепестков розы. Для этого решим уравнение $r(\varphi)=0$:

$$\cos 5\varphi = 0,$$

$$5\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi + 2\pi k}{10} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим в полученное решение $k=-1$ и $k=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{10},\ \beta = \frac{\pi}{10}$.

Тогда по формуле (3.10) получим: $S = 5\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi = 5\int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} d\varphi \int\limits_0^{\cos 5\varphi} r\,dr$.

Внутренний интеграл: $\int\limits_0^{\cos 5\varphi} r\,dr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\cos 5\varphi} = \frac{\cos^2 5\varphi}{2}$.

Внешний интеграл: $S = 5\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi = 5\int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{\cos^2 5\varphi}{2} d\varphi =$

$$= \frac{5}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} (1+\cos 10\varphi)d\varphi = \frac{5}{4}\left(\varphi + \frac{1}{10}\sin 10\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} = \frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{10} + \frac{1}{10}\sin\pi\right) -$$

$$-\frac{5}{4}\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{1}{10}\sin(-\pi)\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{\pi}{10} - \frac{5}{4}\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 4y = 0,\ x^2 + y^2 - 8y = 0,\ y = x,\ x = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.11) $S = \iint\limits_D dx\,dy$.

Чтобы построить область D (рисунок 3.14), преобразуем уравнения линий $x^2 + y^2 - 4y = 0$ и $x^2 + y^2 - 8y = 0$ следующим образом:

1) $x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$ – уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 2;

2) $x^2+y^2-8y+16-16=0 \;\Rightarrow\; x^2+(y-4)^2=16$ – уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 4.

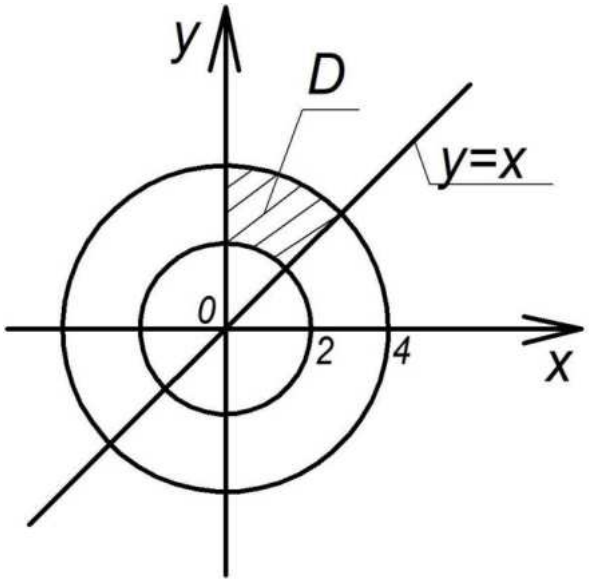


Рисунок 3.14 – Область D, ограниченная линиями $x^2+y^2-4y=0$, $x^2+y^2-8y=0$, $y=x$, $x=0$

Очевидно, область правильная в полярной системе координат. Учитывая (3.8), запишем уравнения линий, ограничивающих область в полярной системе координат:

$$x^2+y^2-4y=0 \;\Rightarrow\; r^2-4r\sin\varphi=0 \;\Rightarrow\; r=4\sin\varphi;$$

$$x^2+y^2-8y=0 \;\Rightarrow\; r^2-8r\sin\varphi=0 \;\Rightarrow\; r=8\sin\varphi;$$

$$y=x \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},\; x=0 \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r\,dr$.

Внутренний интеграл: $\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r\,dr=\left.\frac{r^2}{2}\right|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}=\frac{(8\sin\varphi)^2}{2}-\frac{(4\sin\varphi)^2}{2}=$

$=32\sin^2\varphi-8\sin^2\varphi=24\sin^2\varphi.$

Внешний интеграл: $S=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 24\sin^2\varphi d\varphi = 24\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$

$$=12\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 12\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 12\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-12\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=12\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-12\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=6\pi-3\pi+6=3\pi+6.$$

Пример 3.8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+z=4$, $y=-1$, $z=0$, $x-y+2=0$.

Решение. Для вычисления объёма тела воспользуемся формулой (3.13) $V=\iint\limits_D f(x;y)dx\,dy$, где $z=f(x;y)$ – уравнение верхней границы тела, то есть $z=4-x^2$, D – проекция тела на плоскость Oxy, то есть основание этого тела. Построим область D (рисунок 3.15), для этого в каждое из уравнений поверхностей, ограничивающих тело, подставим $z=0$ (уравнение плоскости Oxy): $x^2=4$ или $x=\pm 2$, $y=-1$, $x-y+2=0$.

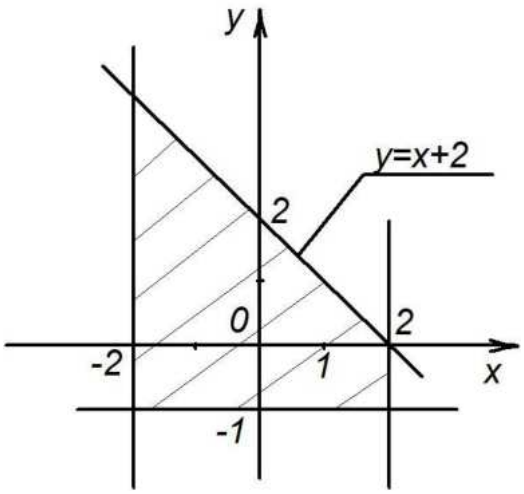


Рисунок 3.15 – Область, ограниченная линиями $x=\pm 2$, $y=-1$, $x-y+2=0$

Поверхности $x^2+z=4$ и $z=0$ ограничивают тело сверху и снизу. Чтобы определить, какая из поверхностей верхняя, нужно координаты любой внутренней точки области D подставить в уравнения поверхностей. Возьмём точку $O(0;0)$:

1) $z=4-x^2 \Rightarrow z=4-0^2=4$;

2) $z=0$.

Так как $4>0$, то $z=4-x^2$ – это верхняя поверхность. Тогда

$$V=\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-1}^{x+2}\left(4-x^2\right)dy.$$

Внутренний интеграл: $\int\limits_{-1}^{x+2}\left(4-x^2\right)dy=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{x+2}=$

$$\left(4(x+2)-\frac{(x+2)^3}{3}\right)-\left(4\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=4x+8-\frac{(x+2)^3}{3}+4-\frac{1}{3}=$$

$$=4x-\frac{(x+2)^3}{3}+\frac{35}{3}.$$

Внешний интеграл: $V=\int\limits_{-2}^{2}\left(4x-\frac{(x+2)^3}{3}+\frac{35}{3}\right)dx=$

$$=\left(2x^2-\frac{(x+2)^4}{12}+\frac{35x}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(2\cdot 2^2-\frac{(2+2)^4}{12}+\frac{35\cdot 2}{3}\right)-$$

$$-\left(2\cdot(-2)^2-\frac{(-2+2)^4}{12}+\frac{35\cdot(-2)}{3}\right)=8-\frac{256}{12}+\frac{70}{3}-8+0+\frac{70}{3}=-\frac{64}{3}+\frac{140}{3}=$$

$$=\frac{76}{3}=25\frac{1}{3}.$$

3.9 Решение инженерных задач разделов механики с использованием двойных интегралов

Пусть материальная пластина лежит на плоскости Oxy и занимает при этом область D, а $\rho(x; y)$ – плотность распределения масс пластины (поверхностная плотность). Тогда справедливы формулы:

1. Масса плоской пластины:

$$M = \iint\limits_D \rho(x; y)dxdy. \tag{3.15}$$

2. Статистические моменты пластины D относительно осей Ox и Oy:

$$S_x = \iint\limits_D y\rho(x; y)dx\,dy, \quad S_y = \iint\limits_D x\rho(x; y)dx\,dy. \tag{3.16}$$

3. Моменты инерции пластинки D:

$J_x = \iint\limits_D y^2\rho(x; y)dxdy$ – момент инерции относительно оси Ox, (3.17)

$J_y = \iint\limits_D x^2\rho(x; y)dxdy$ – момент инерции относительно оси Oy, (3.18)

$J_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x; y)dxdy$ – полярный момент инерции относительно начала координат. (3.19)

4. Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ пластины:

$$x_c = \frac{S_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x; y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x; y)dxdy}; \qquad y_c = \frac{S_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x; y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x; y)dxdy}. \tag{3.20}$$

Пример 3.9. Найти массу пластины, занимающей часть плоскости (без начала координат), ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 8$ и прямой $x = 2$, если плотность распределения масс $\rho(x; y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение. Будем пользоваться формулой (3.15) $M = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Построим область D (рисунок 3.16).

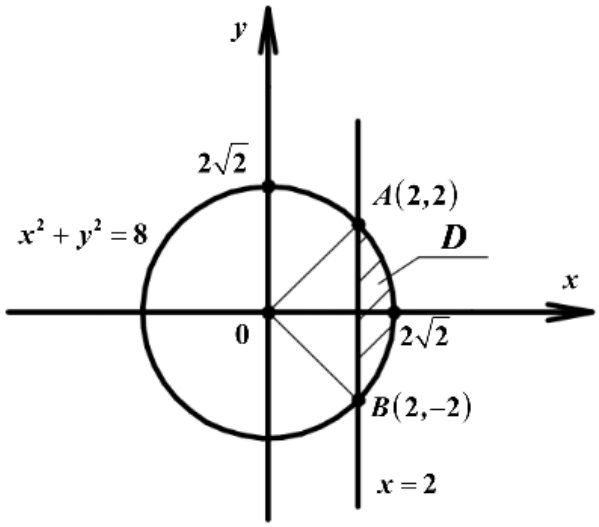


Рисунок 3.16 – Область D, ограниченная линиями

$$x^2 + y^2 = 8 \text{ и } x = 2$$

Область D является правильной в полярной системе координат. Учитывая (3.8) $\left(\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}\right)$, запишем уравнения кривых, ограничивающих область в полярной системе координат:

$$x^2 + y^2 = 8 \;\Rightarrow\; (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 8 \;\Rightarrow\; r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2};$$

$$x = 2 \;\Rightarrow\; r\cos\varphi = 2 \;\Rightarrow\; r = \frac{2}{\cos\varphi};$$

$$OA:\; y = x \;\Rightarrow\; r\sin\varphi = r\cos\varphi \,\big|:\; r\cos\varphi \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$OB:\ y=-x\ \Rightarrow\ r\sin\varphi=-r\cos\varphi\,\big|:\ r\cos\varphi\neq 0\Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=-1\ \Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

Тогда ввиду того, что $p(x;y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}}=\cos\varphi,$

получаем $M=\iint\limits_D\dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{2\sqrt{2}}r\cos\varphi dr.$

Внутренний интеграл: $\int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{2\sqrt{2}}r\cos\varphi dr=\cos\varphi\int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{2\sqrt{2}}r dr=\cos\varphi\cdot\dfrac{r^2}{2}\Bigg|_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{2\sqrt{2}}=$

$$=\frac{\cos\varphi}{2}\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^2\right)=\frac{\cos\varphi}{2}\left(8-\frac{4}{\cos^2\varphi}\right).$$

Внешний интеграл: $M=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\varphi}{2}\left(8-\dfrac{4}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi=$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(8-\frac{4}{\cos^2\varphi}\right)\cos\varphi d\varphi=4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{\cos^2\varphi}\cos\varphi d\varphi=$$

$$=4\sin\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-$$

$$-2\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)=4\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-2\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)=4\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}-2\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right|\right)=$$

$$=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)-\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)\right)=4\sqrt{2}-2\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right).$$

Пример 3.10. Найти массу, статистические моменты и координаты центра тяжести пластины, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и координатными осями. Поверхностная плотность в каждой точке фигуры задаётся формулой $\rho(x;\,y)=2xy$.

Решение. Построим область D, ограниченную заданными линиями (рисунок 3.17).

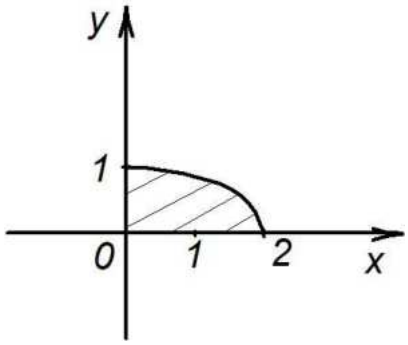


Рисунок 3.17 – Область D, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и координатными осями

1. По формуле (3.15) найдём массу пластины:

$$M=\iint\limits_D \rho(x;\,y)\,dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 2xy\,dy\,.$$

Внутренний интеграл: $\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 2xy\,dy=2x\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy=\left.xy^2\right|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=$

$$=x\left(1-\frac{x^2}{4}-0\right)=x-\frac{x^3}{4}.$$

Внешний интеграл: $M=\int\limits_0^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right)\right|_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{2^4}{16}-0=$

$$=2-1=1.$$

2. Статистические моменты найдём по формулам (3.16).

2.1. $S_x = \iint\limits_D y\rho(x;y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 2xy^2\,dy$.

Внутренний интеграл: $\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 2xy^2\,dy = 2x\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2\,dy =$

$$= 2x\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{2}{3}x\cdot y^3\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{2}{3}x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^3 - 0 = \frac{2}{3}x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Внешний интеграл: $S_x = \iint\limits_D y\rho(x;y)dxdy = \int\limits_0^2 \frac{2}{3}x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}dx =$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = 1-\dfrac{x^2}{4} \\ du = -\dfrac{x}{2}dx \\ xdx = -2du \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & u \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\| = \frac{2}{3}\int\limits_1^0 u^{\frac{3}{2}}(-2)du = -\frac{4}{3}\int\limits_1^0 u^{\frac{3}{2}}du = \frac{4}{3}\int\limits_0^1 u^{\frac{3}{2}}du =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}\cdot u^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}(1-0) = \frac{8}{15}.$$

2.2. $S_y = \iint\limits_D x\rho(x;y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 2x^2y\,dy$.

Внутренний интеграл: $\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 2x^2y\,dy = 2x^2\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy =$

$$= 2x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = x^2 \cdot y^2\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = = x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)-0 = x^2-\frac{x^4}{4}.$$

Внешний интеграл: $S_y = \iint\limits_D x\rho(x;\, y)dxdy = \int\limits_0^2 \left(x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx =$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^5}{20}\right)-0 = \frac{8}{3}-\frac{32}{5} = -\frac{56}{15}.$$

3. Тогда $x_c = \frac{S_y}{M} = \frac{8}{15}$, $y_c = \frac{S_x}{m} = -\frac{56}{15}$.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные свойства двойного интеграла?
2. Какая область называется правильной?
3. Как свести двойной интеграл по правильной области к повторному?
4. Запишите формулу вычисления двойного интеграла в полярных координатах.
5. Запишите формулу вычисления площади плоской области.
6. Запишите формулу вычисления объёма тела.
7. Как вычисляется масса плоской пластины?
8. Как найти центр тяжести плоской пластины при заданной поверхностной плотности?

ЧАСТЬ 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ГЛАВА 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4.1 Понятие комплексного числа

Определение. Множество всех пар действительных чисел $(a;b)$, для которых определены операции сложения и умножения, называют множеством ***комплексных чисел*** и обозначают символом $\mathbb{C}$.

Комплексное число принято обозначать $z=(a;b)$. При этом первое число a пары $(a;b)$ называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается символом $a=\operatorname{Re} z$, второе число b пары $(a;b)$ называется ***мнимой частью*** комплексного числа z и обозначается символом $b=\operatorname{Im} z$.

Reelle (действительный), Imaginaire (мнимый) – сокращение французских слов.

Таким образом по определению $\mathbb{C}=\{\, z=(a;b): a=\operatorname{Re} z\in\mathbb{R},\ b=\operatorname{Im} z\in\mathbb{R}\ \}$.

Два комплексных числа $z_1=(a_1;b_1)$ и $z_2=(a_2;b_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, то есть $z_1=z_2$ лишь если $a_1=a_2, b_1=b_2$.

4.2 Операции над комплексными числами

Суммой комплексных чисел $z_1=(a_1;b_1)$ и $z_2=(a_2;b_2)$ называется комплексное число $z=(a;b)$, где

$$a=a_1+a_2,\ b=b_1+b_2. \tag{4.1}$$

Обозначают сумму стандартным образом: $z=z_1+z_2$.

Произведением комплексных чисел $z_1=(a_1;b_1)$ и $z_2=(a_2;b_2)$ называется комплексное число $z=(a;b)$ такое, что

$$a=a_1a_2-b_1b_2,\ b=a_1b_2+a_2b_1. \tag{4.2}$$

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими легко проверяемыми свойствами:

1. Коммутативность: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$.
2. Ассоциативность: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.
3. Дистрибутивность: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

Следует отметить, что для обозначения операций над комплексными числами используются те же символы, что и для соответствующих операций над действительными числами. Это объясняется тем, что комплексные числа можно рассматривать как обобщение действительных чисел в следующем смысле.

Если каждому действительному числу a сопоставить комплексное число $(a;0)$, то оказывается, что помимо очевидного взаимно однозначного соответствия $a\sim(a;0)$ ещё сохраняется и соответствие между операциями. В самом деле, если $a_1\sim(a_1;0)$ и $a_2\sim(a_2;0)$, то $a_1+a_2\sim(a_1+a_2;0)$ и $(a_1;0)+(a_2;0)=(a_1+a_2;0)$, а $a_1\cdot a_2\sim(a_1\cdot a_2;0)$ и $(a_1;0)\cdot(a_2;0)=(a_1\cdot a_2;0)$.

В связи с этим, будем действительное число рассматривать как частный случай комплексного числа, для которого мнимая часть равна нулю, и вместо записи $(a;0)$ писать просто a.

Далее будем называть

- комплексное число вида $(0;b)$ – ***чисто мнимым***;
- комплексное число $(0;0)$ – ***нулём*** и обозначать $0=(0;0)$;
- комплексное число $(1;0)$ – ***единицей*** и обозначать $1=(1;0)$;
- комплексное число $(0;1)$ – ***мнимой единицей*** и обозначать $i=(0;1)$.

4.3 Алгебраическая форма записи комплексного числа

В силу определения произведения комплексных чисел справедливо равенство $i^2 = i \cdot i = (0;1)\cdot(0;1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1;\, 0\cdot 1 - 1\cdot 0) = (-1;0)$.

Ввиду нашего соглашения это означает, что $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$.

Заметим, что всякое комплексное число можно записать следующим образом:

$$z = (a;b) = (a;0) + (0;b) = (a;0) + (b;0)\cdot(0;1) = a + ib.$$

Это означает, что всякое комплексное число $z = (a;b)$ может быть представлено в виде суммы действительного числа a и чисто мнимого числа ib.

Представление комплексного числа в виде

$$z = a + ib \tag{4.3}$$

называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа.

Нетрудно проверить, что операции сложения и умножения комплексных чисел можно проводить по обычным правилам алгебры многочленов с учётом того, что $i^2 = -1$.

Комплексное число

$$\bar{z} = a - ib \tag{4.4}$$

называется ***сопряжённым*** числу $z = a + ib$.

Операции вычитания и деления комплексных чисел определяются как обратные к операциям сложения и умножения.

Комплексное число $z = a + ib$ называется ***разностью*** комплексных чисел $z_1 = (a_1;b_1)$ и $z_2 = (a_2;b_2)$, если

$$a = a_1 - a_2,\ \ b = b_1 - b_2, \tag{4.5}$$

и обозначается $z = z_1 - z_2$.

