МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«Азово – Черноморский Инженерный Институт»

Кафедра высшей математики

Л.В.Кравченко,А.Ю.Медведько

Исследование операций

Лабораторный практикум

Зерноград-2014

УДК 517.(075)

Печатается по решению методического совета факультета «Автотранспорт в АПК» Азово – Черноморского инженерного института в г.Зернограде федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Донской государственный аграрный университет»

Рецензенты:

Заведующий кафедрой общеобразовательных дисциплин филиала Российского государственного гидрометеорологического университета в г. Ростове – на – Дону, доктор физико – математических наук, профессор Бородин В.З.

Заведующий проблемно – ориентированной кафедры математического обеспечения суперкомпьютеров Южного Федерального Университета (ПОКМОСК ЮФУ) физико – математических наук, профессор Сухинов А.И.

Директор Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного Федерального Университета (ИКТИБ ЮФУ) д.т.н., доцент Веселов Г.Е.

Кравченко Л.В., Медведько А. Ю., Исследование операций. Лабораторный практикум. – Зерноград: ФГБОУ ВПО ДонГАУ, 2014. – 94 с.

Лабораторный практикум включает материал для повторения основных приемов работы с математическим пакетом Mathcad и методические указания по выполнению лабораторных работ.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки 190700.62 (23.03.01) – технология транспортных процессов, 190109.65 (23.05.01) – наземные транспортно-технологические средства, 190600.62 (23.03.03) – эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, получающих степень бакалавра.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум «Исследование операций. Часть2» соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) и является частью учебно-методического комплекса дисциплины математического и естественнонаучного цикла Б2.В.ДВ.1.

В результате изучения дисциплины «Исследование операций. Часть 2» студент должен:

- знать методы постановки задач и пути их решения;
- уметь применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования
- уметь использовать математический пакет Mathcad для решения прикладных задач

В результате выполнения предлагаемых лабораторных работ студент должен овладеть следующими общекультурными и профессиональными компетенциями:

Для направлений подготовки 190600.62 (23.03.03) -«Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 190700.62 (23.03.01) «Технология транспортных процессов» 190109.65 (23.05.01) – наземные транспортно-технологические средства,:

- владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1)
- применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10)

Лабораторная работа №1

ОСНОВЫ РАБОТЫ В MATHCAD

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Объекты программы MathCAD: формулы и текстовые блоки, - располагаются в документе MathCAD, который называется рабочий лист. В процессе выполнения расчетов формулы обрабатываются постепенно, слева направо и сверху вниз.

Ввод информации выполняется в место положения курсора, который может быть представлен в одном из трех видов:

1) курсор в виде крестика используется, если этот курсор определяет местоположение следующего объекта;

2) угловой курсор используется при введении формул. Этот курсор указывает на текущий элемент выражения;

3) текстовый курсор (I-образная вертикальная черточка) используется при введении текста.

1. ИНТЕРФЕЙС ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

1.1. Математические панели

Математических панелей в MathCAD девять. Приоткрываются панели с помощью соответствующих команд панели Math (Математические) (рис.1), однако можно использовать и стандартный метод обращения к меню Toolbars (Инструменты), меню View (Вид).

Кратко охарактеризуем все панели семейства Math (Математические).

– Calculator (Калькулятор, Арифметика). На данной панели расположены арифметические операторы, цифры от 0 до 9, наиболее распространенные функции и математические константы, а также операторы вывода (рис.1, а).

– Graph (Графические, Графики). С помощью этой панели можно вызвать шаблоны для построения разнообразных графиков и поверхностей. На панели также расположены ссылки на инструменты для анализа данных (рис.1, б).

– Matrix (Матричные, Матрица). На панели расположены операторы создания, обращение, транспонирование матриц, а также операторы матричных индексов и колонок. На панели также расположены операторы для работы с векторами (рис.1, в).

– Evaluation (Выражения). На панели находятся ссылки на все операторы ввода и вывода в MathCAD, а также шаблоны для создания пользовательских операторов (рис.1, г).

– Calculus (Вычислительные, Вычисление, Математический анализ). На панели находятся применяемые при решении задач математического анализа операторы: определенного и неопределенного интегралов, производных, лимитов, сложений и произведений, символ бесконечности (рис.1, д).

– Boolean (Булевые, Логика). Эта панель предназначена для задания логических операторов (рис.1, е).

– Programming (Программирование). Панель содержит операторы языка программирования MathCAD (рис.1, ж).

– Greek (Греческие, Греческий Алфавит). На данной панели расположенные буквы греческого алфавита (рис.1, з).

– Symbolic (Символика, Символы). Панель предназначена для проведения аналитических преобразований (рис.1, и).

а) б) в) г) д)

е) ж) з) і)

Рисунок 1 – Математические панели инструментов программы MathCAD

2. СОЗДАНИЕ ФОРМУЛ

Формулы – основные объекты MathCAD. Новый объект по умолчанию является формулой. Для того, чтобы начать ввод формулы необходимо установить крестообразный курсор в нужное место и начать ввод букв, цифр, знаков операций. При этом создается область формулы, в которой появляется угловой курсор.

Элементы формул можно вводить с клавиатуры или с помощью панелей.

Формулы, которые введены в MathCAD, автоматически приводятся к стандартной научно-технической форме записи.

В программе MathCAD можно использовать буквенные определения, которым сопоставляются числовые значения, и которые рассматриваются как переменные. Буквенные значения задаются с помощью оператора присваивания (он вводится символом ":="). Таким же образом можно задавать числовые последовательности, аналитически определенные функции, матрицы, векторы.

При введении бинарного оператора за знаком операции автоматически появляется заполнитель в виде прямоугольника, в это место вводится следующий операнд. Для управления порядком операций используются круглые скобки, которые можно вводить вручную. Угловой курсор разрешает автоматизировать такие действия:

– для выделения элементов формулы, которые в рамках операции должны рассматриваться как одно целое, используется клавиша Space;

– при нажатии каждого раза на клавишу Space угловой курсор расширяется, включая элементы формулы, которые расположены рядом с данным;

– после введения знака операции элементы в пределах углового курсора автоматически заключаются в скобки.

Если все значения переменных известны, то для вычисления числового значения выражения (скалярного, векторного или матричного) необходимо подставить все числовые значения и выполнить заданные действия. В программе MathCAD применяется оператор вычисления, который вводится символом "=". Кроме того, есть возможность задавать значение известных параметров, провести вычисление с представлением аналитическими формулами, результат присвоить некоторой переменной, а потом использовать оператор вычисления для вывода значения этой переменной.

Комментарии, описания и иллюстрации располагаются в текстовых блоках, которые игнорируются при проведении расчетов.

При изменении любой формулы программа автоматически выполняет необходимые вычисления, обновляя при этом значения и графики, которые изменились.