Комплексное число $z = a + ib$ называется ***частным*** комплексных чисел $z_1 = (a_1;b_1)$ и $z_2 = (a_2;b_2) \neq 0$, если $z_1 = z\, z_2$, и обозначается $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 заданы в алгебраической форме, то есть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда введенные выше операции можно записать следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 =$$

$$= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) - 1 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 - ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - i^2 b_1 b_2}{{a_2}^2 - i^2 {b_2}^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2) + 1 b_1 b_2}{{a_2}^2 + 1 {b_2}^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \quad \text{при } {a_2}^2 + {b_2}^2 \neq 0 \ (\text{или } z_2 \neq 0).$$

Отметим, что последняя из приведенных формул была получена домножением числителя и знаменателя на число, сопряженное к знаменателю.

Пример 4.1. Вычислить $z_1 \cdot \overline{z_2}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, если $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 3 + 7i$.

Решение.

1) $z_1 \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i)\overline{(3 + 7i)} = (4 - 5i)(3 - 7i) = 12 - 15i - 28i + 35i^2 =$

$$= 12 - 43i - 35 = -23 - 43i.$$

2) $\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\overline{4 - 5i}}{3 + 7i} = \frac{4 + 5i}{3 + 7i} = \frac{(4 + 5i)(3 - 7i)}{(3 + 7i)(3 - 7i)} = \frac{12 + 15i - 28i - 35i^2}{9 - 49i^2} =$

$$= \frac{12 - 13i + 35}{9 + 49} = \frac{47 - 13i}{58} = \frac{47}{58} - \frac{13}{58} i.$$

Пример 4.2. Решить квадратные уравнения: $z^2-6z+13=0$, $z^2+81=0$.

Решение. 1) $z^2-6z+13=0$,

$$D=6^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16,$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16\cdot i^2}=4i, \text{ тогда}$$

$$z_{1,2}=\frac{6\pm4i}{2}=3\pm2i.$$

2) $z^2+81=0$,

$z^2=-81$,

$z_{1,2}=\pm\sqrt{-81}$, где $\sqrt{-81}=\sqrt{81i^2}=9i$, тогда

$z_{1,2}=\pm9i$.

Замечание. В случае вещественных коэффициентов квадратного уравнения его комплексные корни всегда сопряженные. Теорема Виета справедлива и тогда, кода коэффициенты квадратного уравнения комплексные.

4.4 Геометрическое изображение комплексных чисел

Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение комплексного числа $z=a+ib$ точкой плоскости $(x;y)$ с декартовыми координатами $x=a$ и $y=b$. Число $z=0$ ставится в соответствие началу координат данной плоскости (рисунок 4.1). Такую плоскость будем называть ***комплексной плоскостью***, ось абсцисс – ***действительной***, а ось ординат – ***мнимой*** осью комплексной плоскости.

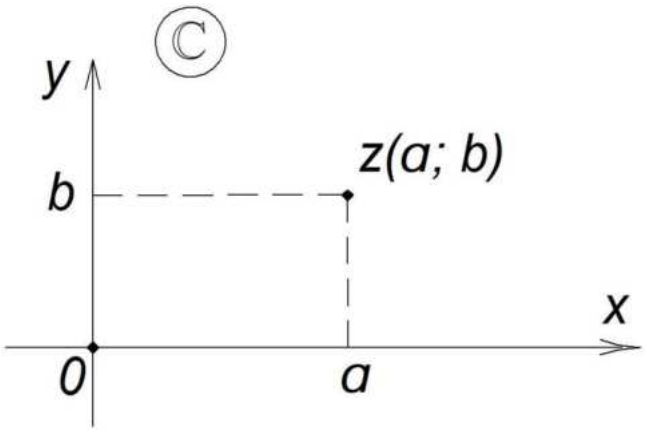
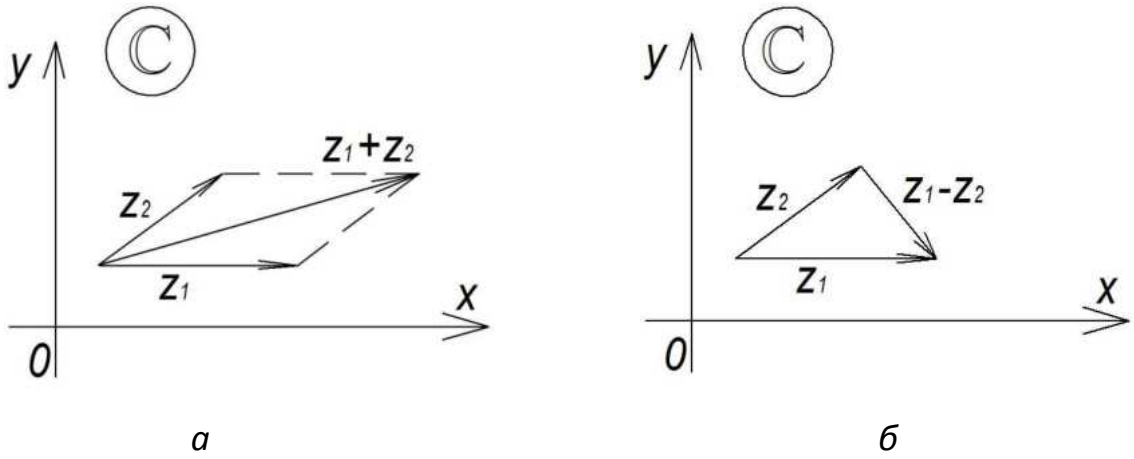


Рисунок 4.1 – Геометрическое изображение комплексного числа

Комплексное число также может изображаться радиус-вектором соответствующей точки (рисунок 4.3).

При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел $z = a + ib$ и множеством точек комплексной плоскости $(a;b)$, а также между множеством всех комплексных чисел и множеством радиус-векторов, проекции x и y которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны a и b. Такое соответствие позволяет отождествлять операции сложения и вычитания комплексных чисел с соответствующими операциями над векторами. Так, сумма (рисунок 4.2 *а*) и разность (рисунок 4.2 *б*) комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ будут представлены диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ как на сторонах.



а *б*

Рисунок 4.2 – Сумма и разность комплексных чисел

4.5 Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа

Для определения положения точки на плоскости можно использовать полярные координаты $(\rho;\varphi)$, где ρ – расстояние точки от начала координат, а φ – угол, который составляет радиус-вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс (рисунок 4.3).

Учитывая, что $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим форму записи комплексного числа

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{4.6}$$

называемую ***тригонометрической***.

При этом ρ называют ***модулем***, φ – ***аргументом*** комплексного числа и обозначают $\rho=|z|$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

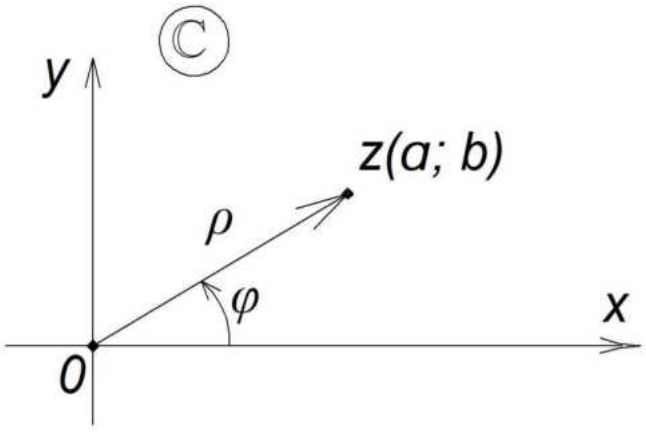


Рисунок 4.3 – Изображение комплексного числа
как радиус-вектора точки

Из геометрической интерпретации следует, что модуль численно равен расстоянию от начала координат до точки $z=a+ib$, то есть

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{4.7}$$

а аргумент определяется из решения уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$ (при этом необходимо учитывать знаки a и b). Отметим, что аргумент комплексного числа определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Обычно в аргументе числа z выделяют ***главное значение***, обозначаемое через $\arg z$ и заключенное в пределах $\varphi_0 < \arg z \le \varphi_0 + 2\pi$, где φ_0 – произвольное фиксированное число (как правило $\varphi_0 = 0$). Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, причём

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \text{если } a > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \text{если } a < 0, b \ge 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi, \text{если } a < 0, b < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{если } a = 0, b > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{если } a = 0, b < 0. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Аргумент комплексного числа $z = 0$ вообще не определен, а его модуль равен нулю.

Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на число кратное 2π.

Комплексно сопряженные числа имеют один и тот же модуль, а значения аргументов отличаются на число кратное 2π (в частности равны).

Пример 4.3. Изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме числа: $z_1 = 2$; $z_2 = -2i$; $z_3 = -3 - 3i$; $z_4 = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Решение. Данные комплексные числа изображены векторами на плоскости на рисунке 4.4.

1. Модули и аргументы чисел $z_1 = 2$ и $z_2 = -2i$ можно найти непосредственно по рисунку:

$$\rho_1 = |z_1| = 2,\ \rho_2 = |z_2| = 2;\quad \varphi_1 = \arg z_1 = 0,\ \varphi_2 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0),\ z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

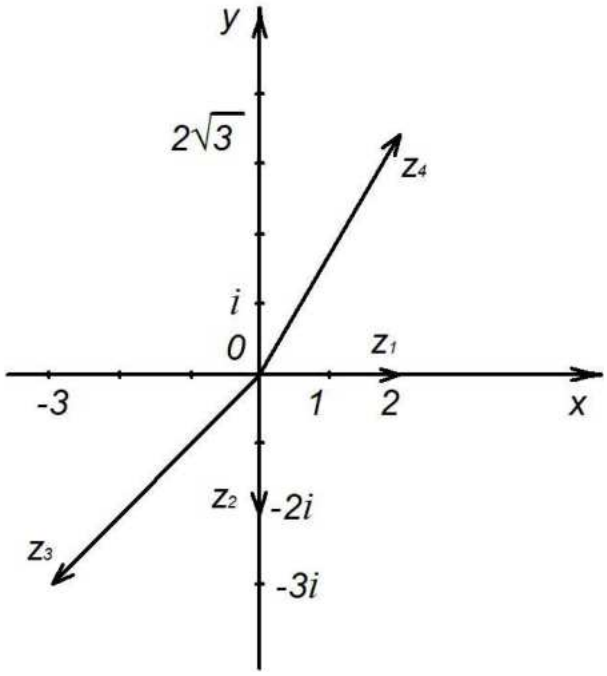


Рисунок 4.4 – Изображение комплексных чисел к примеру 4.3

2. Комплексное число $z_3 = -3 - 3i \in III$ квадранту: $a_3 = -3,\ b_3 = -3$. Тогда по формулам (4.7) и (4.8) получим:

$$\rho_3 = |z_3| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$\varphi_3 = \arg z_3 = \operatorname{arctg}\frac{-3}{-3} - \pi = \operatorname{arctg}1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

3. Комплексное число $z_4 = 2 + 2\sqrt{3}i \in I$ квадранту: $a_4 = 2,\ b_4 = 2\sqrt{3}$. Тогда по формулам (4.7) и (4.8) получим

$$\rho_4 = |z_4| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\varphi_4 = \arg z_4 = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, найдем их произведение:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(cos\,\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right].$$

Дальше можно воспользоваться известными формулами «косинус суммы» и «синус суммы» и окончательно получим ***формулу произведения комплексных чисел в тригонометрической форме:***

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]. \qquad (4.9)$$

Отсюда следует $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ и $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, то есть модуль произведения равен произведению модулей, аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Так же можно найти частное комплексных чисел z_1 и z_2, если $z_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}.$$

Дальше воспользуемся известными формулами «косинус разности», «синус разности» и «основное тригонометрическое тождество» и получим ***формулу частного двух комплексных чисел в тригонометрической форме***, если $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]. \qquad (4.10)$$

Произведение n равных чисел z называется n-й ***степенью*** числа z и обозначается символом z^n : $z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{ раз}}$.

Обратная операция – ***извлечение корня*** – определяется следующим образом: число w называется корнем n-й степени из числа z и обозначается символом $\sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$.

Для выполнения этих двух операций удобна тригонометрическая форма записи. Так, если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива ***формула Муавра***

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (4.11)$$

Для обратной операции справедлива формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1. \qquad (4.12)$$

Число различных значений корня n-й степени из комплексного числа равно n. Точки комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-й степени, расположены в вершинах n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z = 0$.

Из формулы Муавра следуют два свойства: $\left|z^n\right| = |z|^n$ и $\arg z^n = n\arg z$.

Пример 4.4. Вычислить $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{60}$.

Решение. Представим комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме (более подробно можно посмотреть в примере 4.2).

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$,

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Применим формулу (4.11) и получим:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60*\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(60*\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2^{60}\left(\cos 40\pi+i\sin 40\pi\right)=2^{60}.$$

Пример 4.5. Найти все решения уравнения $z^4+6iz^2+16=0$.

Решение. Обозначим $w=z^2$, тогда уравнение относительно w будет квадратным: $w^2+6iw+16=0$.

Найдем его корни через дискриминант:

$D=(6i)^2-4\cdot 16=36i^2-64=-100 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{-100}=10i$, тогда

$$w_{1,2}=\frac{-6i\pm 10i}{2}=-3i\pm 5i \quad \text{или} \quad w_1=-3i+5i=2i,\ w_2=-3i-5i=-8i.$$

Согласно введенному обозначению: $z^2=2i;\ z^2=-8i$ или $z=\sqrt{-8i};\ z=\sqrt{2i}$.

Запишем выражения, стоящие под знаком корня в последних равенствах, в тригонометрической форме (подробное рассмотрение в примере 4.2):

$$-8i=8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right];\ 2i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Тогда искомые корни заданного уравнения определяются следующими выражениями:

$$z_{1,2}=\sqrt{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right), \text{ где } k=0,1.$$

$$z_{3,4}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right), \text{ где } k=0,1.$$

При $k=0 \Rightarrow z_1=\sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-2i;$$

$$z_3=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i;$$

при $k=1 \Rightarrow z_2=\sqrt{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$

$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2+2i;$$

$$z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i.$$

Замечание 1. Для сокращения записей чисел и свойств операций над ними применяют вместо (а иногда и вместе) тригонометрической формы записи, так называемую показательную форму записи комплексных чисел.

Используя ***формулу Эйлера***

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \tag{4.13}$$

из тригонометрической формы записи можно получить так называемую ***показательную форму*** записи комплексного числа:

$$z=\rho e^{i\varphi}. \tag{4.14}$$

Пусть $z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2}$, легко показать справедливость следующих равенств:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \tag{4.15}$$

$$z^n=\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^n=\rho^n\, e^{in\varphi}; \tag{4.16}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho\, e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i},\ k=0,1,\ldots,n-1. \tag{4.17}$$

Отметим, что свойства операций в показательной форме записи выглядят так, как если бы символ $e^{i\varphi}$ обладал свойствами функции e^x (экспоненты).

Замечание 2. Формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ можно рассматривать как определение выражения $e^{i\varphi}$.

Нетрудно видеть, что из формулы Эйлера немедленно следуют еще три формулы $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$, $\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$, также называемые формулами Эйлера.

Пример 4.6. Вычислить: $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение. Представим комплексное число $z=1-i$ в тригонометрической форме $z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ (разбор таких заданий в примере 4.2).

У нас $\rho=|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-1}{1}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$, тогда

$$z=1-i=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Следовательно, по формуле (4.12) получим:

$$w_k=\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right),\quad k=0,1,2,3.$$

Полагаем последовательно $k=0,1,2,3$ и найдём все значения корня, сразу запишем их в показательной форме:

При $k=0\ \Rightarrow\ w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{16}\right)\right]=\sqrt[8]{2}\,e^{-i\frac{\pi}{16}}$;

При $k=1\ \Rightarrow\ w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right)=$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right) = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{16}};$$

При $k = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4}\right) =$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right) = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{15\pi}{16}};$$

При $k = 3 \Rightarrow w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4}\right) =$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right) = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{23\pi}{16}}.$$

4.6 Комплексные числа в электротехнике

Из физики известно, что переменным током называется ток, изменяющийся с течением времени как по величине, так и по направлению. Из всех переменных токов наибольшее распространение имеет периодический синусоидальный ток.

Любая синусоидальная функция времени однозначно задаётся амплитудой, частотой и начальной фазой: $f(t) = F_M \sin(\omega t + \varphi_f)$, где t – время, F_M – максимальное значение функции или амплитуда, ω – угловая частота, φ_f – начальная фаза (угол функции в начальный момент времени $t = 0$), аргумент синуса $(\omega t + \varphi_f)$ называется фаза или фазовый угол (он определяет значение функции $f(t)$ в любой момент времени t).

Как известно, синусоидальная функция $f(t)$ времени может быть представлена в виде вектора длины F_M, который вращается против часовой стрелки с угловой скоростью (частотой) ω, при этом начальное положение вектора определяется начальной фазой φ_f. Направление вектора в любой

момент времени t указывает фазы синусоидальной функции в данный момент, то есть угол, на который повернулся вектор в определенный промежуток времени.

В электротехнике тема «Переменный ток» занимает особое место, так как большинство электротехнических установок работает на переменном токе, который изменяется синусоидально и имеет преимущество в плане экономии энергоресурсов.

В электрических цепях переменного тока напряжение является синусоидальной функцией времени, а его уравнение имеет вид $u(t)=U_M\sin(\omega t+\varphi_u)$, где u – мгновенное значение напряжения, U_M – максимальное значение (амплитуда) напряжения, ω – угловая частота, t – время, φ_u – начальный фазовый угол, $\omega t=\alpha$ – электрический угол. При этом с течением времени напряжение изменяется синусоидально. Аналогичный вид имеют уравнения и других синусоидально изменяющихся величин, например, уравнения тока $i(t)=I_M\sin(\omega t+\varphi_i)$ и ЭДС $e(t)=E_M\sin(\omega t+\varphi_e)$. Поэтому при расчете цепей переменного тока приходится использовать синусоидально изменяющиеся величины, в частности, складывать, вычитать, умножать и делить их. А так как комплексное число на плоскости может быть представлено вектором, то наиболее удобной для расчетов стала комплексная система. Сложение и вычитание удобно производить в алгебраической форме, а умножение и деление – в показательной.

В комплексном методе ток и напряжение имеют следующий вид записи в показательной форме:

$$\dot{I}=I\,e^{j\varphi_i},\ \dot{U}=U\,e^{j\varphi_u},$$

где $I=\frac{I_M}{\sqrt{2}}$, $U=\frac{U_M}{\sqrt{2}}$ – действующие (эффективные) значения тока и напряжений. Стоит обратить внимание, что в электротехнике мнимая единица обозначается символом « j », так как символ «i » занят для обозначения тока.

Пример 4.7. Ток задан в комплексной форме $\dot{I} = 4 - 5j$. Записать уравнение тока.

Решение. Чтобы составить уравнение, необходимо знать амплитуду и начальный фазовый угол. Для начала найдём модуль и аргумент комплексного числа $4 - 5j$ по формулам (4.7) и (4.8):

$$\rho = |4 - 5j| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}403;$$

$$\varphi = \arg(4 - 5j) = \operatorname{arctg}\frac{-5}{4} = -\operatorname{arctg}\frac{5}{4} \approx -51^{\circ}.$$

Значит действующее значение тока $I = \rho \approx 6{,}403\ A$, тогда амплитуда $I_M = I\sqrt{2} = 6{,}403\sqrt{2} \approx 9{,}055\ A$, а начальная фаза $\varphi_i = \varphi \approx -51^{\circ}$. Тогда искомое уравнение тока $i(t) = 9{,}055\sin(\omega t - 51^{\circ})$.

Пример 4.8. В цепь переменного тока включены две параллельные ветви, которые содержат некоторое сопротивление (рисунок 4.5). При этом известны амплитуда, частота и начальная фаза токов i_1 и i_2: $i_1 = 4\sin(\omega t + 45^{\circ})$, $i_2 = 2\sin(\omega t + 30^{\circ})$. Определить амплитуду, частоту и начальную фазу тока i, а также составить его уравнение.

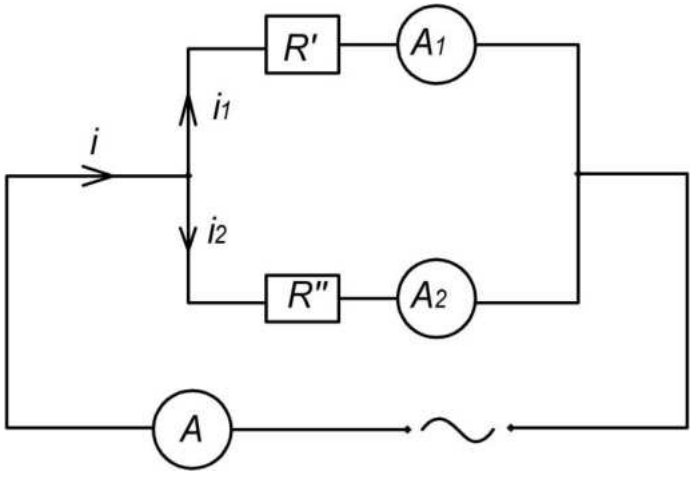


Рисунок 4.5 – Токи в параллельных ветвях цепи переменного тока

Решение. Согласно 1-му закону Кирхгофа (алгебраическая сумма токов, которые втекают в узел, равна алгебраической сумме токов, которые вытекают из узла) получим $i = i_1 + i_2$, то есть $i = 4\sin\left(\omega t + 45^{\circ}\right) + 2\sin\left(\omega t + 30^{\circ}\right)$.

Переведём уравнения токов i_1 и i_2 в комплексную форму:

$$\dot{I}_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j45^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4\left(\cos 45^{\circ} + j\sin 45^{\circ}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2{,}828 + 2{,}828\, j\right),$$

$$\dot{I}_2 = 2\sin\left(\omega t + 30^{\circ}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j30^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\left(\cos 30^{\circ} + j\sin 30^{\circ}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1{,}732 + j\right).$$

Тогда $\dot{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2{,}828 + 2{,}828\, j + 1{,}732 + j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4{,}56 + 3{,}828\, j\right)$. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4{,}56 + 3{,}828\, j\right)$ по формулам (4.7) и (4.8)

$$\rho = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4{,}56 + 3{,}828\, j\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4{,}56^2 + 3{,}828^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5{,}954 \Rightarrow I_M \approx 5{,}954\ A;$$

$$\varphi = \arg\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4{,}56 + 3{,}828\, j\right)\right] = \operatorname{arctg}\frac{3{,}828}{4{,}56} \approx 40^{\circ}.$$

Следовательно $i = 5{,}954\sin\left(\omega t + 40^{\circ}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Что такое мнимая единица?
2. Записать комплексное число в алгебраической и тригонометрической формах.
3. Как изображается комплексное число на плоскости?
4. Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
5. Как выполнять действия над комплексными числами в арифметической и тригонометрической формах?
6. Записать формулу Муавра.
7. Записать формулу корня степени n из комплексного числа.

ГЛАВА 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1 Начальные сведения

Большое число математических моделей, применяемых при изучении природных процессов, основаны на построении зависимостей между изучаемыми признаками. Достаточно часто удается установить не прямые зависимости (уравнения), а лишь некоторые связи между этими величинами и их производными. Например, при изучении законов движения в механике, различные типы движений описываются связями между пройденным путем, мгновенной скоростью, мгновенным ускорением. В результате, возникает соотношение (или соотношения), содержащее искомую функцию, её производные или дифференциалы и аргумент (или аргументы).

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (или переменные), искомую функцию и её производные (или дифференциалы).

Определение. Дифференциальное уравнение для функции одного переменного называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***.

Определение. Дифференциальное уравнение для функции нескольких переменных, содержащее частные производные, называют ***дифференциальным уравнением в частных производных***.

Здесь мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано следующим образом: $F\left(x;\, y;\, y';\, y'';\ldots;\, y^{(n)}\right)=0$ или $F\left(x;\, y;\, dy;\, d^2y;\ldots;\, d^ny\right)=0$. Поскольку дифференциалы и производные связаны $\left(d^ny = y^{(n)}dx^n,\ n=1,\,2,\ldots\right)$, то достаточно рассматривать только дифференциальные уравнения вида $F\left(x;\, y;\, y';\, y'';\ldots;\, y^{(n)}\right)=0$.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала) искомой функции, входящей в это уравнение.

Определение. Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется n раз дифференцируемая функция, которая при её подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Будем различать случаи, когда решение записывается как явная функция, и именно за этим случаем сохраним название «решение». В том случае, когда решение записывается в неявном виде, мы будем говорить об интеграле дифференциального уравнения.

Определение. График решения (или интеграла) называется ***интегральной кривой*** рассматриваемого дифференциального уравнения.

5.2 Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка

Согласно данному выше общему определению дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x;\, y;\, y') = 0, \tag{5.1}$$

где $F(x;\, y;\, z)$ – заданная функция, определенная и непрерывная в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Область D принято называть областью определения дифференциального уравнения (5.1).

Предположим, что уравнение (5.1) можно записать в виде

$$y' = f(x;\, y). \tag{5.2}$$

Определение. Уравнение $y' = f(x;\, y)$ называют ***дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной***.

Имеет место утверждение, называемое теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Пусть в окрестности точки $(x_0; y_0)$ функции $f(x; y)$, $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ непрерывны. Тогда дифференциальное уравнение (5.2) в некоторой окрестности точки x_0 имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Отметим, что теорема Коши утверждает следующее: при выполнении условий этой теоремы через точку $(x_0; y_0)$ проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения (5.2).

Определение. Задачей Коши для дифференциального уравнения (5.1) понимают задачу о поиске решения этого дифференциального уравнения, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$.

Таким образом, задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка может быть записана в виде

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y' = f(x; y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Замечание. Дополнительное условие $y(x_0) = y_0$ в задаче Коши называют также ***начальным условием***. Это связано с тем, что, как правило, в прикладных задачах условие такого типа описывает состояние изучаемого процесса в момент времени $t = 0$.

Вернёмся к дифференциальному уравнению $y' = f(x; y)$ в окрестности точки $(x_0; y_0)$. Очевидно, что $y'(x_0) = f(x_0; y(x_0)) = f(x_0; y_0)$. Однако $y'(x_0)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y(x)$, которая является решением дифференциального уравнения. Это означает, что дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ в каждой точке $(x_0; y_0)$ определяет некоторое направление.

Определение. Полем направлений дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ называют совокупность точек $(x_0; y_0)$ из области определения функции $f(x; y)$ и направлений, определяемых угловыми коэффициентами $y'(x_0)$, касательных к интегральным кривым в точках $(x_0; y_0)$.

Геометрически задача решения дифференциального уравнения состоит в построении кривых, которые в каждой своей точке имеют направление, определяемое полем направлений данного дифференциального уравнения.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ $(\varphi(x; y) = 0)$, являющаяся решением задачи Коши (5.3), называется ***частным решением*** (***частным интегралом***) дифференциального уравнения.

Определение. Функция $y = \varphi(x; C)$ $(\varphi(x; y; C) = 0)$, зависящая от произвольной постоянной C, называется ***общим решением*** (***общим интегралом***) дифференциального уравнения первого порядка, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) при любом фиксированном значении константы C функция $y = \varphi(x; C)$ $(\varphi(x; y; C) = 0)$ является решением (интегралом) дифференциального уравнения;

2) любое частное решение (частный интеграл) может быть получено из общего выбором константы C.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ $(\varphi(x; y) = 0)$ называется ***особым решением*** (***особым интегралом***), если она является решением, но не является частным решением.

Другими словами, особое решение – это такое решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено ни при каких значениях постоянной C из общего решения.

5.3 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называют уравнение вида

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y). \tag{5.4}$$

Отметим, что дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называют также следующие уравнения, приводящиеся к виду (5.4) при помощи простейших преобразований:

$$dy = f_1(x)\cdot f_2(y)dx, \tag{5.4а}$$

$$M_1(x)\cdot N_1(y)y' = M_2(x)\cdot N_2(y), \tag{5.4б}$$

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dy = M_2(x)\cdot N_2(y)dx. \tag{5.4в}$$

Опишем процесс построения общего решения, например, для уравнения (5.4). Проделаем следующие преобразования:

1. Умножим обе части (5.4) на $dx \Rightarrow y'dx = f_1(x)\cdot f_2(y)dx$.

2. Так как $dy = y'dx$, то $dy = f_1(x)\cdot f_2(y)dx$.

3. Разделим обе части уравнения на $f_2(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$.

4. Проинтегрируем обе части последнего равенства и окончательно получим: $\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$.

Замечание 1. В выписанных выше равенствах под $\int \dfrac{dy}{f_2(y)}$, $\int f_1(x)dx$ мы понимаем фиксированные первообразные соответствующих подынтегральных функций.

Замечание 2. При выполнении процедуры разделения переменных мы делили на функцию $f_2(y)$. Это преобразование является эквивалентным для

всех таких $y \in D(f)$, что $f_2(y) \neq 0$. В связи с этим равенство $f_2(y) = 0$ может порождать решения рассматриваемого уравнения. Это означает, что решения уравнения $f_2(y) = 0$ следует изучить дополнительно.

Пример 5.1. Найти все решения дифференциального уравнения $y' = xe^{2x-y}$.

Решение. Рассматриваемое уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными, поскольку $xe^{2x-y} = xe^{2x} \cdot e^{-y}$.

Применим описанную выше процедуру разделения переменных:

$$y' = xe^{2x-y} \Leftrightarrow y' = xe^{2x} \cdot e^{-y} \,\big|\cdot dx,$$

$$y'dx = xe^{2x} \cdot e^{-y}dx, \text{ так как } dy = y'dx, \text{ то}$$

$$dy = xe^{2x} \cdot e^{-y}dx \,\big|: e^{-y},$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = xe^{2x}dx \Leftrightarrow e^{y}dy = xe^{2x}dx.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения: $\int e^{y}dy = \int xe^{2x}dx + C$.

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

1) $\int e^{y}dy = e^{y} + C$;

2) $\int xe^{2x}dx = \left(\begin{array}{l}\text{формула интегрирования}\\ \text{по частям}\end{array}\right) = \left\| \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = e^{2x}dx \to v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\| =$

$$= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Тогда окончательно получим $e^{y} = \frac{x}{2}e^{2x} - e^{2x} + C$.

Итак, получен общий интеграл $e^{y} = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$ рассматриваемого дифференциального уравнения. Отметим, что он может быть представлен как общее решение в виде $y = \ln\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right)$.

В ходе решения мы умножали обе части уравнения на e^y. Поскольку $e^y \neq 0$ при всех возможных значениях y, то мы не потеряли и не приобрели решения рассматриваемого дифференциального уравнения.

Пример 5.2. Найти все решения дифференциального уравнения $\left(x^2+1\right)y' = x\left(y^2-1\right)$.

Решение. Рассматриваемое уравнение является уравнением вида (5.4б), легко видеть, что его можно привести к виду (5.4). Однако делать этого не нужно, а следует сразу применять процедуру разделения переменных, слегка модифицировав её:

$$\left(x^2+1\right)y' = x\left(y^2-1\right)\Big| \cdot dx,$$

$$\left(x^2+1\right)y'dx = x\left(y^2-1\right)dx, \text{ так как } dy = y'dx, \text{ то}$$

$$\left(x^2+1\right)dy = x\left(y^2-1\right)dx \Big| : \left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right),$$

$$\frac{\left(x^2+1\right)dy}{\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)} = \frac{x\left(y^2-1\right)dx}{\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2-1} = \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{xdx}{x^2+1} + C$.

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

1) $\int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$.

2) $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \left\| \begin{matrix} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}du \end{matrix} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$.

Вернёмся к нашему уравнению: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln|C|$, где константу C представили в виде $\frac{1}{2}\ln|C|$, чтобы далее было удобно преобразовывать полученный результат следующим образом:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln|C| \;\Big|\cdot 2,$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln\left(x^2+1\right) + \ln|C|, \text{ применим свойства логарифмов } \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln\left|C\left(x^2+1\right)\right|,$$

$\frac{y-1}{y+1} = C\left(x^2+1\right)$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

При достижении этого результата мы делили обе части уравнения на $\left(x^2+1\right)$ и $\left(y^2-1\right)$.

Деление на $\left(x^2+1\right)$ является равносильным преобразованием, так как $x^2+1\neq 0$ при всех возможных значениях x.

При делении на $\left(y^2-1\right)$ мы предполагали, что $y^2-1\neq 0$. При этом потеряны решения $y=\pm 1$ (функции $y=\pm 1$ являются решениями данного дифференциального уравнения, поскольку при подстановке этих функций в уравнение оно обращается в тождество). Очевидно, каждое из этих решений не может быть получено из общего интеграла ни при каких значениях постоянной *C*.

Таким образом, рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет общий интеграл $\frac{y-1}{y+1} = C\left(x^2+1\right)$ и два особых решения $y=\pm 1$.

Пример 5.3. Решить задачу Коши $\begin{cases} \cos^2 x\, y\, y' = e^{-y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Решение. 1. Сначала найдём общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения. Применяя процедуру разделения переменных, получим:

$$\cos^2 x\, y\, y' = e^{-y^2} \quad \Big| \cdot dx$$

$\cos^2 x\, y\, y'dx = e^{-y^2}dx$, так как $dy = y'dx$, то

$$\cos^2 x\, y\, dy = e^{-y^2}dx \quad \Big| : \left(\cos^2 x e^{-y^2}\right)$$

$$\frac{\cos^2 x\, y\, dy}{\cos^2 x e^{-y^2}} = \frac{e^{-y^2}dx}{\cos^2 x e^{-y^2}} \Leftrightarrow ye^{y^2}dy = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int ye^{y^2}dy = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C$.

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

$$1)\ \int ye^{y^2}dy = \left\| \begin{array}{l} u = y^2 \\ du = 2y\,dy \\ y\,dy = \frac{1}{2}du \end{array} \right\| = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{y^2} + C.$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Вернёмся к нашему уравнению: $\frac{1}{2}e^{y^2} = \operatorname{tg} x + C$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Нетрудно проверить (анализируя равенства $e^{y^2} = 0$ и $\cos^2 x = 0$), что особых решений рассматриваемое уравнение не имеет. Впрочем, если бы они и существовали, мы бы их не рассматривали, поскольку требуется найти решение задачи Коши, то есть частное решение.

2. Теперь, используя начальное условие $y(0)=0$ (или $y=0$ при $x=0$), определим константу C. Для этого подставим $y=0$ и $x=0$ в общий интеграл

$$\frac{1}{2}e^{y^2}=\operatorname{tg}x+C \Rightarrow \frac{1}{2}e^{0}=tg\,0+C \Leftrightarrow \frac{1}{2}=0+C \Leftrightarrow \frac{1}{2}=C.$$

Итак, решение задачи Коши представляет собой частный интеграл вида $\frac{1}{2}e^{y^2}=\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}$ или $e^{y^2}=2\operatorname{tg}x+1$.

Пример 5.4. Найти частное решение (или частный интеграл) дифференциального уравнения $\left(3x^2+5\right)dy+9xy^3dx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. 1. Сначала найдём общее решение (или общий интеграл) данного уравнения. Данное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид (5.4в). Разделим в нём переменные:

$$\left(3x^2+5\right)dy+9xy^3dx=0 \;\Big|:\left(3x^2+5\right)y^3\neq 0,$$

$$\frac{\left(3x^2+5\right)dy}{\left(3x^2+5\right)y^3}+\frac{9xy^3dx}{\left(3x^2+5\right)y^3}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^3}+\frac{9x}{3x^2+5}dx=0.$$

Полученное уравнение решаем почленным интегрированием:

$$\int\frac{dy}{y^3}+\int\frac{9x\,dx}{3x^2+5}=C.$$

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

$$1)\int\frac{dy}{y^3}=\int y^{-3}dy=\frac{y^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2y^2}+C;$$

$$2)\ \int\frac{9xdx}{3x^2+5}=\left\|\begin{matrix}u=3x^2+5\\du=6xdx\\xdx=\frac{1}{6}du\end{matrix}\right\|=\int\frac{9\cdot\frac{1}{6}du}{u}=\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{3}{2}\ln|u|+C=\frac{3}{2}\ln\left|3x^2+5\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(3x^2+5\right)+C.$$

Тогда $-\frac{1}{2y^2}+\frac{3}{2}\ln\left(3x^2+5\right)=C$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

2. Теперь найдем частный интеграл. Он получается из общего при конкретном значении произвольной постоянной C. Чтобы найти конкретное значение постоянной C, подставим начальное условие $x=0$ и $y=1$ в общий интеграл: $-\frac{1}{2\cdot 1^2}+\frac{3}{2}\ln\left(3\cdot 0^2+5\right)=C \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln 5=C$ или $C=\frac{1}{2}(3\ln 5-1)$.

Тогда $-\frac{1}{2y^2}+\frac{3}{2}\ln\left(3x^2+5\right)=\frac{1}{2}(3\ln 5-1)$ или $3\ln\left(3x^2+5\right)-\frac{1}{y^2}=3\ln 5-1$ – частный интеграл данного дифференциального уравнения.

5.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция двух переменных $f(x;y)$ называется ***однородной измерения α***, если она удовлетворяет условиям:

1) если $(x;y)\in D(f)$, то для любого $t \Rightarrow (tx;ty)\in D(f)$,

2) имеет место тождество $f(tx;ty)=t^{\alpha}f(x;y)\ \forall(x;y)\in D(f)$.

Отметим, что ***однородная функция нулевого измерения*** удовлетворяет соотношению $f(tx;ty)=t^0 f(x;y)=f(x;y)\ \forall(x;y)\in D(f)$. Фактически, однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов $\frac{y}{x}$. Действительно, $f(x;y)=f\left(x;x\cdot\frac{y}{x}\right)=x^0\cdot f\left(1;\frac{y}{x}\right)=f\left(1;\frac{y}{x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Определение. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называют дифференциальное уравнение вида (5.2) $y'=f(x;y)$, если $f(x;y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными при помощи замены вида

$$u=\frac{y}{x} \text{ или } y=ux \Rightarrow y'=u'x+u \text{ или } y'=x\frac{du}{dx}+u.$$

Пример 5.5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}.$$

Решение. Данное уравнение будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка, поскольку в правой части уравнения функция $f(x;y)=\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}$ является однородной нулевого измерения, так как она удовлетворяет условию

$$f(tx;ty)=\frac{ty}{tx}+\cos^2\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}=f(x;y).$$

Сделаем замену переменной $\begin{cases} y=u\cdot x, \\ y'=x\cdot\dfrac{du}{dx}+u, \end{cases}$ и подставим её в уравнение:

$$x\cdot\frac{du}{dx}+u=\frac{ux}{x}+\cos^2\frac{ux}{x} \Leftrightarrow x\cdot\frac{du}{dx}+u=u+\cos^2 u \Leftrightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=\cos^2 u.$$

Полученное уравнение с разделяющимися переменными решаем методом разделения переменных:

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\cos^2 u \;\Big|\cdot dx,$$

$$xdu=\cos^2 u dx \;\Big|: x\cos^2 u,$$

$$\frac{xdu}{x\cos^2 u}=\frac{\cos^2 u dx}{x\cos^2 u} \Leftrightarrow \frac{du}{\cos^2 u}=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\int\frac{dx}{x}+C$.