При проведении расчетов с использованием реальных физических величин учитывается их размерность. В программе MathCAD единицы измерения (в любой системе) присоединяются к значению величины с помощью знака умножения.

3. ГРАФИКИ

Графики, которые строятся на основе результатов вычислений также рассматриваются как формулы.

В MathCAD встроено несколько типов разных графиков, которые можно разбить на две группы: двумерные и трехмерные графики.

Все основные типы графиков и инструменты работы с ними расположены на рабочей панели Graph (Графические) семейства Math (Математические) (рис.2,б):

– График кривой в двумерной декартовой системе координат (X-Y Plot).

– График кривой в полярной системе координат (Polar Plot).

– Поверхность (Surface).

– Контурный график (Contour Plot).

– Столбиковая трехмерная (3D) диаграмма (3D Bar Plot).

– Точечный трехмерный (3D) график (3D Scatter Plot).

– Векторное поле (Vector Field).

Аналогично панели Graph (Графические) список всех типов графиков MathCAD расположен в одноименном подменю меню Insert (Вставка).

3.1. Двумерные графики

В MathCAD существует несколько способов задания кривых в декартовой системе координат, однако первый шаг для всех один и тот же.

Первым шагом есть введения специальной заготовки для будущего графика - так называемой графической области. Ввести графическую область как для декартового, так и для любого другого графика можно: из панели Graph (Графические), командой одноименного меню Insert (Вставка) или нажатием комбинации клавиш Shift+2.

Графическая область представляет собой две вложенные рамки. Во внутренней отображаются непосредственно кривые зависимости. Пространство между рамками служит для визуализации разного рода служебной информации. Графическую область можно увеличивать и уменьшать с помощью специальных маркеров, расположенных на ее внешней рамке. Перемещать по документу и удалять графические области можно так же, как простые формулы. Окно форматирования вида графической области Properties (Свойства) также целиком совпадает с аналогичным окном для формул. Открыть его можно с помощью одноименной команды контекстного меню графика (вызывается щелчком правой кнопкой мыши на графической области).

В окне Properties (Свойства) могут быть полезными два параметра, расположенных на вкладке Display.

– Highlight Region (Цветная область). Установив этот флажок можно на палитре Choose Color (Выбор цвета) определить наиболее подходящий цвет заливки для графической области.

– Show Border (Показать границу). Параметр отвечает за отображение внешней границы графической области. По умолчанию граница не визуализируется.

После того как графическая область будет введена, в общем случае нужно задать два размерных вектора, которые определяют значение координат точек. Сделать это можно разными способами.

Наиболее простым методом задания координатной сетки есть так называемый быстрый метод. При его применении пользователь задает только имя переменной и вид функции, а шкалы осей и величину шага между узловыми точками автоматически определяет система. Чтобы построить кривую функции быстрым методом, можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Ввести графическую область.
2. В специальном маркере, расположенном в центре под внутренней рамкой графической области, задать имя переменной.
3. В центральный маркер, расположенный по левую сторону от внутренней рамки, ввести функцию или имя функции.

К недостаткам рассмотренного метода относится, прежде всего, то, что область изменения переменной для всех функций определяется одинаково: от -10 до 10.

Для того, чтобы изменить область изменения, нужно просто уменьшить интервал изменения переменной или функции. Для этого необходимо выделить графическую область щелчком левой кнопки мыши.

Непосредственно под крайними значениями (для оси X) или по левую сторону от них (для оси Y) появятся цифры, которые отражают максимальные и минимальные величины координат узловых точек графика. Чтобы изменить их значения необходимо удалить старые величины и ввести другие. Изменения границ по оси X вызывает автоматический перерасчет крайних значений по оси Y.

На практике же, как правило, приходится определять границы сразу по обеим осям. Это связано с тем, что хорошо подобрать интервал по оси значений функции системе удается далеко не всегда. Это можно сделать для настраивания вида графика рассмотренной функции, изменяя диапазон как по оси X, так и по оси Y.

В ряде случаев намного удобнее задать векторы данных самостоятельно. Выполнить это можно с помощью оператора ранжированной переменной (вводится из панели Matrix (Матричные)).

Чтобы задать вектор значений переменной с помощью оператора Range Variable (Ранжированная переменная), выполняется следующая последовательность действий.

1. Ввести имя переменной вместе с оператором присваивания.
2. Задать левую границу интервала построения и поставить запятую.
3. Ввести оператор ранжированной переменной.
4. В левом маркере введенного оператора задать вторую точку на промежутке (тем самым определяется шаг).
5. В правый маркер оператора ранжированной переменной вводится значение правой границы на интервале.

В результате переменная и функция будут заданы в виде двух размерных векторов, по которым будет построен график.

Использование способа построения графика с помощью оператора ранжированной переменной имеет очень важное преимущество перед быстрым методом, поскольку позволяет задавать произвольным образом шаг между узловыми точками.

Построить график в MathCAD можно и по готовым векторам или таблицам данных, полученных, например, при эксперименте или выполнении лабораторной работы.

В MathCAD на одну графическую область можно поместить до 16 кривых. Чтобы добавить к уже имеющемуся графику еще один, можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Установить курсор по правую сторону от выражения, которое определяет координаты последнего ряда данных по оси Y (предварительно выделив его).

2. Опустить курсор на строку ниже, нажать на знак запятой (,) и в маркер, который появился, ввести выражение для новой функции или имени функции.

С помощью описанного метода можно построить графики функций одной переменной. Если же кривые, которые нужно отобразить на одной области, зависят от разных переменных, то их, полностью аналогично добавлению новых функций, следует ввести через запятую в нижний маркер в том же порядке, в котором вводились соответствующие им функции.

Задание графиков в полярной системе координат с технической точки зрения не имеет ровно никаких принципиальных отличий от создания графиков на декартовой плоскости. Для начала нужно ввести графическую область. Выполнить это можно или с помощью специальной кнопки Polar Plot (Полярный график) панели Graph (Графические), или комбинацией клавиш Ctrl+7. Как и в случае зависимости X-Y, для полярного графика существует два основных метода построения: быстрый способ построения и использование ранжированных переменных. При задании полярной системы координат по быстрому методу система автоматически определит область изменения угла от 0 до 360°. В отличие от области изменения угла, величину диапазона полярного радиуса можно задать произвольным образом непосредственно на графической области.

Для форматирования графика необходимо дважды нажать на область графика. Для управления отображением линий на графику существует вкладка Traces (Линии) (рис.2, а), где приведен формат каждой линии и элементы управления изменением формата. Поле Legend Label (Описание) задает описание линии, которое отображается, если снять флажок Hide Legend (Закрыть описание) (рис. 2,б). Маркеры для отдельных точек можно выбрать из списка Symbol (Символ), из списка Line (Тип линии) выбирается тип линии, а из списка Color (Цвет) – цвет графика. Список Type (Тип) определяет средство связи отдельных точек графика, а список Weight (Толщина) – толщину линии на графике (рис.2,в).