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

1) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Вернёмся к нашему уравнению: $\operatorname{tg} u = \ln|x| + C$.

Так как при решении уравнения мы делали замену переменной $y = ux$ или $u = \frac{y}{x}$, то (подставив $u = \frac{y}{x}$ в полученный выше результат) получим $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln|x| + C$ – общий интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения.

Отметим, что в рассматриваемом примере может быть получено и общее решение: $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\ln|x| + C\right) \Rightarrow y = x\operatorname{arctg}\left(\ln|x| + C\right)$.

Пример 5.6. Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения $4xy\,dx = \left(x^2 + 3y^2\right)dy$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду (5.2):

$4xydx = \left(x^2 + 3y^2\right)dy \;\big|:\left(x^2 + 3y^2\right)dx$,

$\frac{4xydx}{\left(x^2 + 3y^2\right)dx} = \frac{\left(x^2 + 3y^2\right)dy}{\left(x^2 + 3y^2\right)dx} \Leftrightarrow \frac{4xy}{x^2 + 3y^2} = \frac{dy}{dx}$, так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то

$y' = \frac{x^2 + 3y^2}{4xy}$.

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, так как в правой части уравнения функция $f(x; y) = \frac{x^2 + 3y^2}{4xy}$ удовлетворяет условию

$$f(tx; ty) = \frac{t^2x^2 + 3t^2y^2}{4tx \cdot ty} = \frac{t^2 \cdot \left(x^2 + 3y^2\right)}{t^2 \cdot 4xy} = \frac{x^2 + 3y^2}{4xy} = f(x; y).$$

Сделаем замену переменной $\begin{cases} y = u \cdot x, \\ y' = x \cdot \dfrac{du}{dx} + u, \end{cases}$ и подставим её в уравнение:

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = \frac{x^2 + 3u^2 x^2}{4x \cdot ux} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} + u = \frac{x^2\left(1 + 3u^2\right)}{4x^2 u},$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = \frac{1 + 3u^2}{4u} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1 + 3u^2}{4u} - u \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1 + 3u^2 - 4u^2}{4u},$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{4u} \left| \cdot \frac{dx}{x} \right. \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1 - u^2}{4u} \cdot \frac{dx}{x},$$

$$du = \frac{1 - u^2}{4u} \cdot \frac{dx}{x} \quad \left| \cdot \frac{4u}{1 - u^2} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{4u}{1 - u^2} du = \frac{1 - u^2}{4u} \cdot \frac{4u}{1 - u^2} \cdot \frac{dx}{x},$$

$$\frac{4u\, du}{1 - u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int \frac{4u\, du}{1 - u^2} = \int \frac{dx}{x} + C$.

Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

$$1)\ \int \frac{4u\, du}{1 - u^2} = \left\| \begin{array}{l} t = 1 - u^2 \\ dt = -2u du \\ u du = \dfrac{1}{-2} dt \end{array} \right\| = \int \frac{4 \cdot \frac{1}{-2} dt}{t} = -2 \int \frac{dt}{t} = -2 \ln|t| + C = -2 \ln\left|1 - u^2\right| + C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Вернёмся к уравнению:

$$-2 \ln\left|1 - u^2\right| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1 - u^2\right)^{-2} = \ln|Cx| \quad \text{или} \quad \frac{1}{\left(1 - u^2\right)^2} = Cx.$$

Так как $y = u \cdot x$ или $u = \frac{y}{x}$, то $\dfrac{1}{\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} = Cx.$

Преобразуем последнее выражение:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^2}=Cx \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^2}=Cx \;\Leftrightarrow\; \frac{x^4}{\left(x^2-y^2\right)^2}=Cx \Leftrightarrow$$

$x^3=C\left(x^2-y^2\right)^2$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

5.5 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение, в котором искомая функция и её производная содержатся линейно, то есть в первой степени. Таким образом, линейное уравнение может быть приведено к виду

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{5.5}$$

Несколько более общее уравнение

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \tag{5.6}$$

называется ***уравнением Бернулли***. Ясно, что при $\alpha=0$ уравнение Бернулли является линейным, а при $\alpha=1$ – дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Линейное уравнение выделяется из общих уравнений Бернулли потому, что на практике встречается гораздо чаще, чем уравнение Бернулли общего вида.

Впрочем, уравнение Бернулли общего вида может быть сведено к линейному уравнению. В самом деле, выполним в уравнении (5.6) замену искомой функции по формуле $y=z^m \;\Rightarrow\; y'=mz^{m-1}z'$, получим:

$$mz^{m-1}z'+P(x)z^m=Q(x)z^{m\alpha} \;\Big|:mz^{m-1},$$

$$z'+\frac{P(x)z^m}{mz^{m-1}}=\frac{Q(x)z^{m\alpha}}{mz^{m-1}},$$

$$z' + \frac{P(x)z}{m} = \frac{Q(x)z^{m\alpha - m + 1}}{m}.$$

Можно считать, что $\alpha \neq 1$, тогда выбрав m так, чтобы $m\alpha - m + 1 = 0$ или

$m(\alpha - 1) = -1 \;\Leftrightarrow\; m = \dfrac{1}{1-\alpha}$, получим $z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$.

По существу, оба уравнения (5.5), (5.6) могут быть решены одинаковыми методами, которые мы изложим на примере линейного уравнения.

5.5.1 Подстановка Лагранжа

Под подстановкой Лагранжа понимают замену искомой функции в уравнении (5.5) по формуле $\begin{cases} y = u\,v, \\ y' = u'\,v + u\,v', \end{cases}$ где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неизвестные функции, зависящие от переменной x, и функция $v(x)$ есть решение дифференциального уравнения $y' + P(x)y = 0$.

Получим $u'\,v + u\,v' + P(x)u\,v = Q(x)$, далее сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части уравнения: $u'\,v + (u\,v' + P(x)u\,v) = Q(x) \;\Rightarrow$ $u'\,v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$.

Потребуем, чтобы $v' + P(x)v = 0$, тогда данное дифференциальное уравнение будет равносильно системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Отметим, что, решая вспомогательное дифференциальное уравнение $v' + P(x)v = 0$, достаточно находить любое его частное решение, то есть константу C можно принимать равной, например, нулю.

Пример 5.7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - 2xy = 4x^3 e^{x^2}$.

Решение. Выполним подстановку Лагранжа $\begin{cases} y = u\,v, \\ y' = u'\,v + u\,v', \end{cases}$ и получим

$$u'\,v + u\,v' - 2x\,u\,v = 4x^3 e^{x^2}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части уравнения:

$$u'\,v + \left(u\,v' - 2x\,u\,v\right) = 4x^3 e^{x^2} \;\Leftrightarrow\; u'\,v + u\left(v' - 2x\,v\right) = 4x^3 e^{x^2}.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' - 2x\,v = 0, \\ u'\,v = 4x^3 e^{x^2}. \end{cases}$$

Функцию $v = v(x)$ найдем из первого уравнения системы:

$$v' - 2x\,v = 0 \;\Leftrightarrow\; v' = 2x\,v \,\big|\cdot dx,$$

$v'dx = 2x\,v\,dx$, так как $dv = v'dx$, то

$$dv = 2x\,v\,dx \,\big|: v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = 2x\,dx.$$

Проинтегрируем почленно последнее уравнение: $\int \frac{dv}{v} = 2\int x\,dx$. Тогда:

$$\ln|v| = x^2 + C,$$

$$|v| = e^{x^2 + C},$$

$$|v| = e^{x^2} \cdot e^{C},$$

$v = \pm e^{C} \cdot e^{x^2}$. Обозначим $C_1 = \pm e^{C}$ и получим $v = C_1 e^{x^2}$.

Далее константу C_1 выбираем равной 1 и имеем

$$v = e^{x^2}.$$

Из второго уравнения системы $u'v = 4x^3 e^{x^2}$ найдём функцию $u = u(x)$. Так как $v = e^{x^2}$, то $u'e^{x^2} = 4x^3 e^{x^2} \Leftrightarrow u' = 4x^3$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$u' = 4x^3 \left| \cdot dx \right. \Rightarrow u'dx = 4x^3 dx$, так как $du = u'dx$, то $du = 4x^3 dx$.

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int du = \int 4x^3 dx + C$, получим $u = x^4 + C$.

Так как мы делали замену $y = uv$, то $y = \left(x^4 + C\right)e^{x^2}$ – искомое общее решение.

Пример 5.8. Найти все решения дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} - 12xy^3 = 0$.

Решение. Рассматриваемое уравнение является уравнением Бернулли, приведём его к виду (5.6): $y' - \frac{y}{x} = 12xy^3$.

Применяем подстановку Лагранжа $\begin{cases} y = u\,v, \\ y' = u'\,v + u\,v'. \end{cases} \Rightarrow$

$$u'\,v + u\,v' - \frac{u\,v}{x} = 12x\,u^3 v^3.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части уравнения:

$$u'\,v + \left(u\,v' - \frac{u\,v}{x}\right) = 12x\,u^3 v^3 \quad \Leftrightarrow \quad u'\,v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 12x\,u^3 v^3.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'\,v = 12x\,u^3 v^3. \end{cases}$$

Функцию $v = v(x)$ найдем из первого уравнения системы:

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; v' = \frac{v}{x} \Big| \cdot dx,$$

$v'dx = \frac{v}{x}dx$, так как $dv = v'dx$, то

$$dv = \frac{v}{x}dx \Big| : v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем почленно последнее уравнение: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, тогда

$$\ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Из второго уравнения системы $u'v = 12xu^3v^3$ найдём функцию $u = u(x)$. Так как $v = x$, то $u'x = 12xu^3x^3 \;\Leftrightarrow\; u' = 12u^3x^3$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$u' = 12u^3x^3 \Big| \cdot dx,$$

$u'dx = 12xu^3x^2dx$, так как $du = u'dx$, то

$$du = 12u^3x^3dx \Big| : u^3,$$

$$\frac{du}{u^3} = 12x^3dx.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int \frac{du}{u^3} = \int 12x^3dx + C$. Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл:

1) $\int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2u^2} + C$;

2) $\int 12x^3dx = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + C = 3x^4 + C$.

Получим $-\frac{1}{u^2} = 3x^4 + C \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{1}{-3x^4 - C} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\pm 1}{\sqrt{-3x^4 - C}}$.

Так как мы делали замену $y = uv$, то $y = \dfrac{\pm x}{\sqrt{-3x^4 - C}}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 5.9. Найти общее решение уравнения $xy' - 4y = x\sqrt{y}$.

Решение. Приведём уравнение к виду (5.5) или (5.6), разделив обе части уравнения на x.

$$y' - \frac{4y}{x} = \sqrt{y}.$$

Получилось уравнение вида (5.6), то есть уравнение Бернулли. Сделаем подстановку вида $\begin{cases} y = u\,v, \\ y' = u'\,v + u\,v'. \end{cases}$

$$u'\,v + u\,v' - \frac{4u\,v}{x} = \sqrt{u\,v} \quad \Leftrightarrow \quad u'\,v + u\left(v' - \frac{4\,v}{x}\right) = \sqrt{u\,v}\,.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю $\Rightarrow$ получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' - \dfrac{4\,v}{x} = 0, \\ u'\,v = \sqrt{u\,v}. \end{cases}$$

Функцию $v = v(x)$ найдем из первого уравнения системы:

$$v' - \frac{4v}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; v' = \frac{4v}{x} \;\Big|\cdot dx,$$

$v'dx = \dfrac{4v}{x}dx$, так как $dv = v'dx$, то

$$dv = \frac{4v}{x}dx \;\Big|: v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{4\,dx}{x}\,.$$

Проинтегрируем почленно последнее уравнение: $\int \dfrac{dv}{v} = 4\int \dfrac{dx}{x}$, тогда

$$\ln|v| = 4\ln|x| \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln x^4 \;\Rightarrow\; v = x^4.$$

Из второго уравнения системы $u'v=\sqrt{uv}$ найдём функцию $u=u(x)$.

Так как $v=x^4$, то $u'x^4=\sqrt{ux^4} \Leftrightarrow u'x^4=x^2\sqrt{u}\,\big|:x^4$,

$u'=\dfrac{\sqrt{u}}{x^2}\,\Big|\cdot dx \Rightarrow u'\,dx=\dfrac{\sqrt{u}}{x^2}dx$, так как $du=u'dx$, то

$du=\dfrac{\sqrt{u}}{x^2}dx\,\Big|:\sqrt{u} \Rightarrow \dfrac{du}{\sqrt{u}}=\dfrac{dx}{x^2}$.

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int\dfrac{du}{\sqrt{u}}=\int\dfrac{dx}{x^2}+C$.

Получим $2\sqrt{u}=-\dfrac{1}{x}+C \Rightarrow 2\sqrt{u}=\dfrac{Cx-1}{x} \Rightarrow \sqrt{u}=\dfrac{Cx-1}{2x} \Rightarrow$

$u=\left(\dfrac{Cx-1}{2x}\right)^2$.

Так как $y=uv$, то $y=x^4\left(\dfrac{Cx-1}{2x}\right)^2$ или $y=\dfrac{x^2}{4}(Cx-1)^2$ – общее решение данного уравнения Бернулли.

5.5.2 Метод вариации произвольной постоянной

Линейному дифференциальному уравнению (5.5) поставим в соответствие дифференциальное уравнение $y'+P(x)y=0$. Это дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, условимся обозначать его общее решение через Y (чтобы отличать от общего решения уравнения (5.5)).

Найдем Y:

$Y'+P(x)Y=0 \Leftrightarrow Y'=-P(x)Y\,\big|\cdot dx$,

$Y'\,dx=-P(x)Y\,dx$, так как $dY=Y'\,dx$, то

$dY=-P(x)Y\,dx\,\big|:Y$,

$\dfrac{dY}{Y}=-P(x)dx$. Проинтегрируем обе части уравнения и получим

$\int \frac{dY}{Y} = -\int P(x)dx + C$, при этом выберем константу в виде $\ln|C|$.

$\ln|Y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \quad \Rightarrow$

$Y = e^{-\int P(x)dx + \ln|C|} = e^{\ln|C|} e^{-\int P(x)dx} = C\,e^{-\int P(x)dx}$. То есть

$$Y = C\,e^{-\int P(x)dx}. \tag{5.7}$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в следующем: общее решение дифференциального уравнения (5.5) будем искать в виде (5.7), считая, что константа C – это функция $C(x)$. Другими словами, ищем общее решение уравнения (5.5) в виде (5.7), варьируя произвольную постоянную.

Итак, положим $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Подставляя это выражение в (5.5) $y' + P(x)y = Q(x)$, получим:

$$\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}\left(-\int P(x)dx\right)' + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Big| \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Big| \cdot dx,$$

$$C'(x)dx = \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c.$$

Тогда $y = \left(\int \left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Пример 5.10. Методом вариации произвольной постоянной найти общее решение дифференциального уравнения $y' - y\,\mathrm{tg}x = \cos x$.

Решение. Вспомогательное уравнение в этом случае имеет вид $y' - y\mathrm{tg}x = 0$.

Найдем общее решение Y этого уравнения:

$Y' - Y\,\mathrm{tg}x = 0 \,\big|\cdot dx \quad \Rightarrow \quad Y'dx + Y\,\mathrm{tg}x\,dx = 0$, так как $dY = Y'dx$, то

$dY = -Y\,\mathrm{tg}x\,dx \,\big|:Y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dY}{Y} = -\mathrm{tg}x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int\dfrac{dY}{Y} = -\int \mathrm{tg}x\,dx + C \quad \Rightarrow$

$\ln|Y| = -\ln|\cos x| + \ln|C|$ (здесь в качестве константы мы выбрали $\ln|C|$).

Тогда $\ln|Y| = \ln\left|\dfrac{C}{\cos x}\right| \quad \Rightarrow \quad Y = \dfrac{C}{\cos x}$.

Общее решение дифференциального уравнения $y' - y\,\mathrm{tg}x = \cos x$ будем искать в виде $y(x) = \dfrac{C(x)}{\cos x}$. Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим $\left(\dfrac{C(x)}{\cos x}\right)' - \dfrac{C(x)}{\cos x}\mathrm{tg}x = \cos x$,

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x,$$

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x - C(x)\sin x}{\cos^2 x} = \cos x,$$

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos^2 x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \cos^2 x \,\big|\cdot dx \quad \Rightarrow \quad C'(x)dx = \cos^2 x\,dx \quad \Rightarrow$$

$C(x) = \int \cos^2 x\,dx + c$. Выпишем и найдём отдельно интеграл

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Тогда $y(x) = \dfrac{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c}{\cos x} = \dfrac{x}{2\cos x} + \dfrac{\sin 2x}{4\cos x} + \dfrac{c}{\cos x} =$

$$= \frac{x}{2\cos x} + \frac{2\sin x\cos x}{4\cos x} + \frac{c}{\cos x},$$ следовательно,

$y(x)=\dfrac{x}{2\cos x}+\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{c}{\cos x}$ – общее решение исходного линейного дифференциального уравнения.

5.6 Основные понятия о дифференциальных уравнениях второго порядка

Определение. Дифференциальным уравнение второго порядка называют уравнение вида

$$F(x;\, y;\, y';\, y'')=0, \tag{5.8}$$

где $F(x;\, y;\, y';\, y'')$ – заданная функция, которая определена и непрерывна в области $D\subset\mathbb{R}^4$.

Дифференциальное уравнение второго порядка, записанное в виде

$$y''=f(x;\, y;\, y'), \tag{5.9}$$

называют ***дифференциальным уравнением второго порядка, разрешённым относительно старшей производной***.

Имеет место следующее утверждение, называемое теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения 2-го порядка. Пусть функция $f(x;\, y;\, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по y и y' в окрестности точки $(x_0;\, y_0)$. Тогда дифференциальное уравнение (5.9) в окрестности точки x_0 имеет единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_0'. \end{cases} \tag{5.10}$$

Определение. Задачей Коши для дифференциального уравнения (5.8) называют задачу о поиске решения этого дифференциального уравнения, удовлетворяющего дополнительным условиям (5.10).

Таким образом, задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка может быть записана в виде

$$\begin{cases} F(x;\, y;\, y';\, y'') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases} \tag{5.11}$$

Отметим, что выполнение условий теоремы Коши обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' = f(x;\, y;\, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases} \tag{5.11а}$$

по крайней мере, в окрестности точки x_0.

Замечание. Дополнительные условия (5.10) в приведенных задачах Коши называют также ***начальными условиями***, как и в случае задачи Коши для уравнения первого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной (5.11а)

$$\begin{cases} y'' = f(x;\, y;\, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Известно, что значение производной $y'(x_0) = y_0'$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y(x)$, которая является решением дифференциального уравнения. Это означает, что в каждой точке $(x_0;\, y_0)$ определено некоторое направление.

Но, кроме этого, дифференциальное уравнение позволяет находить значения второй производной $y''(x_0) = f(x_0;\, y(x_0);\, y'(x_0)) = f(x_0;\, y_0;\, y_0')$. Это

означает, что для выбора единственной интегральной кривой из множества всех интегральных кривых, проходящих через точку $(x_0; y_0)$, следует задаваться не только направлением касательной, но ещё и кривизной этой интегральной кривой.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ (или $\varphi(x; y) = 0$), являющаяся решением задачи Коши (5.11), называется ***частным решением*** (***частным интегралом***) дифференциального уравнения второго порядка.

Определение. Функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ (или $\varphi(x; y; C_1; C_2) = 0$), зависящая от произвольных постоянных C_1 и C_2, называется ***общим решением*** (***общим интегралом***) дифференциального уравнения второго порядка, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) при любых фиксированных значениях констант C_1 и C_2 функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ (или $\varphi(x; y; C_1; C_2) = 0$) является решением (интегралом) дифференциального уравнения;

2) любое частное решение (частный интеграл) может быть получено из общего выбором констант C_1 и C_2.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ (или $\varphi(x; y) = 0$), называется ***особым решением*** (***особым интегралом***) дифференциального уравнения второго поря, если она является решением, но не является частным решением.

Другими словами, особое решение есть такое решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено ни при каких значениях постоянных C_1 и C_2 из общего решения.

5.7 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим несколько видов дифференциальных уравнений второго порядка, которые легко приводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка, то есть допускают понижение порядка.

5.7.1 Дифференциальное уравнение, не содержащее явно y и y'

Такое дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x),\ x \in (a;b)$. В этом случае уравнение будем решать непосредственным интегрированием.

$$y'' = f(x) \,\big|\cdot dx \quad \Rightarrow \quad y''\,dx = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int y''\,dx = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \,\big|\cdot dx \quad \Rightarrow \quad y'\,dx = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx \quad \Rightarrow$$

$$\int y'\,dx = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 \quad \Rightarrow$$

$y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 5.11. Среди всех интегральных кривых уравнения $y'' = 6x^2$ выделить ту, которая касается в точке, лежащей на оси Ox, прямой $y = -x + 3$.

Решение. Поскольку прямая $y = -x + 3$ является касательной к искомой интегральной кривой в точке, лежащей на оси Ox, то есть при $y = 0$, то координаты точки касания $(3;0)$. Но тогда $y(3) = 0$.

Кроме того, из уравнения касательной $y = -x + 3 \ \Rightarrow \ k_{кас} = -1$, тогда, в силу геометрического смысла производной функции в точке, $y'(3) = -1$.

Таким образом, искомая интегральная кривая удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} y'' = 6x^2, \\ y(3) = 0, \\ y'(3) = -1. \end{cases}$$

Для решения полученной задачи Коши находим сначала общее решение дифференциального уравнения, понижая его порядок.

$$y''=6x^2\ \Big|\cdot dx \quad\Rightarrow\quad y''\,dx=6x^2\,dx \quad\Rightarrow\quad \int y''\,dx=6\int x^2\,dx+C_1,$$

$$y'=2x^3+C_1\ \Big|\cdot dx \quad\Rightarrow\quad y'\,dx=\left(2x^3+C_1\right)dx \quad\Rightarrow$$

$$\int y'\,dx=\int\left(2x^3+C_1\right)dx+C_2,$$

$y=\dfrac{x^4}{2}+C_1x+C_2$ – общее решение данного дифференциального уравнения.

Теперь определим константы, пользуясь начальными условиями (выберем из общего решение подходящее частное).

Имеем:

1) $y(3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=0$ при $x=3$. Подставим эти значения в общее решение $y=\dfrac{x^4}{2}+C_1x+C_2 \quad\Rightarrow\quad 0=\dfrac{3^4}{2}+C_1\cdot 3+C_2 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{81}{2}+3C_1+C_2=0;$

2) $y'(3)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad y'=-1$ при $x=3$. Подставим эти значения в производную общего решения $y'=2x^3+C_1 \quad\Rightarrow\quad -1=2\cdot 3^3+C_1 \quad\Leftrightarrow\quad 54+C_1=-1.$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}3C_1+C_2=-\dfrac{81}{2},\\ C_1=-55,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}3\cdot(-55)+C_2=-\dfrac{81}{2},\\ C_1=-55,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-165+C_2=-\dfrac{81}{2},\\ C_1=-55,\end{cases}$$

$C_1=-55,\ C_2=\dfrac{249}{2}.$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в общее решение и получим уравнение искомой интегральной кривой $y=\dfrac{x^4}{2}-55x+\dfrac{249}{2}.$

5.7.2 Дифференциальное уравнение, не содержащее явно искомую функцию

Такое дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x;\, y';\, y'') = 0. \qquad (5.12)$$

Введем новую переменную $z(x)$, положив $y' = z(x)$ и $y'' = z'(x)$, тогда (5.12) примет вид $F(x;\, z;\, z') = 0$ – это уравнение является уравнением первого порядка.

Предположим, что найден общий интеграл этого уравнения $\omega(x;\, z;\, C_1) = 0$. Вспоминая, что $y' = z(x)$, получаем отсюда $\omega(x;\, y';\, C_1) = 0$. Таким образом, решение дифференциального уравнения (5.12) сведено к решению пары уравнений $F(x;\, z;\, z') = 0$ и $\omega(x;\, y';\, C_1) = 0$ первого порядка.

Пример 5.12. Найти все решения дифференциального уравнения $xy'' = y' - 1$.

Решение. Положим $z = y'$, тогда $z' = (y')' = y''$ и, следовательно, $x\,z' = z - 1$. Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Применяя процедуру разделения переменных, получаем

$x\,z' = z - 1 \,|\cdot dx \;\Rightarrow\; x\,z'\,dx = (z-1)dx$, так как $dz = z'\,dx$, то

$$x\,dz = (z-1)dx \,|:x(z-1) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем почленно полученное уравнение и получим $\int \frac{dz}{z-1} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \;\Rightarrow\; \ln|z-1| = \ln|x| + \ln|C_1|$ (здесь в качестве константы мы выбрали $\ln|C_1|$). Тогда $\ln|z-1| = \ln|C_1 x| \;\Rightarrow\; z - 1 = C_1 x \;\Rightarrow\; z = C_1 x + 1$.

Так как $z = y'$, то получим $y' = 1 + C_1 x$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные и решим уравнение

$y' = 1 + C_1 x \,|\cdot dx \;\Rightarrow\; y'\,dx = (1 + C_1 x)dx$, так как $dy = y'\,dx$, то

$$dy=(1+C_1x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy=\int(1+C_1x)dx+C_2 \quad \Rightarrow \quad y=x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2.$$

При выполнении процедуры разделения переменных мы предполагали, что $z-1\neq 0$. Поэтому случай, когда $z-1=0$, следует рассмотреть отдельно:

$$z-1=0 \quad \Rightarrow \quad z=1 \quad \Rightarrow \quad y'=1 \quad \Rightarrow \quad y=x+C.$$

Нетрудно видеть, что решения $y=x+C$ являются частными, поскольку они могут быть получены из общего решения $y=x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2$, если $C_1=0,\ C_2=C$. Поэтому формула $y=x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2$ исчерпывает все решения рассматриваемого дифференциального уравнения.

Пример 5.13. Решить задачу Коши $\begin{cases} y''-\dfrac{y'}{x}=6x^2, \\ y(1)=3, \\ y'(1)=1. \end{cases}$

Решение. 1. Сначала найдём общее решение дифференциального уравнения $y''-\frac{y'}{x}=6x^2$. В рассматриваемом уравнении отсутствует в явном виде искомая функция y. Сделаем в связи с этим замену $\begin{cases} y'=z, \\ y''=z', \end{cases}$ где $z=z(x)$.

Тогда исходное уравнение примет вид $z'-\frac{z}{x}=6x^2$. Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Выполним подстановку Лагранжа $\begin{cases} z=u\,v, \\ z'=u'\,v+u\,v', \end{cases}$ и получим

$$u'\,v+u\,v'-\frac{u\,v}{x}=6x^2.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части уравнения:

$$u'\,v+\left(u\,v'-\frac{u\,v}{x}\right)=6x^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'\,v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=6x^2.$$

Функцию $v = v(x)$ найдём так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = 6x^2. \end{cases}$$

Функцию $v = v(x)$ найдем из первого уравнения системы:

$v' - \dfrac{v}{x} = 0 \Leftrightarrow v' = \dfrac{v}{x} \Big| \cdot dx \quad \Rightarrow \quad v'dx = \dfrac{v}{x}dx$, так как $dv = v'dx$, то

$dv = \dfrac{v}{x}dx \Big| : v \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем почленно последнее уравнение $\Rightarrow \quad \int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{dx}{x}$, тогда

$\ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x$.

Из второго уравнения системы $u'v = 6x^2$ найдём функцию $u = u(x)$. Так как $v = x$, то $u'x = 6x^2 \Leftrightarrow u' = 6x$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$u' = 6x \Big| \cdot dx \quad \Rightarrow \quad u'dx = 6x\,dx$, так как $du = u'dx$, то $du = 6x\,dx$.

Проинтегрируем обе части полученного уравнения $\int du = 6\int x\,dx + C$, получим $u = 3x^2 + C_1$.

Так как мы делали замену $z = uv$, то $z = \left(3x^2 + C_1\right) \cdot x = 3x^3 + C_1x$ – общее решение дифференциального уравнения $z' - \dfrac{z}{x} = 6x^2$.

Но $y' = z$, тогда получим следующее уравнение: $y' = 3x^3 + C_1x$.

Его можно решить непосредственным интегрированием.

$y' = 3x^3 + C_1x \Big| \cdot dx \quad \Rightarrow \quad y'\,dx = \left(3x^3 + C_1x\right)dx \quad \Rightarrow$

$\int y'\,dx = \int \left(3x^3 + C_1 x\right)dx + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3x^4}{4} + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

2. Теперь при помощи начальных условий определим значения констант C_1 и C_2.

Имеем:

1) $y(1) = 3 \;\Leftrightarrow\; y = 3$ при $x = 1$. Подставим эти значения в общее решение $y = \dfrac{3x^4}{4} + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2 \;\Rightarrow\; 3 = \dfrac{3\cdot 1^4}{4} + \dfrac{C_1 \cdot 1^2}{2} + C_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3}{4} + \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 3;$

2) $y'(1) = 1 \;\Leftrightarrow\; y' = 1$ при $x = 1$. Подставим эти значения в производную общего решения $y' = 3x^3 + C_1 x \;\Rightarrow\; 1 = 3\cdot 1^3 + C_1 \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; 3 + C_1 = 1.$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} + \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 3, \\ 3 + C_1 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{2} + C_2 = 3, \\ C_1 = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{13}{4}, \\ C_1 = -2. \end{cases}$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в общее решение исходного дифференциального уравнения и получим решение задачи Коши:

$$y = \frac{3x^4}{4} - x^2 + \frac{13}{4}.$$

5.7.3 Дифференциальное уравнение, не содержащее явно независимую переменную

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$F(y; y'; y'') = 0. \tag{5.13}$$

Введем новую искомую функцию $y' = z(y)$, рассматривая её как функцию аргумента y. Выразим вторую производную y'' через производную функции $z(y)$ следующим образом:

$$y'' = (y')' = (z(y))' = z'(y)\cdot y' = z\,z'.$$

Тогда уравнению (5.13) можно придать следующую форму:

$$F\left(y;\, z;\, z\,z'\right)=0. \tag{5.14}$$

Предположим, что уравнение (5.14) имеет общий интеграл $\omega\left(y;\, z;\, C_1\right)=0$, тогда

$$\omega\left(y;\, y';\, C_1\right)=0. \tag{5.15}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (5.13) сведено к решению двух уравнений (5.14) и (5.15) первого порядка.

Пример 5.14. Найти общее решение дифференциального уравнения $y\left(1+y^2\right)y''-\left(y^2-1\right)\left(y'\right)^2=0$.

Решение. Уравнение в явном виде не содержит аргумента *x*, поэтому положим $\begin{cases} y'=z, \\ y'=z\,z', \end{cases}$ где $z=z\left(y\right)$. Тогда уравнение приобретает следующий вид: $y\left(1+y^2\right)z\,z'-\left(y^2-1\right)z^2=0 \;\Leftrightarrow\; z\left(y\left(1+y^2\right)z'-\left(y^2-1\right)z\right)=0$.

Полученное уравнение распадается на два уравнения $y\left(1+y^2\right)z'-\left(y^2-1\right)z=0$ и $z=0$. Рассмотрим их поочередно.

1. Уравнение $y\left(1+y^2\right)z'-\left(y^2-1\right)z=0$ является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$y\left(1+y^2\right)z'=\left(y^2-1\right)z \;\Big|\cdot dy \quad\Rightarrow\quad y\left(1+y^2\right)z'\,dy=\left(y^2-1\right)z\,dy,$$

так как $dz=z'\,dy$, то $y\left(1+y^2\right)dz=\left(y^2-1\right)z\,dy \;\Big|: z\,y\left(1+y^2\right) \;\Rightarrow$

$$\frac{y\left(1+y^2\right)dz}{z\,y\left(1+y^2\right)}=\frac{\left(y^2-1\right)z\,dy}{z\,y\left(1+y^2\right)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dz}{z}=\frac{y^2-1}{y\left(1+y^2\right)}dy.$$

Проинтегрируем почленно последнее равенство $\int\frac{dz}{z}=\int\frac{y^2-1}{y\left(1+y^2\right)}dy+C_1$. Выпишем и найдём отдельно каждый интеграл.

1) $\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C$;

2) Для второго интеграла $\int \frac{y^2-1}{y\left(1+y^2\right)}dy$ применим метод интегрирования рациональных дробей.

$$\frac{y^2-1}{y\left(1+y^2\right)} = \frac{A}{y} + \frac{By+D}{1+y^2} \quad \Big| \cdot y\left(1+y^2\right),$$

$$\frac{\left(y^2-1\right)y\left(1+y^2\right)}{y\left(1+y^2\right)} = \frac{A\,y\left(1+y^2\right)}{y} + \frac{(By+D)\,y\left(1+y^2\right)}{1+y^2},$$

$$y^2-1 = A\left(1+y^2\right)+(By+D)\,y \quad \Leftrightarrow \quad y^2-1 = A+Ay^2+By^2+D\,y.$$

В последнем равенстве приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y и найдём коэффициенты A, B и D.

$$\begin{array}{l|l} y^2 & 1 = A+B, \\ y & 0 = D, \\ y^0 & -1 = A, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=1, \\ D=0, \\ A=-1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B=2, \\ D=0, \\ A=-1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y^2-1}{y\left(1+y^2\right)}dy = \int\left(\frac{-1}{y}+\frac{2y}{1+y^2}\right)dy = -\int\frac{dy}{y}+\int\frac{2y\,dy}{1+y^2} = \left\|\begin{matrix} u = 1+y^2 \\ du = 2y dy \end{matrix}\right\| =$$

$$= -\ln|y| + \int\frac{du}{u} = -\ln|y| + \ln|u| + C = -\ln|y| + \ln\left|1+y^2\right| + C = -\ln|y| + \ln\left(1+y^2\right) + C.$$

Вернёмся к уравнению и преобразуем полученный результат.

$$\ln|z| = -\ln|y| + \ln\left(1+y^2\right) + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln\left|\frac{C_1\left(1+y^2\right)}{y}\right| \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C_1\left(1+y^2\right)}{y}.$$

Тогда $y' = \frac{C_1\left(y^2+1\right)}{y}$. Это уравнение также есть уравнение с разделяющимися переменными, поэтому имеем:

$y' = \frac{C_1\left(y^2+1\right)}{y}\Big| \cdot dx \;\Rightarrow\; y'\,dx = \frac{C_1\left(y^2+1\right)}{y}dx$, так как $dy = y'\,dx$, то

$$dy=\frac{C_1\left(y^2+1\right)}{y}dx\ \Big|\cdot\frac{y}{y^2+1}\ \Rightarrow\ \ \frac{y\,dy}{y^2+1}=C_1dx\,.$$

Проинтегрируем почленно последнее равенство $\int\frac{y\,dy}{y^2+1}=C_1\int dx+C_2\,.$

Выпишем и найдём отдельно первый интеграл:

$$\int\frac{y\,dy}{y^2+1}=\left\|\begin{matrix}u=1+y^2\\du=2ydy\\ydy=\frac{1}{2}du\end{matrix}\right\|=\int\frac{\frac{1}{2}du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right)+C\,.$$

А затем вернёмся к нашему уравнению и преобразуем результат:

$$\frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right)=C_1x+C_2\ \Big|\cdot 2\ \Rightarrow\ \ \ln\left(y^2+1\right)=2C_1x+2C_2\ \ \Rightarrow$$

$$y^2+1=e^{2C_1x+2C_2}\ \Rightarrow\ \ y^2=e^{2C_1x}\cdot e^{2C_2}-1\ \ \Rightarrow\ \ \ y=\pm\sqrt{e^{2C_1x}\cdot e^{2C_2}-1}\,.$$

2. Теперь рассмотрим второе из уравнений, на которые распалось рассматриваемое уравнение: $z=0$. Очевидно, что $z=0\Leftrightarrow y'=0\Leftrightarrow y=C$.

Нетрудно видеть, что решения $y=C$ могут быть получены из общего решения $y=\pm\sqrt{e^{2C_1x}\cdot e^{2C_2}-1}$ при $C_1=0,\ C_2\geq 0$. Это означает, что $y=C$ есть семейство частных решений рассматриваемого дифференциального уравнения.

5.7.4 Дифференциальное уравнение, левая часть которого есть точная производная

Пусть теперь левая часть уравнения $F\left(x;\,y;\,y';\,y''\right)=0$ такова, что она является производной некоторой функции $\Phi\left(x;\,y;\,y'\right)$, то есть

$F\left(x;\,y;\,y';\,y''\right)=\left[\Phi\left(x;\,y;\,y'\right)\right]'$, тогда $\left[\Phi\left(x;\,y;\,y'\right)\right]'=0\ \Leftrightarrow\ \Phi\left(x;\,y;\,y'\right)=C_1\,.$

Очевидно, уравнение $\Phi(x;\, y;\, y') = C_1$ является уравнением первого порядка.

Пример 5.15. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(x^2+1\right)y'' + 2xy' - 3x^2 = 0$.

Решение. Нетрудно проверить, что имеет место равенство $\left(x^2+1\right)y'' + 2xy' - 3x^2 = \left(\left(x^2+1\right)y' - x^3\right)'$.

Действительно, $\left(\left(x^2+1\right)y' - x^3\right)' = \left(x^2+1\right)' y' + \left(x^2+1\right)\left(y'\right)' - 3x^2 =$

$= 2x\, y' + \left(x^2+1\right)y'' - 3x^2$.

Это означает, что левая часть рассматриваемого уравнения есть точная производная, поэтому

$$\left(x^2+1\right)y'' + 2xy' - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left(x^2+1\right)y' - x^3\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2+1\right)y' - x^3 = C_1,$$

$\left(x^2+1\right)y' = C_1 + x^3 \;\Big|\cdot dx \;\Rightarrow\; \left(x^2+1\right)y'dx = \left(C_1 + x^3\right)dx$, так как $dy = y'dx$, то

$\left(x^2+1\right)dy = \left(C_1 + x^3\right)dx \;\Big|:\left(x^2+1\right) \;\Rightarrow dy = \dfrac{C_1 + x^3}{x^2+1}dx$. Проинтегрируем обе части последнего уравнения $\int dy = \int \dfrac{C_1 + x^3}{x^2+1}dx + C_2$.

Выпишем и найдём отдельно интеграл, стоящий в правой части:

$$\int \frac{C_1 + x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{C_1}{x^2+1}dx + \int \frac{x^3}{x^2+1}dx = C_1 \int \frac{dx}{x^2+1} + \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= C_1 \operatorname{arctg} x + \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left\| \begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \\ xdx = \dfrac{1}{2}du \end{array} \right\| = C_1 \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} - \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} =$$

$$= C_1 \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|u| + C = C_1 \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C =$$

$$= C_1 \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Здесь в рациональной дроби $\dfrac{x^3}{x^2+1}$ мы выделили целую часть делением уголком:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 & x^2+1 \\ \hline x^3+x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

Теперь вернёмся к нашему уравнению и получим общее решение данного дифференциального уравнения $y = C_1 \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_2$.