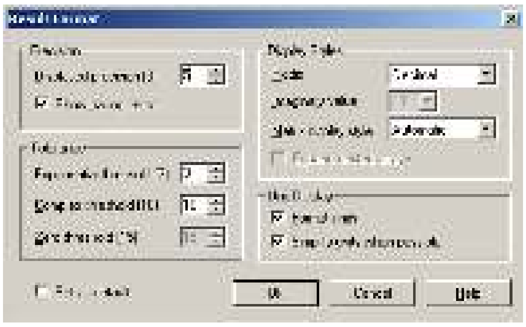
Форматирование данных графика выполняется с использованием диалогового окна Result Format (рис.2, г).

Аналогично можно построить и отформатировать график в полярных координатах. Для его построения нужно воспользоваться командой Insert/ Graph/Polar Plot.

а)

б)

в)



г)

Рисунок 2 – Диалоговые окна для форматирования графиков

3.2. Трехмерные графики

Для построения трехмерных графиков можно использовать наиболее простой и практически важный, быстрый метод построения трехмерного графика (QuickPlot). В его основе лежит тот же принцип, который используется и при быстром задании двумерной зависимости: пользователь определяет только вид функции, а все параметры построения, такие как шаг между узловыми точками, диапазон шкал осей и система координат, задаются автоматически системой.

Типы трехмерных графиков следующие:

Contour Plot – график линий уровня (график поверхности);

3D Bar Plot – график трехмерной гистограммы;

3D Scatter Plot – график множества точек;

Vector Field Plot – график векторного поля. График векторного поля немного отличается от других типов двумерных графиков. Его содержание заключается в построении некоторого вектора в каждой точке плоскости *XY*. Чтобы задать вектор на плоскости, необходимы два скалярных числа. Поэтому в MathCAD принято, что векторное поле задает комплексная матрица. Действительные части каждого ее элемента задают проекцию вектора на ось *X*, а мнимые – на ось *Y*.

Чтобы создать трехмерный график, нужно нажать кнопку с изображением каждого из типов трехмерных графиков на панели инструментов Graph (Графики). В результате появится пустая область графика с тремя осями (рис. 3) и единым заполнителем в нижнем левом углу. В этот заполнитель ввести или имя *z* функции *z(x,y)* двух переменных для быстрого построения трехмерного графика, или имя матричной переменной *z,* которая задает функцию *z(x,y)* на плоскости *XY*.

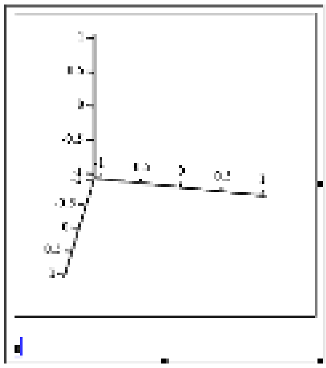


Рисунок 3 – Область для создания трехмерных графиков

3.2.1 Способ построения с использованием быстрого методу построения трехмерного графика

Последовательность создания трехмерного графика с использованием быстрого метода построения трехмерного графика (QuickPlot) следующая.

1. Сначала необходимо ввести графическую область трехмерного графика. Аналогично зависимости *X*-*Y*, сделать это можно тремя стандартными способами: нажатием кнопки Surface Plot (Поверхность) панели Graph (Графические), использованием одноименной команды меню Insert (Вставка) или нажатием комбинации клавиш Ctrl+2.

Для построения трехмерных графиков существует только один маркер заполнения. В общем случае в нем должен быть прописан массив, который содержит координаты узловых точек по всем трем осям.

2. После того как графическая область введена, следует задать вид функции, которая определяет трехмерную область. В отличие от *X*-*Y*-зависимостей, просто ввести ее выражения в маркер нельзя - при этом будет выдано сообщение об ошибке: This variable is undefined (Данная переменная не определенна). В маркер графической области вводится имя заданной функции, для которой строится трехмерный график. Однако, в отличие от двумерного случая, прописанным должен быть лишь непосредственно текст имени, без переменных в скобках.

При использовании данной методики поверхность задается на стандартном интервале от -5 до 5 для переменных. Такой диапазон во многих случаях может быть неприемлемый. Для форматирования параметров графиков быстрого построения существует специальная вкладка Quick Plot Data (Данные графика быстрого построения) окна форматирования трехмерных графиков 3D-Plot Format. Открывается это окно двойным нажатием левой кнопки мыши на графической области или с помощью команды Format (Формат) ее контекстного меню (рис. 5).

Все параметры настройки графика быстрого построения расположены на вкладке Plot 1 (График 1). В общем случае таких вкладок может быть больше, это связано с тем, что на одной графической области может быть размещено несколько поверхностей. Чтобы это выполнить, просто вводятся через запятую имена функций, графики которых должны быть построены. Вкладка Plot 1 (График 1) содержит три меню настраивания, два из которых: Range 1 и Range 2 (Ряд 1 и Ряд 2) идентичны друг другу. Эти меню отвечают за характеристики сетки построения поверхности вдоль каждой из осей переменных (соответствие переменной ряда определяется последовательностью введения ее при задаче имени функции) и содержат следующие параметры настраивания:

– Start (Начало). В поле данного параметра можно произвольным образом задать начальную точку построения прямоугольника по данной оси.

– End (Конец). В поле данного параметра определяется конечная точка интервала.

– # of Grids (Количество линий сетки). Параметр определяет, на какое количество отрезков будет разбит интервал построения для выбранной переменной (что отвечает числу отображенных линий сетки). Эта величина обратная шагу изменения переменной.

Аналогично двумерному случаю, интервал по каждой из осей переменных разбивается на заданное количество отрезков. Границы этих отрезков дают координаты узловых точек. При этом, если количество отрезков по X равняется N, а по Y - M, то для каждого значения X будет существовать M точек с разными координатами по Y, и, наоборот, каждому Y будет отвечать N значений X. Визуально это можно представить в виде сетки, которая определяется шагом по каждой из переменных, а в узлах находятся точки, относительно которых определяется функция.

Когда сетка разбивки задана, исчисляются значение функции в ее узлах. Если остановиться на этом этапе и визуализировать только точки, то будет построен так называемый точечный график (Data Points). Каждая точка соединяется с соседней при помощи отрезков прямых, при этом применяются сглаживание и другие графические эффекты, в результате чего, в зависимости от величины шагов сетки, выходит более или менее гладкая поверхность.