5.8 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

5.8.1 Основные понятия

Определение. Дифференциальное уравнение называется ***линейным***, если оно содержит искомую функцию и её производные линейным образом.

В частности, линейное дифференциальное уравнение второго порядка может быть записано в виде

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \qquad (5.16)$$

Если коэффициенты уравнения (5.16) $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ и его правая часть $f(x)$ заданы и непрерывны в интервале $(a;b)$ и $p_0(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$, то уравнение (5.16) удовлетворяет условиям теоремы Коши и поэтому имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$.

Определение. Если $f(x) \equiv 0$ в интервале $(a;b)$, то уравнение (5.16) называется ***однородным***, в противном случае уравнение (5.16) называется ***неоднородным***.

Таким образом, ***линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка*** имеет вид

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \qquad (5.17)$$

Определение. Уравнение (5.17) называется ЛОДУ второго порядка, соответствующим неоднородному уравнению (5.16).

Определение. Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ называется ***линейно независимой*** на отрезке $[a;b]$, если из соотношения $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. При этом функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называют линейно независимыми.

Следующие две теоремы описывают структуру общих решений уравнений (5.16) и (5.17).

Теорема об общем решении ЛОДУ второго порядка. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения (5.17), а C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то функция $y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ есть общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (5.17).

Теорема о структуре общего решения ЛНДУ второго порядка. Если $y_{oo} = y_{oo}(x)$ – общее решение уравнения (5.17), а $\bar{y} = \bar{y}(x)$ – частное решение уравнения (5.16), то функция $y_{общ} = y_{oo} + \bar{y}$ есть общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (5.16).

Наиболее просто общие решения линейных уравнений могут быть описаны для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения (5.16), (5.17) будем называть дифференциальными уравнениями ***с постоянными коэффициентами***, если функции $p_0(x) = p_0$, $p_1(x) = p_1$, $p_2(x) = p_2$ постоянны.

Таким образом, линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \tag{5.18}$$

а соответствующее ему однородное уравнение

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0. \tag{5.19}$$

5.8.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Будем искать решение уравнения (5.19) в виде функции $y = e^{kx}$, где $k = const$. Найдём $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, тогда $p_0 k^2 e^{kx} + p_1 k e^{kx} + p_2 e^{kx} = 0$,

$$e^{kx}\left(p_0 k^2 + p_1 k + p_2\right) = 0 \quad \Big| : e^{kx} \neq 0,$$

$$p_0 k^2 + p_1 k + p_2 = 0. \tag{5.20}$$

Таким образом, линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами (5.19) соответствует квадратное уравнение (5.20), которое будем называть ***характеристическим*** для (5.19).

Оказывается, наличие и вид линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (5.19) определяется характером корней характеристического уравнения (5.20). Точнее говоря, имеют место следующие ситуации:

1) уравнение (5.20) имеет два разных вещественных корня k_1 и k_2 $\left(\text{при } D = p_1^2 - 4p_0 p_2 > 0\right)$, тогда функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$ являются линейно независимыми решениями уравнения (5.19);

2) уравнение (5.20) имеет кратный вещественный корень $k_1 = k_2 = k$ $\left(\text{при } D = p_1^2 - 4p_0 p_2 = 0\right)$, тогда функции e^{kx} и xe^{kx} являются линейно независимыми решениями уравнения (5.19);

3) уравнение (5.20) имеет комплексно сопряжённые корни $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ $\left(\text{при } D=p_1^2-4p_0p_2<0\right)$, тогда функции $e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $e^{\alpha x}\cos\beta x$ являются линейно независимыми решениями уравнения (5.19).

Учитывая вышеизложенное, из теоремы об общем решении ЛОДУ второго порядка вытекает следующее утверждение.

Теорема об общем решении ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Для дифференциального уравнения (5.19) возможны следующие ситуации:

1) если $D=p_1^2-4p_0p_2>0$, то общее решение уравнения (5.19) имеет вид $y_{oo}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, где k_1, k_2 – корни характеристического уравнения (5.20);

2) если $D=p_1^2-4p_0p_2=0$, то общее решение уравнения (5.19) имеет вид $y_{oo}=\left(C_1+C_2x\right)e^{kx}$, где k – корень характеристического уравнения (5.20);

3) если $D=p_1^2-4p_0p_2<0$, то общее решение уравнения (5.19) имеет вид $y_{oo}=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right)$, где $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ – комплексно сопряжённые корни характеристического уравнения (5.20).

Пример 5.16. Найти общее решение дифференциального уравнения $3y''+y'-4y=0$.

Решение. Данное уравнение является ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим для него характеристическое уравнение $3k^2+k-4=0$ и найдём его корни.

Поскольку $D=p_1^2-4p_0p_2=1^2-4\cdot3\cdot\left(-4\right)=49>0$, то характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня:

$$k_1=\frac{-1-\sqrt{49}}{6}=-\frac{4}{3};\quad k_2=\frac{-1+\sqrt{49}}{6}=1.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

$\Rightarrow \quad y_{oo} = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{x}$.

Пример 5.17. Решить задачу Коши $\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

Решение. 1. Сначала найдём общее решение дифференциального уравнения $4y'' - 4y' + y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид $4k^2 - 4k + 1 = 0$.

Дискриминант этого уравнения $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$, поэтому характеристическое уравнение имеет кратный корень $k_1 = k_2 = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} = k$.

Тогда общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид $y_{oo} = (C_1 + C_2 x) e^{k x} \quad \Rightarrow \quad y_{oo} = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{2}x}$.

2. Теперь при помощи начальных условий определим значения констант C_1 и C_2.

Имеем:

1) $y(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1$ при $x = 0$. Подставим эти значения в общее решение $y_{oo} = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{2}x} \quad \Rightarrow \quad -1 = (C_1 + C_2 \cdot 0) e^{0} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -1$;

2) $y'(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = 2$ при $x = 0$. Подставим эти значения в производную общего решения, которую сначала найдём:

$$y'_{oo} = \left((C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{2}x} \right)' = (C_1 + C_2 x)' e^{\frac{1}{2}x} + (C_1 + C_2 x) \left(e^{\frac{1}{2}x} \right)' = C_2 e^{\frac{1}{2}x} +$$

$$+ (C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \left(C_2 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 x \right) e^{\frac{1}{2}x}.$$

Тогда $2=\left(C_2+\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2\cdot 0\right)e^0 \Leftrightarrow C_2+\frac{1}{2}C_1=2$, а так как $C_1=-1$, то

$C_2-\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow C_2=\frac{5}{2}$.

Подставим в y_{oo} найденные значения C_1 и C_2, и получим искомое решение задачи Коши, то есть частное решение: $y_ч=\left(-1+\frac{5}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}$.

Пример 5.18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Решение. Характеристическое уравнения для данного уравнения имеет вид $k^2+4k+13=0$. Дискриминант этого уравнения

$$D=4^2-4\cdot 1\cdot 13=-36<0 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{-36}=\sqrt{36\cdot(-1)}=\sqrt{36\cdot i^2}=6i.$$

Тогда корни характеристического уравнения $k_{1,2}=\frac{-4\pm 6i}{2}=-2\pm 3i$.

Значит, мы имеем 3-й случай теоремы об общем решении ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Тогда искомое общее решение $y_{oo}=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right)$, где $\alpha=-2$, $\beta=3 \Rightarrow$

$y_{oo}=e^{-2x}\left(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x\right)$.

Пример 5.19. Решить уравнение $y''+9y'=0$.

Решение. Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2+9k=0 \Leftrightarrow k(k+9)=0 \Leftrightarrow k_1=0,\ k_2=-9$.

Так как корни вещественные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$y_{oo}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \Rightarrow y_{oo}=C_1e^0+C_2e^{-9x}$ или $y_{oo}=C_1+C_2e^{-9x}$.

5.8.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение (5.18) второго порядка с постоянными коэффициентами $p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, для нахождения общего решения этого уравнения достаточно найти общее решение однородного дифференциального уравнения (5.19) и некоторое частное решение уравнения (5.18), то есть $y_{общ} = y_{оо} + \overline{y}$. В связи с этим актуальной является задача построения частных решений для некоторых специальных классов правых частей.

Определение. Назовем стандартными правыми частями ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами все функции из множества $\left\{P(x)e^{ax},\ e^{ax}\left(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx\right)\right\}$, где a, b – вещественные числа, $P(x), Q(x)$ – многочлены.

Для построения частного решения уравнения (5.18) со стандартной правой частью может быть использован следующий алгоритм:

1) построить общее решение $y_{оо} = y_{оо}(x)$ однородного уравнения, соответствующего уравнению (5.18);

2) записать предполагаемую форму частного решения $\overline{y}(x)$ в том же виде, в котором записана правая часть уравнения (5.18), но с неопределенными коэффициентами;

3) уточнить выражение для $\overline{y}(x)$, сравнив его с $y_{оо}(x)$. Если в этих выражениях нет линейно зависимых (подобных) слагаемых, то для $\overline{y}(x)$ определена форма и в этом случае следует перейти к пункту 4). Если линейно зависимые (подобные) слагаемые имеются, то нужно заменить предполагаемое выражение $\overline{y}(x)$ на $x \cdot \overline{y}(x)$ и снова сравнить с $y_{оо}(x)$. Процесс определения

формы записи $\bar{y}(x)$ заканчивается, как только в выражениях для $\bar{y}(x)$ и $y_{oo}(x)$ исчезнут подобные слагаемые;

4) определить коэффициенты в выражении $\bar{y}(x)$, подставив его в уравнение.

Пример 5.20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=3x^2-4x+2$.

Решение. По теореме о структуре общего решения ЛНДУ второго порядка общее решение $y_{общ}=y_{oo}+\bar{y}$.

1. Найдём y_{oo} – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-3y'+2y=0$ (подробное решение разобрано в примере 5.16).

$k^2-3k+2=0;$

$k_1=1,\ k_2=2.$

Так как корни действительные и $k_1\neq k_2$, то общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{oo}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \Rightarrow y_{oo}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

2. Найдём $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Правая часть рассматриваемого уравнения $f(x)=3x^2-4x+2$ является стандартной – многочлен второй степени, поэтому предполагаемая форма записи частного решения имеет вид $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$.

Для уточнения, сравним это выражение с $y_{oo}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$. Поскольку подобные слагаемые отсутствуют, то частное решение уравнения следует искать в форме $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$.

Чтобы определить неизвестные пока коэффициенты A, B, C, воспользуемся приёмом, который будем называть ***методом неопределённых коэффициентов***. Подставим $\bar{y}$ в уравнение. Для этого найдём сначала производные для $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$.

$$\bar{y}' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B;$$

$$\bar{y}'' = \left(2Ax + B\right)' = 2A.$$

Тогда $2A - 3\left(2Ax + B\right) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 3x^2 - 4x + 2,$

$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 3x^2 - 4x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\left|\begin{array}{ll} x^2 & 2A = 3 \qquad (1) \\ x & -6A + 2B = -4 \qquad (2) \\ x^0 & 2A - 3B + 2C = 2 \quad (3) \end{array}\right.$$

$$(1) \to A = \frac{3}{2};$$

$$(2) \to -6 \cdot \frac{3}{2} + 2B = -4 \to -9 + 2B = -4 \to 2B = 5 \to B = \frac{5}{2};$$

$$(3) \to 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} + 2C = 2 \to 3 - \frac{15}{2} + 2C = 2 \to 2C = \frac{13}{2} \to C = \frac{13}{4}.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид $\bar{y} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}.$

А так как $y_{общ} = y_{оо} + \bar{y}$, то общее решение исходного уравнения

$y'' - 3y' + 2y = 3x^2 - 4x + 2$ имеет вид $y_{общ} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}.$

Следует обратить внимание на то, что метод неопределённых коэффициентов будем применять для определения коэффициентов частного решения ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами со стандартной правой частью.

Пример 5.21. Решить уравнение $y''+3y'-10y=24e^{3x}$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение находим по формуле $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$.

1. Найдём $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+3y'-10y=0$ (подробное решение разобрано в примере 5.16).

$k^2+3k-10=0$;

$k_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\dfrac{-3\pm7}{2}$;

$k_1=-5,\ k_2=2$.

Так как корни действительные и $k_1\neq k_2$, то общее решение имеет вид

$y_{оо}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}\ \Rightarrow\ y_{оо}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}$.

2. Найдём $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Так как правая часть исходного уравнения $f(x)=24e^{3x}$ является стандартной, то предполагаемая форма записи частного решения имеет вид $\bar{y}=Ae^{3x}$. Для уточнения, сравним это выражение с $y_{оо}=C_1e^{-5x}+C_2\ e^{2x}$. Поскольку подобные слагаемые отсутствуют, то частное решение уравнения следует искать в форме $\bar{y}=Ae^{3x}$.

Так как $\bar{y}$ – решение данного уравнения, то для нахождения коэффициента A нужно функцию $\bar{y}$ подставить в исходное уравнение. Для этого найдём производные $\bar{y}=Ae^{3x}$:

$\bar{y}'=\left(Ae^{3x}\right)'=3Ae^{3x}$,

$\bar{y}''=\left(3Ae^{3x}\right)'=9Ae^{3x}$.

Тогда $9Ae^{3x}+3\cdot 3Ae^{3x}-10\cdot Ae^{3x}=24e^{3x}$,

$8Ae^{3x}=24e^{3x} \quad \big| : e^{3x}\neq 0$,

$8A=24$,

$A=3$.

Тогда $\bar{y}=3e^{3x}$. Так как $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$, то

$y_{общ}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+3e^{3x}$ – искомое общее решение.

Пример 5.22. Найти общее решение уравнения $y''-y'-2y=e^{2x}$.

Решение. Общее решение находим по формуле $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$.

1. Найдём $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-y'-2y=0$ (подробное решение разобрано в примере 5.16).

$k^2-k-2=0$,

$k_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$.

$k_1=2$, $k_2=-1$.

Так как корни действительные и $k_1\neq k_2$, то общее решение имеет вид

$y_{оо}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \;\Rightarrow\; y_{оо}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

2. Найдём $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Так как правая часть исходного уравнения $f(x)=e^{2x}$ является стандартной, то предполагаемая форма записи частного решения имеет вид $\bar{y}=Ae^{2x}$. Для уточнения, сравним это выражение с $y_{оо}=C_1e^{-5x}+C_2\ e^{2x}$: они имеют подобные слагаемые C_1e^{2x} и Ae^{2x}. Тогда частное решение уравнения следует искать в форме $\bar{y}=x\cdot Ae^{2x}=Axe^{2x}$. Полученное выражение не имеет подобных слагаемых с $y_{оо}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}$. Поэтому оставим $\bar{y}=Axe^{2x}$, где A – неизвестный коэффициент.

Чтобы найти A, нужно функцию $\bar{y}$ подставить в исходное уравнение. Для этого найдём производные $\bar{y} = Axe^{2x}$:

$$\bar{y}' = \left(Axe^{2x}\right)' = (Ax)'e^{2x} + Ax\left(e^{2x}\right)' = Ae^{2x} + Ax2e^{2x} = e^{2x}(A + 2Ax),$$

$$\bar{y}'' = \left(e^{2x}(A + 2Ax)\right)' = \left(e^{2x}\right)'(A + 2Ax) + e^{2x}(A + 2Ax)'$$

$$= 2e^{2x}(A + 2Ax) + Ae^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(2A + 4Ax + 2A) = e^{2x}(4A + 4Ax).$$

Тогда:

$$e^{2x}(4A + 4Ax) - e^{2x}(A + 2Ax) - 2Axe^{2x} = e^{2x} \quad \left| : e^{2x} \neq 0, \right.$$

$$4A + 4Ax - A - 2Ax - 2Ax = 1,$$

$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$. Значит, $\bar{y} = \frac{1}{3}xe^{2x}$. Так как $y_{общ} = y_{оо} + \bar{y}$, то

$y_{общ} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$ – общее решение.

Пример 5.23. Найти общее решение уравнения $y'' - 10y' + 25y = 15e^{5x}$.

Решение. Общее решение находим по формуле $y_{общ} = y_{оо} + \bar{y}$.

1. Найдём $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$.

$$k^2 - 10k + 25 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Так как корни действительные и $k_1 = k_2 = 5 = k$, то общее решение имеет вид $y_{оо} = (C_1 + C_2x)e^{kx} \Rightarrow y_{оо} = (C_1 + C_2x)e^{5x}$.

2. Найдём $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Так как правая часть исходного уравнения $f(x) = 15e^{5x}$ является стандартной, то предполагаемая форма записи частного решения имеет вид $\bar{y} = Ae^{5x}$.

Для уточнения, сравним это выражение с $y_{oo}=(C_1+C_2x)e^{5x}=$ $=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$: они имеют подобные слагаемые C_1e^{5x} и Ae^{5x}. Тогда частное решение уравнения следует искать в форме $\bar{y}=x\cdot Ae^{5x}=Axe^{5x}$. Полученное выражение также имеет подобные слагаемые $\left(Axe^{5x}\right.$ и $\left.C_2xe^{5x}\right)$ с $y_{oo}=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$. Поэтому снова $\bar{y}=Axe^{5x}$ домножим на x и получим $\bar{y}=Ax^2e^{5x}$.

Чтобы найти неопределённый коэффициент *A*, нужно функцию $\bar{y}$ подставить в исходное уравнение. Для этого найдём производные $\bar{y}=Ax^2e^{5x}$:

$$\bar{y}'=\left(Ax^2e^{5x}\right)'=\left(Ax^2\right)'e^{5x}+Ax^2\left(e^{5x}\right)'=2Axe^{5x}+Ax^2\,5e^{5x}=$$
$$=e^{5x}\left(2Ax+5Ax^2\right),$$
$$\bar{y}''=\left(e^{5x}\left(2Ax+5Ax^2\right)\right)'=\left(e^{5x}\right)'\left(2Ax+5Ax^2\right)+e^{5x}\left(2Ax+5Ax^2\right)'=$$
$$=5e^{5x}\left(2Ax+5Ax^2\right)+e^{5x}(2A+10Ax)=e^{5x}\left(10Ax+25Ax^2+2A+10Ax\right)=$$
$$=e^{5x}\left(2A+20Ax+25Ax^2\right).\quad\text{Тогда}$$

$$e^{5x}\left(2A+20Ax+25Ax^2\right)-10e^{5x}\left(2Ax+5Ax^2\right)+25Ax^2e^{5x}=15e^{5x}\ \Big|:e^{5x}\neq 0,$$

$$2A+20Ax+25Ax^2-20Ax-50Ax^2+25Ax^2=15,$$

$$2A=15\ \Rightarrow\ A=\frac{15}{2}.$$

Следовательно, $\bar{y}=\frac{15}{2}x^2e^{5x}$. Так как $y_{общ}=y_{oo}+\bar{y}$, то

$y_{общ}=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}+\frac{15}{2}x^2e^{5x}$ – общее решение.

Пример 5.24. Найти частное решение уравнения $y''-7y'=7x^2+12x+19$, удовлетворяющее условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

Решение. 1. Общее решение находим по формуле $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$.

1.1. Найдём $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-7y'=0$ (подробное решение разобрано в примере 5.19).

$k^2-7k=0 \ \Leftrightarrow \ k_1=0,\ k_2=7$.