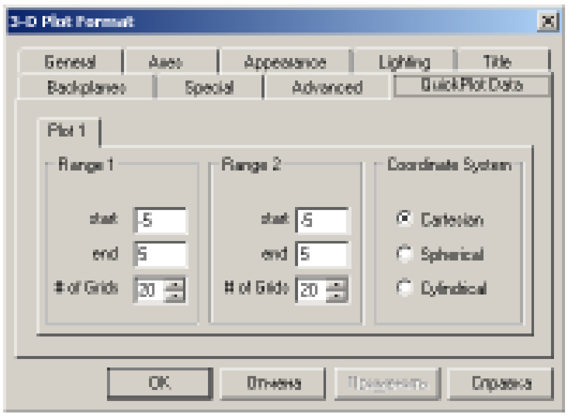


Рисунок 4 – Окно для форматирования трехмерных графиков

Третье меню вкладки Plot 1 (График 1) – Coordinate System (Система координат) определяет, в какой системе координат следует отобразить данную зависимость. Возможные следующие варианты:

– Cartesian (Декартова). График отображается в декартовой системе координат.

– Spherical (Сферическую). График отображается в сферической системе координат.

– Cylindrical (Цилиндрическая). График отображается в цилиндрической системе координат.

В диалоге 3-D Plot Format (Форматирование 3-D графика) доступно большое количество параметров, изменение которых способно повлиять на внешний вид графика. Они сгруппированы по принципу действия на нескольких вкладках.

Остановимся кратко на возможностях оформления трехмерных графиков.

Изменение типа графика. Чтобы изменить тип уже имеющегося графика (например построить вместо поверхности график линий уровня и т.д.), надо установить соответствующий переключатель в нижней части вкладки General (Общие) и нажать кнопку ОК. График будет преобразован (рис.5).

Обращение графика. Простейший способ ориентации системы координат с графиком в трехмерном пространстве - это перетаскивание ее указателем мыши. Можно перемещать при нажатой левой кнопке мыши указатель в границах графика, и будет видно, как вращается график.

Изменение ориентации графика. С помощью полей Rotation (Вращение), Tilt (Наклон) и Twist (Поворот) на вкладке General (Общие) определяют соответствующие углы вращения, наклона и поворота (в градусах) и тем самым задают направление всех трех осей координат в пространстве.

Стиль осей можно изменить с помощью группы переключателей Axes Style (Стиль осей) и задать один из следующих стилей осей координат:

– Perimeter (Периметр),

– Corner (Угол),

– None (Нет) – оси отсутствуют.

Если установить флажок Show Box (Показать куб), то координатное пространство будет изображено в виде куба.

Масштабирование графика - можно задать числовое значение масштаба в поле Zoom (Масштаб) вкладки General (Общие).

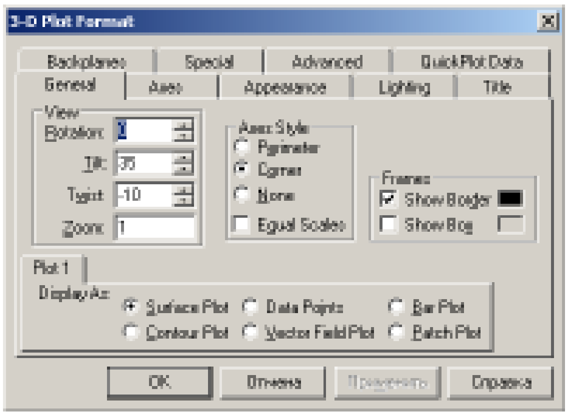


Рисунок 5 – Вкладка General (Display as) для изменения типа графика

Форматирование осей выполняется с использованием вкладки Axes (Оси) (рис.6). Вкладка Axes (Оси) содержит три вложенных вкладки, в которых задаются параметры для каждой из трех координатных осей. В частности, можно включить или отключить отображение линий сетки, нумерацию и задать диапазон по каждой из осей.

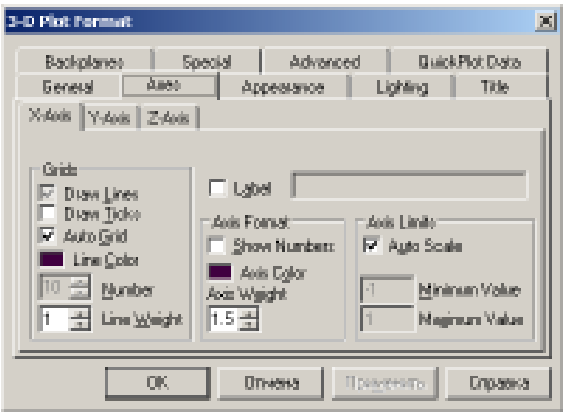


Рисунок 6 – Вкладка Axes (Оси) форматирования осей

С помощью еще одной вкладки – Backplanes (Плоскости заднего плана) (рис. 7) задается отображение проекций координатной сетки на три спрятанные плоскости трехмерного графика.

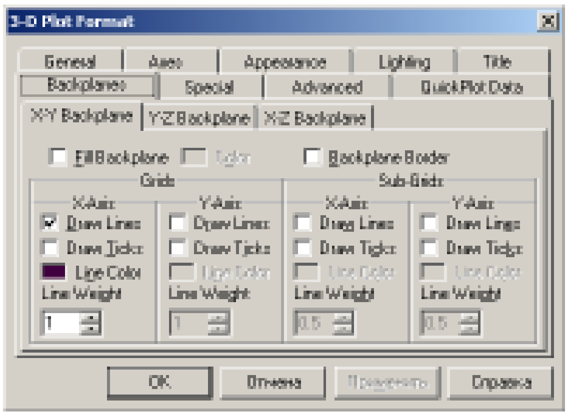


Рисунок 7 – Вкладка Axes (Оси) форматирования осей

С помощью вкладки Appearance (Оформление) (рис. 8) можно изменить стиль задания заливки линий для контурного и поверхностного графиков. При выборе переключателя Fill Surface (Заливка поверхности) из группы Fill Options (Опции заливки) можно получить доступ к опциям цвета (в группе Color Options). Если выбрать переключатель Solid Color (Один цвет), то получится однотонная заливка поверхности. Если установить переключатель Colormap (Цветовая схема), то поверхность или контурный график будут залиты разными цветами и оттенками, причем выбрать цветовую схему можно на вкладке Advanced (Дополнительно) (рис. 9).