Так как корни действительные и $k_1\neq k_2$, то общее решение имеет вид

$y_{оо}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \ \Rightarrow \ y_{оо}=C_1e^0+C_2e^{7x}$ или $y_{оо}=C_1+C_2e^{7x}$.

1.2. Найдём $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Так как правая часть уравнения $f(x)=7x^2+12x+19$ является стандартной, то предполагаемая форма записи частного решения имеет вид $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$. Для уточнения, сравним это выражение с $y_{оо}=C_1+C_2e^{7x}$. Поскольку C и C_1 – подобные слагаемые, то частное решение уравнения следует искать в форме $\bar{y}=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx$. Полученное выражение не имеет подобных слагаемых с $y_{оо}$, поэтому $\bar{y}=Ax^3+Bx^2+Cx$, где A, B и C – неизвестные коэффициенты.

Чтобы найти A, B и C, нужно функцию $\bar{y}$ подставить в исходное уравнение. Для этого найдём производные $\bar{y}=Ax^3+Bx^2+Cx$:

$\bar{y}'=\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)'=3Ax^2+2Bx+C$;

$\bar{y}''=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)'=6Ax+2B$.

Тогда $6Ax+2B-7\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=7x^2+12x+19$,

$6Ax+2B-21Ax^2-14Bx-7C=7x^2+12x+19$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & -21A=7 & (1) \\ x & 6A-14B=12 & (2) \\ x^0 & 2B-7C=19 & (3) \end{array}$$

$$(1)\to A=\frac{7}{-21}=-\frac{1}{3};$$

$$(2)\to 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-14B=12\to -2-14B=12\to -14B=14\to B=-1;$$

$$(3)\to 2\cdot(-1)-7C=19\to -2-7C=19\to -7C=21\to C=-3.$$

Тогда искомое частное решение будет $\bar{y}=-\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

А так как $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$, то общее решение исходного уравнения $y''-3y'+2y=3x^2-4x+2$ имеет вид $y_{общ}=C_1+C_2e^{7x}-\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

2. Найдём частное решение исходного уравнения при заданных начальных условиях.

Так как $y(0)=1$ и $y_{общ}=C_1+C_2e^{7x}-\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$, то

$$1=C_1+C_2e^0-\frac{1}{3}\cdot 0-0-3\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad C_1+C_2=1.$$

Так как $y'(0)=0$ и $y'=7C_2e^{7x}-x^2-2x-3$, то

$$0=7C_2e^0-0-2\cdot 0-3 \;\Rightarrow\; 7C_2-3=0.$$

Получим систему уравнений.

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ 7C_2-3=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+\frac{3}{7}=1, \\ C_2=\frac{3}{7}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\frac{4}{7}, \\ C_2=\frac{3}{7}. \end{cases}$$

Тогда искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y_ч=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}e^{7x}-\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

Пример 5.25. Найти общее решение уравнения $y''+6y'+9y=8\sin 5x$.

Решение. Общее решение уравнения находим по формуле $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$.

1. $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+6y'+9y=0$ (подробное решение разобрано в примере 5.17).

$k^2+6k+9=0$;

$$k_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{-6}{2}=-3.$$

Так как корни действительные и $k_1=k_2=-3=k$, то общее решение имеет вид $y_{оо}=(C_1+C_2x)e^{kx} \Rightarrow y_{оо}=(C_1+C_2x)e^{-3x}$.

2. Найдём $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Так как правая часть уравнения $f(x)=8\sin 5x$ является стандартной, то предполагаемая форма записи частного решения имеет вид $\bar{y}=A\sin 5x+B\cos 5x$. Для уточнения, сравним это выражение с $y_{оо}=(C_1+C_2x)e^{-3x}$. Поскольку подобных слагаемых нет, то $\bar{y}=A\sin 5x+B\cos 5x$.

Определим значения неизвестных коэффициентов A и B. Для этого найдём производные функции $\bar{y}=A\sin 5x+B\cos 5x$ и подставим их в уравнение.

$\bar{y}'=(A\sin 5x+B\cos 5x)'=5A\cos 5x-5B\sin 5x$,

$\bar{y}''=(5A\cos 5x-5B\sin 5x)'=-25A\sin 5x-25B\cos 5x$. Тогда

$-25A\sin 5x-25B\cos 5x+6(5A\cos 5x-5B\sin 5x)+9(A\sin 5x+B\cos 5x)=8\sin 5x$,

$-25A\sin 5x-25B\cos 5x+30A\cos 5x-30B\sin 5x+9A\sin 5x+9B\cos 5x=8\sin 5x$.

Приравняем коэффициенты при $\sin 5x$ и $\cos 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \sin 5x & -25A-30B+9A=8 \\ \cos 5x & -25B+30A+9B=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -16A-30B=8 \,|:(-2) \\ 30A-16B=0 \,|:2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8A+15B=-4, \quad (1) \\ 15A-8B=0. \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \to 8B=15A \to B=\frac{15}{8}A;$$

$$(1) \to 8A+15\cdot\frac{15}{8}A=-4 \to 8A+\frac{225}{8}A=-4 \to \frac{289}{8}A=-4 \to A=-\frac{32}{289};$$

$$\Rightarrow B=\frac{15}{8}\cdot\left(-\frac{32}{289}\right)=-\frac{60}{289}.$$

Тогда $\bar{y}=-\frac{32}{289}\sin 5x-\frac{60}{289}\cos 5x$. Так как $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$, то

$y_{общ}=(C_1+C_2x)e^{-3x}-\frac{32}{289}\sin 5x-\frac{60}{289}\cos 5x$ – общее решение.

Несколько расширить набор правых частей, для которых можно строить частные решения уравнения (5.18), позволяет следующее утверждение, называемое теоремой о наложении решений.

Теорема о наложении решений. Пусть правая часть уравнения $p_0y''+p_1y'+p_2y=f(x)$ представима в виде $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_m(x)$. Тогда, если $\bar{y}_k=\bar{y}_k(x)$ есть решение дифференциального уравнения $p_0y''+p_1y'+p_2y=f_k(x)$ при $k=1, 2 \ldots m$, то функция $\bar{y}=\bar{y}_1(x)+$ $+\bar{y}_2(x)+\ldots+\bar{y}_m(x)$ является решением дифференциального уравнения $p_0y''+p_1y'+p_2y=f(x)$.

Замечание. Если правая часть $f(x)$ есть сумма стандартных правых частей, то каждое из частных решений $\bar{y}_k=\bar{y}_k(x)$ может быть найдено описанным выше в примере 5.20 методом неопределенных коэффициентов. Отметим, что при этом форму каждого из этих решений следует уточнять индивидуально.

Пример 5.26. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+4y=2x+1+2e^{-2x}+3\sin 2x$.

Решение. Общее решение уравнения находим по формуле $y_{общ}=y_{оо}+\bar{y}$.

1. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному $y''+4y'+4y=0$ (подробное решение в примере 5.17).

Характеристическое уравнение $k^2+4k+4=0$ имеет кратный вещественный корень $k=-2$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{оо}=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

2. Найдем частное решение $\bar{y}$.

Правая часть $f(x)=2x+1+2e^{-2x}+3\sin 2x$ представляет собой сумму трех стандартных функций $f_1(x)=2x+1$, $f_2(x)=2e^{-2x}$, $f_3(x)=3\sin 2x$, поэтому в силу теоремы о наложении решений $\bar{y}=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)+\bar{y}_3(x)$. Запишем предполагаемое частное решение в форме, рекомендуемой выше:

$\bar{y}=Ax+B+Ce^{-2x}+D\sin 2x+E\cos 2x$.

При этом каждую группу слагаемых $Ax+B$, Ce^{-2x}, $D\sin 2x+E\cos 2x$ следует уточнить индивидуально. Сравнивая эти выражения с общим решением однородного уравнения $y_{оо}=(C_1+C_2x)e^{-2x}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$, заключаем, что среди слагаемых $Ax+B$, $D\sin 2x+E\cos 2x$ нет подобных для C_1e^{-2x} и C_2xe^{-2x}. Поэтому эти слагаемые оставим в той же форме. Если же сравнивать C_1e^{-2x} и C_2xe^{-2x} с Ce^{-2x}, то ясно, что до исчезновения подобных слагаемых следует это выражение дважды умножить на x. Таким образом, Ce^{-2x} следует заменить на Cx^2e^{-2x}.

Итак, частное решение дифференциального уравнения $y''+4y'+4y=2x+1+2e^{-2x}+3\sin 2x$ следует искать в виде $\bar{y}=Ax+B+Cx^2e^{-2x}+D\sin 2x+E\cos 2x$.

Для определения неизвестных A, B, C, D, E воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Подставим выражение $\bar{y}$ в уравнение и приравняем коэффициенты при независимых функциях. Имеем:

$$\bar{y}=Ax+B+Cx^2e^{-2x}+D\sin 2x+E\cos 2x,$$

$$\bar{y}'=\left(Ax+B+Cx^2e^{-2x}+D\sin 2x+E\cos 2x\right)'=$$

$$=A+2Cxe^{-2x}-2Cx^2e^{-2x}+2D\cos 2x-2E\sin 2x=$$

$$=A+e^{-2x}\left(2Cx-2Cx^2\right)+2D\cos 2x-2E\sin 2x,$$

$$\bar{y}''=\left(A+e^{-2x}\left(2Cx-2Cx^2\right)+2D\cos 2x-2E\sin 2x\right)'=$$

$$=-2e^{-2x}\left(2Cx-2Cx^2\right)+e^{-2x}\left(2C-4Cx\right)-4D\sin 2x-4E\cos 2x=$$

$$=e^{-2x}\left(-4Cx+4Cx^2+2C-4Cx\right)-4D\sin 2x-4E\cos 2x=$$

$$=e^{-2x}\left(2C-8Cx+4Cx^2\right)-4D\sin 2x-4E\cos 2x.$$

Поэтому

$$e^{-2x}\left(2C-8Cx+4Cx^2\right)-4D\sin 2x-4E\cos 2x+$$
$$+4\left(A+e^{-2x}\left(2Cx-2Cx^2\right)+2D\cos 2x-2E\sin 2x\right)+$$
$$+4\left(Ax+B+Cx^2e^{-2x}+D\sin 2x+E\cos 2x\right)=2x+1+2e^{-2x}+3\sin 2x,$$

$$e^{-2x}\left(2C-8Cx+4Cx^2+8Cx-8Cx^2+4Cx^2\right)-4D\sin 2x-4E\cos 2x+$$
$$+4A+8D\cos 2x-8E\sin 2x+4Ax+4B+4D\sin 2x+4E\cos 2x=$$
$$=2x+1+2e^{-2x}+3\sin 2x.$$

$$2Ce^{-2x}+4A+8D\cos 2x-8E\sin 2x+4Ax+4B=2x+1+2e^{-2x}+3\sin 2x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{array}{c|l} x & 4A = 2, \\ x^0 & 4A + 4B = 1, \\ e^{-2x} & 2C = 2, \\ \sin 2x & -8E = 3, \\ \cos 2x & 8D = 0. \end{array}$$

Следовательно, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 1$, $E = -\frac{3}{8}$, $D = 0$.

Таким образом, $\bar{y} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + x^2 e^{-2x} - \frac{3}{8}\cos 2x.$ Окончательно, общее решение исходного уравнения $y_{общ} = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + x^2 e^{-2x} - \frac{3}{8}\cos 2x.$

5.9 Моделирование механических и электродинамических процессов

Пример 5.27. Материальная точка (груз) массы m, подвешенная к концу пружины, движется по вертикальной прямой. Требуется определить закон движения груза.

Решение. Примем, что в положении равновесия вес груза уравновешивается упругой силой пружины. Поместим начало координат в положение равновесия груза, а ось Oy направим вертикально вниз по прямой, вдоль которой движется груз. Положение груза в произвольный момент времени t определяется отклонением y груза от начала координат (рисунок 5.1). Для нахождения закона движения груза определим зависимость отклонения y от времени t, то есть функцию $y = y(t)$.

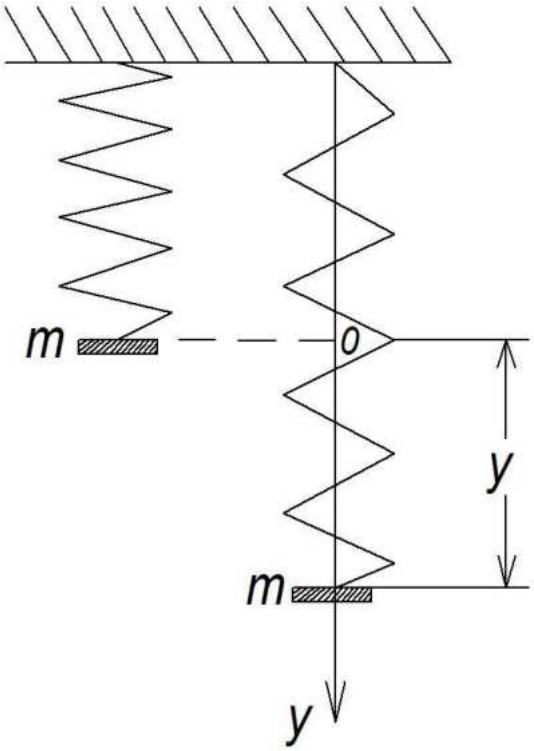


Рисунок 5.1 – Материальная точка массы m,
подвешенная к концу пружины

На груз действуют следующие силы.

1. Восстанавливающая сила $\overline{F_1}$, стремящаяся вернуть груз в начальное положение. Сила $\overline{F_1}$ направлена вдоль оси Oy, и её проекция на эту ось пропорциональна отклонению груза от положения равновесия $F_{1y} = -ky$.

Число k называется коэффициентом восстановления $(k > 0)$. Знак «минус» в выражении проекции силы F_{1y} указывает на то, что восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную деформации пружины.

2. Сила сопротивления $\overline{F_2}$ среды, в которой находится пружина с грузом, направлена противоположно вектору скорости $\bar{v}$ движения груза. Величина силы $\overline{F_2}$ пропорциональна величине скорости $\bar{v}$ груза. Поэтому проекция силы $\overline{F_2}$ на ось Oy запишется в виде $F_{2y} = -\lambda v_y$ $(\text{где } \lambda > 0)$.

Силу веса груза мы не учитываем, так как она уравновешивается упругой силой пружины, а весом самой пружины пренебрегаем.

Для определения дифференциального уравнения движения груза воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}, \tag{5.21}$$

где $\bar{a}$ – вектор ускорения, $\sum \bar{F}$ – сумма сил, действующих на материальную точку.

В нашем случае на материальную точку (груз) действуют две силы $\bar{F_1}$ и $\bar{F_2}$, направленные вдоль оси Oy, то есть $\sum \bar{F} = \bar{F_1} + \bar{F_2}$.

Проецируя векторы, стоящие в обеих частях равенства (5.21), на ось Oy и учитывая механический смысл производных первого и второго порядка, имеем, что проекция вектора скорости $\bar{v}$ на ось Oy есть первая производная, а проекция вектора ускорения $\bar{a}$ на ось Oy есть вторая производная функции отклонения $y = y(t)$, то есть $\bar{v}_y = y'$ $\bar{a}_y = y''$. Получаем искомое дифференциальное уравнение

$$my'' = -k\,y - \lambda\,y'$$

или

$$my'' + \lambda\,y' + k\,y = 0. \tag{5.22}$$

Уравнение (5.22) является уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и называется ***уравнением свободных колебаний***.

Если на груз, кроме того, действует внешняя возмущающая сила, направленная вдоль оси Oy, величина которой $F(t)$ есть заданная функция времени t, то уравнение (5.22) принимает вид

$$my'' + \lambda\,y' + k\,y = F(t) \tag{5.23}$$

и называется ***уравнением вынужденных колебаний***.

Разделив обе части уравнения (5.23) на m и введя обозначения

$$\frac{\lambda}{m} = 2b,\ \frac{k}{m} = \omega^2,\ \frac{F(t)}{m} = f(t),$$

получим уравнение вынужденных колебаний в следующем виде:

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = f(t). \tag{5.24}$$

Уравнение (5.24) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения.

1. Пусть отсутствуют сопротивление среды $(b = 0)$ и внешняя возмущающая сила $(f(t) = 0)$. В этом случае уравнение (5.24) примет вид:

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{5.25}$$

Уравнение (5.25) является уравнением свободных колебаний груза при отсутствии сопротивления среды. Его характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_1 = +\omega i,\ k_2 = -\omega i$, тогда общее решение уравнения (5.25) запишется в виде

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \tag{5.26}$$

Введём вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 новые произвольные постоянные $N = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{C_1}{C_2}$. Отсюда $C_1 = N\sin\varphi$, $C_2 = N\cos\varphi$.

Подставляя выражения C_1 и C_2 в равенство (5.26), получим

$$y = N\sin\varphi\cos\omega t + N\cos\varphi\sin\omega t = N\sin(\omega t + \varphi).$$

Итак, общее решение уравнения (5.25) можно представить в виде

$$y = N\sin(\omega t + \varphi). \tag{5.27}$$

Формула (5.27) показывает, что груз совершает прямое периодическое движение, которое называется ***гармоническим колебанием***. Период колебания $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Величина ω называется ***собственной частотой*** колебаний. Величина N представляет собой наибольшее отклонение груза от положения равновесия и называется ***амплитудой*** колебания; φ называется ***начальной фазой***.

2. Имеется сопротивление среды $(b \neq 0)$, но отсутствует возмущающая сила $(f(t) = 0)$. В этом случае уравнение (5.24) имеет вид:

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0. \qquad (5.28)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 2bk + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$.

Рассмотрим наиболее интересный случай малого сопротивления, когда $b < \omega \Rightarrow b^2 - \omega^2 < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - \omega^2} = \sqrt{-1\left(\omega^2 - b^2\right)} = i\sqrt{\omega^2 - b^2}$. То есть корни характеристического уравнения будут комплексными $k_{1,2} = -b \pm \tilde{\omega} i,$ где $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2}$. Тогда общее решение уравнения (5.28) имеет вид

$$y = e^{-bt}\left(C_1 \cos\tilde{\omega}t + C_2 \sin\tilde{\omega}t\right) = Ne^{-bt}\sin\left(\tilde{\omega}t + \varphi\right), \qquad (5.29)$$

где $C_1 = N\sin\varphi, \quad C_2 = N\cos\varphi.$

Из (5.29) видно, что груз будет совершать колебания, амплитуда которых Ne^{-bt} стремится к нулю при $t \to \infty$. Такие колебания называются ***затухающими колебаниями***.

В случае $b > \omega$ корни характеристического уравнения будут $t_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$ – действительны и различны, а общее решение уравнения (5.28) имеет вид

$$y = C_1 e^{\left(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2}\right)t}.$$

В этом случае груз, не совершая колебаний, приближается к положению равновесия (при $t \to \infty,\ y \to 0$). Это же обстоятельство имеет место при $b = \omega$.

3. Пусть теперь сопротивление среды отсутствует $(b = 0)$, но на груз действует внешняя периодическая возмущающая сила $f(t) = a\sin\mu t$. В этом случае уравнение (5.24) примет вид

$$y'' + \omega^2 y = a\sin\mu t \quad . \tag{5.30}$$

Общее решение этого уравнения $y_{общ} = y_{оо} + \bar{y}$ есть сумма частного решения $\bar{y}$ неоднородного уравнения (5.30) и общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения (5.25) $y'' + \omega^2 y = 0$.

Общее решение уравнения (5.25) мы нашли выше в виде $y_{оо} = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, а затем преобразовали к формуле (5.27) $y_{оо} = N\sin(\omega t + \varphi)$.