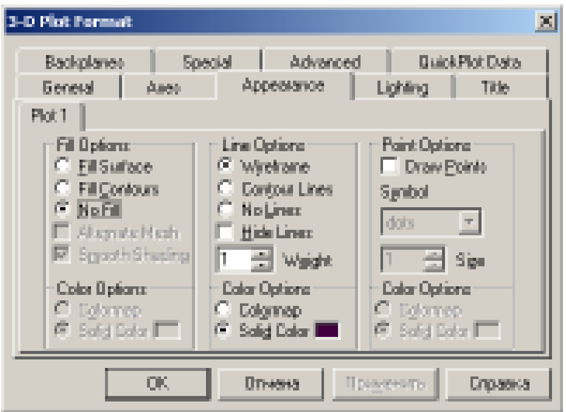


Рисунок 8 – Вкладка Appearance (Оформление) стиля задания заливки

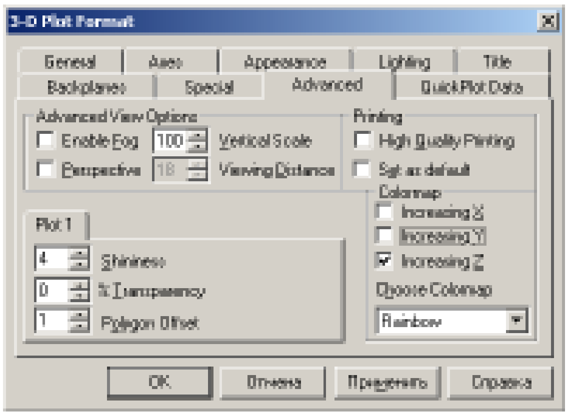


Рисунок 9 – Вкладка Advanced (Дополнительно) для задания цвета в спецэффектов

Заголовок графика можно изменить с помощью вкладки Title (Заголовок) (рис. 10).

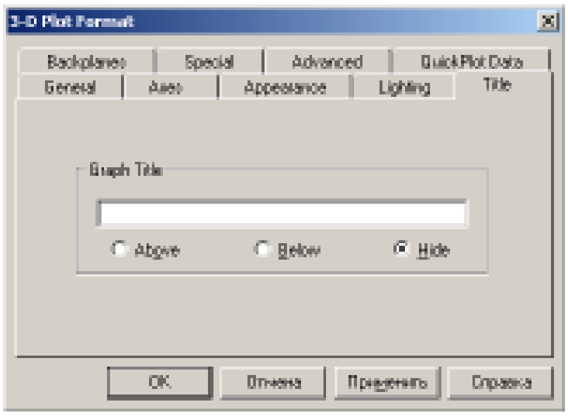


Рисунок 10 – Вкладка TITLE для изменения заголовка графика

3.2.2 Способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений

Существует еще один способ построения трехмерного графика с помощью матрицы значений, которая представляет собой таблицу из трех колонок: в первой будут расположены координаты точек по оси *X*, во второй -по оси *Y*, в третьей - по оси *Z*. В MathCAD существует специальная функция *matrix(m,n,f)* (матрица). Функция формирует матрицу, элементы которой равны значениям функции *f(x,y),* исходя из того условия, что $x=i$, $y=j$ (т.е. переменные определяются равными соответствующим матричным индексам данного элемента). Количество строк создаваемой матрицы определяется в первом маркере имени функции (параметр *m)*, количество колонок – во втором (параметр *n*).

Аналогично двумерному случаю, задать поверхность можно, используя оператор ранжированной переменной по готовым матрицам.

3.2.3 Способ построения с помощью специальной матричной функции *CreateMesh*

Можно создать график также с помощью специальной матричной функции CreateMesh (Создать сетку).

Функция CreateMesh(F,s,sl,t,tl,sgrid,tgrid,fmap) вводится в маркер графической области и имеет пустые маркеры, в которые последовательно вводятся:

– имя матрицы значений или функции *F*;

– начальное значение первой переменной *s*;

– начальное значение второй переменной *sl*;

– конечное значение первой переменной *t;*

– конечное значение второй переменной *tl;*

– число линий сетки по первый переменной *sgrid*;

– количество линий сетки по второй переменной *tgrid*;

– карта отображения *frnap*.

Кроме поверхностей в пространстве можно задавать и разного рода линии. Для этого существует специальная функция CreateSpace(F,t,tl,tgrid,frnap) (Создать пространство). Она имеет пять маркеров, в которые последовательно вводятся имя массива данных или системы параметрических уравнений, начальное и конечное значения параметра, количество разбивок промежутка параметра, карта отображения.

Параметрическое закручивание разрешает создавать графики, которые заданы в параметрической форме. Последовательность действий при использовании алгоритма параметрического закручивания следующая.

1. Задать уравнение любой функции *f(x)*.

2. Задать систему параметрического закручивания и соединить ее в один массив:

$$A(u,v) :=u,$$

$$B(u,v):=f(u)cos(v),$$

$$C(u,v):=f(u)sin(v),$$

$$M(u,v) := \begin{pmatrix} A(u,v) \\ B(u,v) \\ C(u,v) \end{pmatrix}.$$

3. Внести в маркер следующую запись: *CreateMesh(M,s,sl,t,tl,sgrid,tgrid).*

4. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

С помощью встроенных функций MathCAD матрицы можно объединять, выделять в них подмассивы, определять размеры массивов, максимальные, минимальные значения, нахождение собственных чисел и векторов. Для матриц определенны следующие операции: добавление, произведение, обращение, транспонирование, и т.п.

Создать матрицу можно следующим образом:

- записать оператор присваивания, для введения правой части использовать команду Insert/Matrix или на панели инструментов Matrix. В окне, которое раскроется, задать число строк и столбцов матрицы. Вектор является матрицей с одним столбцом. Ввести значение элементов матрицы в соответствующие места. Дальше можно выполнять все необходимые операции с матрицами.

Для работы с элементами матрицы используются индексы элементов. Нумерация строк и столбцов матрицы начинается из нуля. Индекс элемента определяется на панели инструментов Matrix кнопкой Subscript (рис.1,в), например Mn,k. Два индекса, которые определяют элемент матрицы, отделяются запятой. Номер столбца матрицы отображается как верхний индекс, который заключен в угловые скобки, для чего используется кнопка Column на панели инструментов Matrix, например, M<1> .

Для проведения операций с матрицами используется меню Symbolic и команда Matrix (рис. 12).

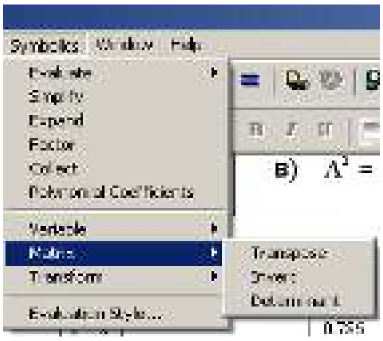


Рисунок 12 – Меню Symbolic для работы с матрицами в символьном виде.

5. НАХОЖДЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Для числового поиска корней уравнения в MathCAD используется встроенная функция *root*. Она позволяет решать уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$-уравнение, корни которого необходимо найти, x - неизвестная. Использование функции *root* требует задания начального приближения.