Найдём теперь частное решение уравнения (5.30). Так как правая часть уравнения $f(t) = a\sin\mu t$, то $\bar{y} = A\sin\mu t + B\cos\mu t$. Для уточнения формы $\bar{y}$ сравним его с $y_{оо}$. Наличие подобных слагаемых зависит от того, какое значение принимает μ $(\mu \neq \omega$ или $\mu = \omega)$. Поэтому рассмотрим два случая.

1. $\mu \neq \omega$, то есть частота μ внешней периодической возмущающей силы отлична от собственной частоты колебаний ω. В этом случае частное решение $\bar{y}$ не имеет подобных слагаемых с $y_{оо}$, значит, оставим $\bar{y}$ в форме $\bar{y} = A\sin\mu t + B\cos\mu t$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, подставим $\bar{y}$ в уравнение (5.30). Для этого найдём сначала производные $\bar{y}$.

$\bar{y} = A\sin\mu t + B\cos\mu t$,

$\bar{y}' = (A\sin\mu t + B\cos\mu t)' = A\mu\cos\mu t - B\mu\sin\mu t$,

$\bar{y}'' = (A\mu\cos\mu t - B\mu\sin\mu t)' = -A\mu^2\sin\mu t - B\mu^2\cos\mu t$. Тогда

$-A\mu^2\sin\mu t - B\mu^2\cos\mu t + \omega^2(A\sin\mu t + B\cos\mu t) = a\sin\mu t$. Приравняем коэффициенты при $\sin\mu t$ и $\cos\mu t$.

$$\begin{array}{l|l} \sin\mu t & -A\mu^2 + \omega^2 A = 0, \\ \cos\mu t & -B\mu^2 + \omega^2 B = 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (-\mu^2 + \omega^2)A = a, \\ (-\mu^2 + \omega^2)B = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{a}{\omega^2 - \mu^2}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Значит, $\bar{y} = \dfrac{a}{\omega^2 - \mu^2}\sin\omega t$, следовательно, общее решение уравнения (5.30) в случае $\mu \neq \omega$ имеет вид

$$y_{общ} = N\sin(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\omega^2 - \mu^2}\sin\omega t. \qquad (5.31)$$

Из формулы (5.31) следует, что если частота μ внешней возмущающей силы близка к собственной частоте колебаний пружины ω, то разность $\omega^2 - \mu^2$ близка к нулю и амплитуда колебаний резко возрастает.

2. Если частота μ внешней возмущающей силы совпадает с собственной частотой ω $(\mu = \omega)$. В этом случае уравнение (5.30) можно переписать в виде $y'' + \omega^2 y = a\sin\omega t$, а его частное решение – в виде $\bar{y} = A\sin\omega t + B\cos\omega t$. При уточнении формы $\bar{y}$ мы видим подобные слагаемые с y_{oo}: $A\sin\omega t$ и $C_2\sin\omega t$, $B\cos\omega t$ и $C_1\cos\omega t$. Поэтому $\bar{y}$ будем искать в виде $\bar{y} = t(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$. Аналогично предыдущему пункту найдём A и B.

$$\bar{y} = t(A\sin\omega t + B\cos\omega t),$$

$$\bar{y}' = (t(A\sin\omega t + B\cos\omega t))' = A\sin\omega t + B\cos\omega t + t(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t),$$

$$\bar{y}'' = (A\sin\omega t + B\cos\omega t + t(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t))' =$$

$$= A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t + A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t +$$

$$+ t(-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t) = 2A\omega\cos\omega t - 2B\omega\sin\omega t +$$

$$+ t(-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t). \text{ Тогда}$$

$$2A\omega\cos\omega t - 2B\omega\sin\omega t + t(-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t) + \omega^2 t(A\sin\omega t + B\cos\omega t) =$$

$$= a\sin\omega t \;\Leftrightarrow\; 2A\omega\cos\omega t - 2B\omega\sin\omega t = a\sin\omega t.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

$$\begin{array}{l|l} \sin\omega t & -2B\omega = a, \\ \cos\omega t & 2A\omega = 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = -\dfrac{a}{2\omega}. \end{cases}$$

Поэтому частное решение $\bar{y}$ будет иметь вид $\bar{y} = -\frac{at}{2\omega}\cos\omega t$.

Следовательно, общее решение уравнения (5.30) в случае $\mu = \omega$ имеет вид

$$y_{общ} = N\sin(\omega t + \varphi) - \frac{at}{2\omega}\cos\omega t\,.$$

Наличие множителя t во втором члене указывает на то, что амплитуда колебаний с течением времени неограниченно возрастает. В этом случае говорят, что имеет место ***резонанс***.

Итак, резонанс при колебательном движении наступает в том случае, когда собственная частота колебаний совпадает с частотой внешней силы.

К линейным дифференциальным уравнениям второго порядка приводят также явления, связанные с изменением силы тока в цепи.

Пример 5.28. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из омического сопротивления R, самоиндукции L, ёмкости C, к которой подключен источник электродвижущей силы, изменяющейся с течением времени по закону: $U = U(t)$ (рисунок 5.2). Определить, как изменяется сила тока в цепи $I = I(t)$ в зависимости от времени t.

Решение. Обозначим через U_{ab}, U_{bc}, U_{cd} падения напряжения соответственно на участках ab, bc, cd цепи. Так как в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения равна электродвижущей силе, то

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = U(t).$$

Из физики известно (закон Ома), что:

$$U_{ab} = R \cdot I(t),\ U_{bc} = L \cdot \frac{dI(t)}{dt},\ U_{cd} = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt.$$

Поэтому

$$R \cdot I(t) + L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = U(t).$$

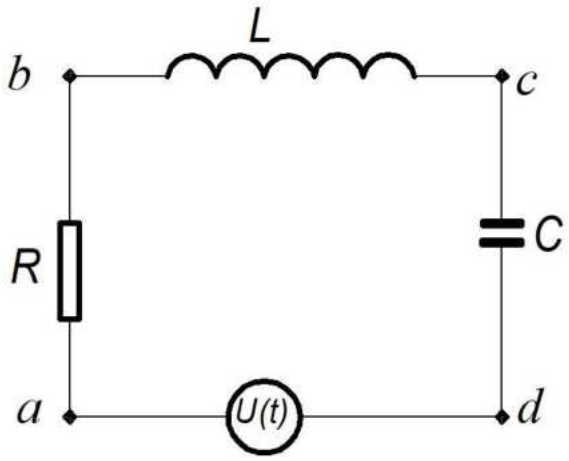


Рисунок 5.2 – Электрическая цепь

Дифференцируя по t обе части последнего равенства, получим

$$R \cdot \frac{dI(t)}{dt} + L \cdot \frac{dI^2(t)}{dt^2} + \frac{I(t)}{C} = U'(t)$$

или

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{I}{LC} = \frac{U'}{L}.$$

Таким образом, искомая сила тока I в цепи является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если внешняя электродвижущая сила U постоянна (в частности равна нулю), то $U' = 0$ и мы приходим к линейному дифференциальному уравнению без правой части:

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{I}{LC} = 0.$$

5.10 Системы дифференциальных уравнений первого порядка

5.10.1 Основные понятия

Определение. Системой дифференциальных уравнений первого порядка называют систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0, \\ F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0. \end{cases} \tag{5.32}$$

где $x \in (a; b)$, $y_i = y_i(x)\left(i = \overline{1, n}\right)$ – искомые функции переменной x.

Определение. Решением системы дифференциальных уравнений (5.32) будем называть набор дифференцируемых на интервале $(a; b)$ функций $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, удовлетворяющих каждому уравнению системы.

Определение. Будем говорить, что система дифференциальных уравнений записана ***в нормальной форме***, если число уравнений системы совпадает с числом искомых функций и все производные искомых функций выражены через аргумент и искомые функции:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ y_2' = f_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \end{cases} \tag{5.33}$$

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений.

Теорема Коши-Ковалевской Существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Пусть $M_0\left(x^0; y_1^0; y_2^0; \ldots; y_n^0\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – внутренняя точка области определения каждой из функций, определяющих правые части уравнений системы (5.33). Если в некоторой окрестности точки M_0 каждая из функций $f_k(x; y_1; y_2; \ldots; y_n)$,

$\left(k=\overline{1,n}\right)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные первого порядка по переменным y_i, $\left(i=\overline{1,n}\right)$, то в некоторой окрестности точки x_0 существует и единственно решение системы (5.33), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} y_1(x_0)=y_1^0, \\ y_2(x_0)=y_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0)=y_n^0. \end{cases} \tag{5.34}$$

Определение. Задачей Коши для системы дифференциальных уравнений называется задача нахождения решения этой системы, удовлетворяющего дополнительным условиям (5.34).

Из теоремы Коши-Ковалевской следует, что для систем, допускающих запись в нормальной форме (5.33), при выполнении условий теоремы решение задачи Коши существует и единственно, по крайней мере, локально, в окрестности рассматриваемой точки.

Определение. Частным решением системы дифференциальных уравнений (5.33) называют такое её решение, которое удовлетворяет условиям (5.34).

Таким образом, частное решение системы дифференциальных уравнений есть решение фиксированной задачи Коши.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений называют совокупность функций

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x; C_1; C_2; \ldots; C_n), \\ y_2 = y_2(x; C_1; C_2; \ldots; C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(x; C_1; C_2; \ldots; C_n), \end{cases} \tag{5.35}$$

зависящих от произвольных постоянных C_1, C_2,…, C_n и удовлетворяющих следующим условиям:

1) при любых фиксированных значениях констант C_1, C_2,…, C_n функции (5.35) являются решениями системы;

2) любое частное решение системы (5.33) может быть получено из решения (5.35) выбором констант C_1, C_2,…, C_n.

5.10.2 Метод исключения в системах дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме

Нормальная система *n* дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна одному дифференциальному уравнению порядка *n*. В самом деле, продифференцируем первое уравнение системы (5.33) по *x*:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y_n'.$$

Учитывая, что каждая функция y_i' – есть функция переменных x, y_1, y_2, …, y_n, то правая часть последнего равенства есть некоторая функция F_2 тех же переменных. То есть

$$y_1'' = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \tag{5.36}$$

Дифференцирование уравнения (5.36) с учетом (5.33) даёт

$$y_1^{(3)} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot y_2' + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot y_n' \quad \text{или}$$

$$y_1^{(3)} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \tag{5.37}$$

Продолжая аналогично, получаем:

$$y_1^{(4)} = F_4(x; y_1; y_2; \ldots; y_n),$$

……

$$y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x; y_1; y_2; \ldots; y_n),$$

$$y_1^{(n)} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Выпишем полученные уравнения совместно с первым уравнением системы (5.33) $y_1' = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n)$ и получим новую систему:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x;\, y_1;\, y_2;\ldots;\, y_n), \\ y_1'' = F_2(x;\, y_1;\, y_2;\ldots;\, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} = F_n(x;\, y_1;\, y_2;\ldots;\, y_n). \end{cases} \tag{5.38}$$

Предположим, что из $(n-1)$-ых уравнений системы (5.38) можно выразить $n-1$ неизвестных $y_2, y_3,\ldots,y_n$ через функцию y_1 и её производные до порядка $n-1$ включительно. Подставив эти выражения в последнее из уравнений (5.38), придём к одному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно неизвестной функции y_1:

$$y_1^{(n)} = \Phi\left(x;\, y_1;\, y_1';\, y_1'';\ldots;\, y_1^{(n-1)}\right). \tag{5.39}$$

Если общее решение уравнения (5.39) есть функция $y_1 = \varphi_1(x; C_1; C_2;\ldots; C_n)$, то можно найти остальные неизвестные $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$, подставив y_1 в выражения для них найденные из $(n-1)$-ых уравнений системы (5.38). В результате получаем систему функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x; C_1; C_2;\ldots; C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x; C_1; C_2;\ldots; C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x; C_1; C_2;\ldots; C_n), \end{cases} \tag{5.40}$$

которые и являются решением исходной системы (5.33).

Обратно, пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x;\, y;\, y';\, y'';\ldots;\, y^{(n-1)}\right). \tag{5.41}$$

Положим $y = y_1,\ \ y' = y_1' = y_2,\ \ y'' = y_2' = y_3,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = y_n' = f(x;\, y_1;\, y_2;\ldots;\, y_n).$$

Таким образом, из уравнения (5.41) получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \end{cases} \tag{5.42}$$

Система дифференциальных уравнений (5.42) представляет собой частный случай системы (5.33).

Замечание. Метод сведения системы (5.33) к дифференциальному уравнению (5.39) называют ***методом вытеснения*** или ***методом исключения***.

Пример 5.29. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 7y_1, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2. \end{cases}$$

Решение. Решим данную систему дифференциальных уравнений первого порядка методом исключения. Из первого уравнения системы выразим y_2: $y_1' = y_2 - 7y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1' + 7y_1$ и подставим найденное во второе уравнение системы. Получим:

$$(y_1' + 7y_1)' = -2y_1 - 5(y_1' + 7y_1),$$

$$y_1'' + 7y_1' = -2y_1 - 5y_1' - 35y_1,$$

$y_1'' + 12y_1' + 37y_1 = 0$ – ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим и решим характеристическое уравнение.

$$k^2 + 12k + 37 = 0,$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 37 = 144 - 148 = -4,$$

$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$, тогда

$$k_{1,2} = \frac{-12 \pm 2i}{2 \cdot 1} = \frac{2(-6 \pm i)}{2} = -6 \pm i.$$

Тогда общее решение уравнения $y_1'' + 12y_1' + 37y_1 = 0$ запишем в виде $y_1 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где $\alpha = -6$, $\beta = 1$.

Получим $y_1 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Теперь найдём y_2, учитывая, что $y_2 = y_1' + 7y_1$:

$$y_2 = \left(e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x)\right)' + 7e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x) =$$

$$= \left(e^{-6x}\right)'(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x)' +$$

$$+ 7e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x) = -6e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x) +$$

$$+ e^{-6x}(-C_1\sin x + C_2\cos x) + 7e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x) =$$

$$= e^{-6x}(-6C_1\cos x - 6C_2\sin x - C_1\sin x + C_2\cos x + 7C_1\cos x + 7C_2\sin x) =$$

$$= e^{-6x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x).$$

Таким образом, совокупность функций

$$\begin{cases} y_1 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \\ y_2 = e^{-6x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x), \end{cases}$$

является общим решением заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 5.30. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} 4y_1' - y_2' + 3y_1 = \sin x, \\ y_1' + y_2 = \cos x, \end{cases}$ удовлетворяющее условиям $\begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

Решение. 1. Найдём сначала общее решение данной системы дифференциальных уравнений первого порядка методом исключения. Из второго уравнения системы выразим y_2: $y_1' + y_2 = \cos x \Rightarrow y_2 = \cos x - y_1'$ и подставим в первое уравнение системы. Получим:

$$4y_1' - (\cos x - y_1')' + 3y_1 = \sin x,$$

$$4y_1' + \sin x + y_1'' + 3y_1 = \sin x,$$

$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0$ – ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим для него характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$k^2 + 4k + 3 = 0,$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \quad \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2,$$

$$k_1 = \frac{-4+2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$k_2 = \frac{-4-2}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Тогда общее решение уравнения $y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0$ запишем в виде

$$y_1 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Теперь найдём y_2, учитывая, что $y_2 = \cos x - y_1'$:

$$y_2 = \cos x - \left(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}\right)' = \cos x - \left(-C_1 e - 3C_2 e^{-3x}\right) = \cos x + C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x}.$$

Таким образом, совокупность функций

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \\ y_2 = \cos x + C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x}, \end{cases}$$

является общим решением заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Найдём частное решение системы, учитывая условия $\begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$

Для этого подставим начальные условия в общее решение системы

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{0}, \\ 1 = \cos 0 + C_1 e^{0} + 3C_2 e^{0}. \end{cases}$$

Получим систему линейных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 3C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3C_2 + C_2 = 2, \\ C_1 = -3C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2C_2 = 2, \\ C_1 = -3C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -1, \\ C_1 = -3 \cdot (-1) = 3. \end{cases}$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в общее решение системы и получим частное решение данной системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1 = 3e^{-x} - e^{-3x}, \\ y_2 = \cos x + 3e^{-x} - 3e^{-3x}. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Сформулировать теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
3. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
4. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными? Как найти общее решение (общий интеграл) этого уравнения?
5. Какая функция называется однородной нулевого порядка?
6. Привести пример линейного дифференциального уравнения первого порядка. Как найти его общее решение?
7. Каковы свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка?
8. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
9. Укажите вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для вузов / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. − М.: Юрайт, 2015.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учебник для вузов / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. − М.: Юрайт, 2015.
3. Баврин И.И. Основы высшей математики / И.И. Баврин. − М.: Высшая школа, 2004.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1989.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.Е. Гмурман. − М.: Юрайт, 2014.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие. − Ч. 1, 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2007.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др. − М.: Астрель, 2003.
9. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. − М.: Наука, 1986.
11. Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.Н. Калинина. − М.: Юрайт, 2013.
12. Луканкин Г.Л. Высшая математика: учебник для вузов / Г.Л. Луканкин. − М.: Высшая школа, 2009.
13. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / В.П. Минорский. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н.С. Пискунов. – Т. 1–2. − М.: Наука, 1985.
15. Сборник задач по математике для втузов / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович и др. – Ч. 1, 2. − М.: Наука, 1986.
16. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. − М.: Высшая школа, 2003.
17. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Шипачев. − М.: Юрайт, 2014.
18. Математика: учебное пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева. – М.: Инфра-М, 2006. – 496 с.
19. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1997. – 304 с.
20. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: учебное пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1997. – 416 с.
21. Липовцев Ю.В. Основы высшей математики для инженеров: учебное пособие / Ю.В. Липовцев, О.Н. Третьякова. – М.: Вузовская книга, 2009. – 484 с.
22. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.
23. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики: учебное пособие / И.П. Натансон. – СПб.: Лань, 2007. – 736 с.
24. Паталах А.Ф. Задания для аудиторных и внеаудиторных занятий по высшей математике: учебное пособие / А.Ф. Паталах. – Зерноград: Азово-Черноморская государственная агроинженерная академия, 1999. – 28 с.

25. Паталах А.Ф. Кратные и криволинейные интегралы: учебное пособие / А.Ф. Паталах, С.А. Белоконов. – Зерноград: Азово-Черноморская государственная агроинженерная академия, 2008. – 40 с.
26. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
27. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.
28. Шипик Л.Ю. Дифференциальные уравнения: методические указания для выполнения типового расчета / Л.Ю. Шипик, М.А. Медведько. – Зерноград: ФГОУ ВПО АЧГАА, 2008. – 61 с.
29. Середина М.Н. Интегральное исчисление функции одной переменной. Практикум: учебное пособие / М.Н. Середина, Л.Ю. Шипик. – Зерноград: ФГБОУ ВПО АЧГАА, 2013. – 106 с.

Учебное издание

Серёгина Виктория Викторовна

Середина Марина Николаевна

Удинцова Надежда Михайловна

Степовой Дмитрий Владимирович

Жидченко Татьяна Викторовна

Грачева Наталья Николаевна

Руденко Нелли Борисовна

Математические основы решения задач в агроинженерии

Часть 2

Учебное пособие

Редактор Н.П. Лучинкина
Верстка М.И. Гриценко
Художественный редактор С.П. Вдовикина

Подписано в печать 25.11.2025 г.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 12,5. Тираж 500 экз. Заказ № 22.

Отдел информационных технологий и издательской деятельности
Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВО Донской ГАУ
347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15.