Функция *polyroot* возвращает вектор, который имеет все корни уравнения, коэффициенты которого задаются вектором *v*. Коэффициенты *у* вектора *v* располагаются в порядке возрастания степеней в уравнении.

Существует возможность символьного решения уравнения. Для этого необходимо обратиться к меню Symbolic/Variable/Solve. Корни уравнения выводят в виде вектора.

Можно также находить решение уравнения графически. Графическое решение заключается в определении по графику функции, которая отвечает левой части уравнения, при какой величине аргумента данная функция принимает значение, равное правой части уравнения.

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на две основных группы: прямые (метод Крамера, метод Гаусса, и т.п.) и итеративные методы. При использовании прямых методов расчеты можно вести как численно, так и символьно. Итеративные методы применяются в численных решениях.

Для решения систем линейных и нелинейных уравнений используется "блок решений", который начинается из ключевого слова *Given* и заканчивается вызовом функции *Find*. Между ними находятся уравнение. Всем неизвестным в уравнении должны быть присвоены начальные значения. В уравнении, для которого необходимо найти решение, нужно использовать знак логического равенства = на панели инструментов Evaluation. Как аргументы в функции должны быть неизвестные, которые необходимо найти.

Решение системы линейных уравнений с помощью встроенной функции *lsolve(A,b)* возвращает вектор решений *b*. Матрица А - квадратная невырожденная, вектор *b* - вектор правых частей в системе уравнений.

С помощью символьного процессора MathCAD можно получать аналитические решения системы уравнений, используя оператор *solve*. В этом случае система должна быть занесена в виде вектора в левый маркер оператора. Переменные, значения которых отыскиваются, следует вводить через запятую в правый маркер оператора *solve*. Ответ будет возвращен в виде матрицы, в строках которой будут записаны найденные значения неизвестных системы уравнений.

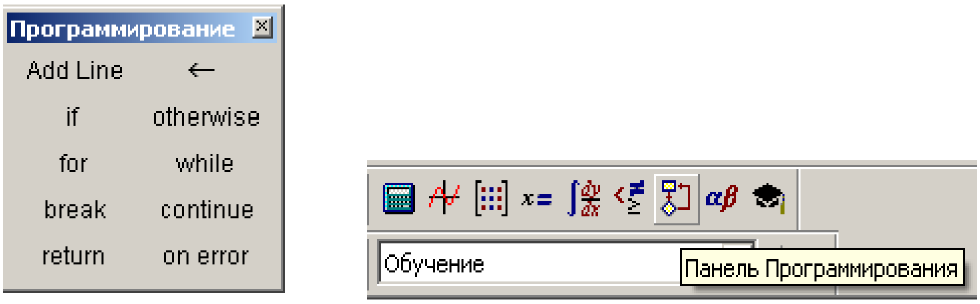
Аналитические решения можно также получить с помощью "блока решений", который начинается из ключевого слова *Given.*

Приближенные решения системы уравнений можно получить с использованием встроенной функции *minerr(x1,...).* Эта функция подобная по своей работе к функции *Find*, однако она имеет другие условия для завершения итеративного процесса поиска решений. Функция *minerr* позволяет находить решение в том случае, когда их не находит функция *Find*.

6. ПРОГРАММИРОВАНИЕ В MATHCAD

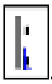
Для написания программ в среде MathCAD [4,6] существует специальная панель Programming (Программирование) (рис.16,а), она относится к панели Math (Математические) (рис.16, б).

Язык программирования MathCAD имеет предельно малое количество операторов (рис. 16,а). Чтобы написать программу, прежде всего для нее должен быть создан блок. Выглядит он как черная вертикальная линия с маркерами, в которые записывают те или иные выражения алгоритма.



а) б)

Рисунок 16 – Панель программирования

Чтобы построить единичный элемент программного блока, используется кнопка команды Add Line (Добавить линию) панели Programming (Программирование). При этом в области курсора появится следующий объект: , в который можно занести две строки программы. Для создания большего числа строк программы необходимо последовательно нажимать несколько раз соответствующую кнопку на панели Programming. Программный блок можно создать и внутри уже заданного блока.

Для присвоения значений переменным и функциям в MathCAD используется специальный оператор: ← (Local Definition – Локальное присваивание), расположенный на панели Programming (Программирование). Использовать оператор обычного присваивания := в программах нельзя. Локальные переменные и функции имеют приоритет над глобальными в рамках родной программы. Несколько переменных можно объявлять в одной строке через запятую.

Практически любая программа создается с использованием специальных управляющих операторов, таких как оператор цикла **for** или оператора условия **if**.

Чтобы задать нужный оператор, используются соответствующие кнопки панели Programming (Программирование). Просто набрать оператор из клавиатуры нельзя - он будет воспринят системой MathCAD как неизвестная функция. Такие операторы как: **if, for, while,** активируют код, расположенный в левом верхнем маркере, в том случае, если выполняется условие в правом. Для задачи условия используются также операторы панели Boolean (Логические). Можно задать и комплекс условий.

С помощью оператора простого цикла **for** можно организовать выполнение операции или проверку условия для ряда конкретных значений переменной. Оператор **for** имеет три маркера: в двух верхних маркерах, соединенных символом принадлежности, задается имя переменной, по которой организуется цикл, и ряд принятых ею значений. В нижнем маркере определяется операция или комплекс операций, которые должны быть выполнены для каждого значения переменной.

С помощью второго оператора цикла **while** (Пока) можно организовать цикл, который будет работать до тех пор, пока некоторое условие будет выполняться. Оператор **while** имеет два маркера, в которые вводятся соответственно условия работы цикла и выражение для операций, которые будут выполняться на каждом шаге цикла **while**. Количество шагов выполнения цикла не нужно определять явным образом.

Если в некоторых ситуациях при работе программы необходимо прервать работу цикла, для этого надо использовать оператор **break** (Прервать). Этот оператор почти всегда работает с оператором **if** (Если) или **on error** (Перехват ошибок).

Программный оператор условия **if** (Если) используется практически во всех создаваемых алгоритмах. Условный оператор **if** имеет два маркера: ▪**if**▪. В правый маркер вводится условие, в левый – операция, которая выполняется в случае, если условие выполняется (если же оно не выполняется, то программа, пропускает данный фрагмент). В маркер оператора может быть внесено несколько условий.

Если алгоритм имеет несколько условий, при этом выполнение одного из них может привести к невыполнению или ошибке в других операторах условий, то можно использовать специальный оператор **continue** (Продолжить). Его применение аналогично применению оператору **break** (Прервать).

Оператор **otherwise** (Иначе) предназначен для определения действия, которое должно быть выполнено, если условие оператора **if** (Если) окажется ошибочным. Одновременно может быть использовано несколько условных операторов **if** (Если). Оператор **otherwise** (Иначе) в таком случае будет задействован, если не выполнятся условия всех операторов **if** (Если).

С помощью оператора **return** (Возвратить) можно прервать работу программы и возвратить некоторое значение. Этот оператор используется при ошибочной ситуации в программе.

В MathCAD существует возможность использовать специальный оператор **on error** (Перехват ошибок). Он дает возможность в программах избегать ошибок и обходить их. Этот оператор по синтаксису полностью отвечает оператору **if**.

Лабораторные работы № 2,3

Постановка и решение задачи линейного программирования. Решение задачи ЛП графическим методом. Целочисленная задача линейного программирования

Цель работы: решение оптимальных задач линейного программирования с использованием пакета MathCAD; нахождение оптимальных решений задачи линейного программирования графическим методом; решение целочисленной задачи линейного программирования

Задание.

1) построить экономико-математическую модель задачи:

- составить целевую функцию;
- записать систему ограничений.

2) Решить задачу максимизации стандартными средствами MathCAD.

3) Решить ЗЛП графическим методом.

4) Сделать выводы

Задача 2.1. Завод выпускает двигатели трех типов. Для изготовления двигателей всех типов используются ресурсы трёх видов. Общий запас ресурса первого вида – 480 кг, второго вида – 960 кг, третьего вида – 1000 кг. На один двигатель первого типа расходуются 2 кг первого ресурса, 7 кг второго и 8 кг третьего, на один двигатель второго вида расходуются 3 кг первого ресурса, 7 кг второго и 2 кг третьего, а для двигателя третьего вида – по 7 кг каждого ресурса. За каждый реализованный двигатель первого вида завод получает прибыль 17 д. е., второго — 43 д. е., а третьего – 62 д.е.

Составить план выпуска двигателей, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

1) Составление экономико-математической модели.

Пусть x_1, x_2 и x_3 – это искомое количество выпускаемых двигателей первого, второго и третьего типа соответственно. Тогда максимальная прибыль будет определяться как:

$$F = 17x_1 + 43x_2 + 62x_3 \to \max;$$

При этом ограничение на имеющееся количество первого ресурса будет выглядеть как:

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \le 480;$$

Ограничение по второму ресурсу:

$$7x_1 + 7x_2 + 7x_3 \le 960;$$

Ограничение по третьему ресурсу:

$$8x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 1000.$$

Кроме того, накладывается техническое ограничение на неотрицательность переменных:

$$x_{1,2,3} \ge 0$$

Решение задачи в MathCAD.

Постановка задачи

x1 - двигатель 1-го типа

x2 – двигатель 2-го типа

x3 - двигатель 3-го типа

$f(x1, x2, x3) := 17x1 + 43x2 + 62x3$ - целевая функция

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$ - начальные приближения

Given

ограничения

$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 7 \cdot x3 \le 480$

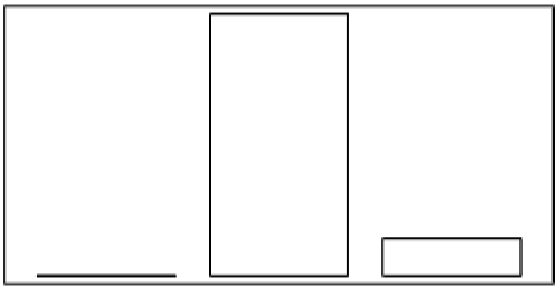
$7 \cdot x1 + 7 \cdot x2 + 7 \cdot x3 \le 960$

$8 \cdot x1 + 2 \cdot x2 + 7 \cdot x3 \le 1000$

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0 \qquad x3 \ge 0$

$rezult := Maximize(f, x1, x2, x3)$

$rezult^T = (0 \;\; 120 \;\; 17.143)$



rezult

Рассмотрим пример решения целочисленной задачи линейного программирования.

Фабрика может выпускать автомобильные кресла двух типов ценою в 8 и 12 условных единиц (у.е.). Под этот заказ выделены материальные и людские ресурсы – известно, сколько металла, ткани и времени идет на изготовление каждого кресла (таблица 1).

Таблица 1 – Исходные данные для целочисленной задачи линейного программирования

Кресло	Расход металла, кг	Расход ткани, м^2	Расход времени, человеко-часов
К1	2	0,5	2
К2	4	0,25	2,5
ресурс	490	65	320

Как нужно спланировать производство автомобильных кресел, чтобы их производство было максимальным, а цена – наибольшей.

$m(C1, C2) := C1 + C2$ Первая целевая функция

$z(C1, C2) := 8C1 + 12C2$ Вторая целевая функция

$C1 := 0..150$ $C2 := 0..150$

$$Z_{C1,C2} := \left| \begin{array}{l} 0 \text{ if } 2C1 + 4C2 > 490 \\ 0 \text{ if } 0.5C1 + 0.25C2 > 65 \\ 0 \text{ if } 2C1 + 2.5C2 > 320 \\ z(C1, C2) \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$maxZ := max(Z)$ $maxZ = 1504$

$C := match(maxZ, Z)$

$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} := C_0$ $m(C1, C2) = 132$

$2C1 + 4C2 = 488$
$0.5C1 + 0.25C2 = 38$
$2C1 + 2.5C2 = 320$

$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} := C_1$ $m(C1, C2) = 131$

$2C1 + 4C2 = 490$

$0.5C1 + 0.25C2 = 37$

$2C1 + 2.5C2 = 319$

Рисунок 17 – Программа решения задачи.

На рис. 17 показано решение задачи о плане выпуска автомобильных кресел методом перебора – анализа матрицы z, хранящей стоимости вариантов выпуска кресел при выполнении ограничений – если одно из ограничений не соблюдается, то соответствующий элемент матрицы z становится нулевой. Встроенная функция match в задаче о креслах вернула нам два решения задачи, при которой цена автомобильных кресел (20 и 112 шт.; и 17 и 114 шт.) будет максимальной – 1504 у.е. В результате решения можно увидеть, как расходуются ресурсы (что остается лишним – металл, ткань и/или рабочее время) при найденных двух планах (целевых функций) – производственных программах изготовления автомобильных кресел.

Варианты для выполнения лабораторной работы.

Вариант 1

Выполнить заказ по техническому обслуживанию 32 автомобилей А и 4 автомобилей В предприятия взялись две станции технического обслуживания. Производительность СТО №1 по техническому обслуживанию автомобилей А и В составляет соответственно 4 и 2 в час, фонд рабочего времени этой СТО 9,5 ч. Производительность СТО №2 – соответственно 1 и 3 автомобиля в час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с техническим обслуживанием автомобилей, на СТО №1 равны соответственно 9 и 20 руб., на СТО №2 – 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный план проведения технического обслуживания автомобильного транспорта предприятия, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

Вариант 2

Для производства автомобильных деталей фабрика использует два вида материальных ресурсов. Нормы затрат ресурсов на одну деталь, прибыль от реализации деталей и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице.

Определить сколько автомобильных деталей каждого вида фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Таблица 2 – Исходные данные к варианту №2

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одну деталь			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Первый ресурс	0,3	0,1	0,4	80
Второй ресурс	0,1	0,05	0,5	120
Трудоемкость	1,3	0,3	2,5	483,5
Прибыль от реализации одной детали, руб.	21	25	35	

Вариант 3

При изготовлении автомобильных деталей А и В используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство одной детали А требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства одной детали В требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации одной детали А составляет 6 руб. и от одной детали В – 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Вариант 4

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов А и В равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта А – 20 руб., В – 30 руб. Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание водителей, чтобы его стоимость была минимальной, а водитель получил необходимое количество питательных веществ.

Вариант 5

Для изготовления трёх видов автомобильных деталей А, В и С используют токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в таблице 3. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Таблица 3 – Исходные данные к варианту №5.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия вида, станко-часов			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	A	B	C	
Фрезерное	5	6	8	210
Токарное	3	4	2	320
Сварочное	7	9	4	250
Шлифовальное	2	5	6	160
Прибыль, руб.	8	11	15	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Вариант 6

На заводе выпускают автомобили четырех марок. От реализации 1 автомобиля каждой марки завод получает прибыль соответственно 2, 1, 3, 5 тыс. условных единиц. На производство расходуются ресурсы трех типов: энергия, материалы, труд. Данные о технологическом процессе приведены в таблице 4.

Спланируйте производство изделий так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

Таблица 4 – Исходные данные к варианту №6.

Ресурсы	Затраты ресурсов на производство автомобиля				Запасы ресурсов, ед.
	I	II	III	IV	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Вариант 7

При производстве готовых обедов для водителей автотранспортного предприятия используются ингредиенты четырех видов. Нормы расхода ингредиентов каждого вида для производства 1 порции готового обеда приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Исходные данные к варианту №7.

Вид ингредиента	Нормы расхода сырья для производства готового обеда			Общее количество ингредиентов
	A	B	C	
1	0,7	0,6	0,8	900
2	0,45	0,5	0,3	700
3	0,1	0,2	0,15	250
4	0,002	0,005	0,003	16
Прибыль, руб.	1000	1200	1350	

Требуется определить, план выпуска карамели, чтобы прибыль от её реализации была максимальной.

Вариант 8

Для выполнения плана автомобильный завод ежедневно должен выпускать не менее 18 грузовых, не менее 72 легковых и не менее 24 грузопассажирских автомобилей. Непосредственной сборкой автомобилей занимаются три цеха завода. Производительность цехов приведена в таблице 6.

Составить план загрузки цехов завода, обеспечивающий выполнение плана при минимальных денежных затратах.

Таблица 6 – Исходные данные к варианту №8.

Цеха завода	Число производимых цехом автомобилей		
	I	II	III
1	3	4	3
2	13	20	9
3	5	4	3
Затраты	21	25	35

Вариант 9

Для функционирования завода необходимо пополнять его склад расходными материалами. Ежедневно на склад должно быть доставлено не менее 9 ед. расходного материала №1, 8 ед. расходного материала №2 и 11 ед. расходного материала №3. Для пополнения склада были заключены договоры с двумя автопредприятиями. Их возможности представленны в таблице 7:

Таблица 7 – Исходные данные к варианту №9.

Расходные материалы	Количество доставленных материалов	
	Предприятие №1	Предприятие №2
Расходный материал №1	3	1
Расходный материал №2	1	2
Расходный материал №3	1	6

Стоимость перевозки по договору с Предприятием №1 – 4 д.е., с Предприятием №2 – 6 д.е.

Составьте план перевозок, имеющий минимальную стоимость.

Вариант 10

Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции П1, П2, П3 и П4, Организация производства характеризуется таблицей 8:

Таблица 8 – Исходные данные к варианту №10.

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	Площадь	Труд	Тяга	
П1	2	2	2	1
П2	3	1	3	4
П3	4	2	1	3
П4	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Вариант 11

Цех выпускает двигатели двух типов. Для изготовления двигателей обоих типов используются два вида ресурсов. Общий запас ресурса первого вида – 3 тонны, второго вида – 18 тонн. На один двигатель первого типа расходуются 5 кг первого ресурса и 3 кг второго, а на один двигатель второго вида расходуются 3 кг первого ресурса и 2 кг второго. За каждый реализованный двигатель первого вида завод получает прибыль 3 тысячи денежных единиц, второго – 4 тыс. д. е.

Составьте план выпуска двигателей, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 12

Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице 9:

Таблица 9 – Исходные данные к варианту №12.

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	22	14	18	30	400
Оборудование	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	8	16	

Сформулировать математическую модель задачи на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Вариант 13

При производстве бензина в топливо добавляются химические присадки трёх видов – I, II, III. В состав бензина должно входить не менее 6 ед. химического вещества А, 8 ед. вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Структура химических веществ приведена в следующей таблице 10:

Таблица 10 – Исходные данные к варианту №13.

Бензин	Содержание химического вещества			Стоимость бензина
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте формулу самого дешевого бензина.

Вариант 14

Объявлен тендер на перевозку товара. Стоимость перевозки товара А – 30 д.е. за единицу, товара В – 20 д.е. за единицу, товара С – 12 д.е., товара D – 10 д. е. Всего за указанное время необходимо перевезти не менее трех единиц товара А, товара D – столько, сколько единиц товара А и В вместе, товара С – не более пяти. На оплату перевозки выделяется не более 300 д. е.

В каком количестве должна быть выполнена перевозка, чтобы общее число перевезенного товара было наибольшим?

Вариант 15

Цех выпускает три вида автомобильных деталей – А, В, С. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется таблицей 11:

Таблица 11 – Исходные данные к варианту №15.

Станок	Длительность обработки детали, мин.			Фонд времени, час
	А	В	С	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Отпускная цена за одну деталь	30	32	30	

Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

Вариант 16

На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется таблицей 12:

Таблица 12 – Исходные данные к варианту №16.

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг.			Запасы ресурсов, кг
	1	2	3	
I	5	5	2	1200
II	4	-	3	300
III	-	2	4	800
Прибыль от реализации одной запасной части (д.е.)	5	8	6	

Составьте план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Вариант 17

Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта бензина: бензин А – 2:3:5:2, бензин В – 3:1:2:1, бензин С – 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д.е,, 100 д. е., 150 д. е.

Составьте план выпуска разных сортов бензина при условии получения максимальной прибыли.

Вариант 18

Фабрика производит два вида автомобильных красок. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (таблица 13). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 13 – Исходные данные к варианту №18.

Ингредиенты	Расход ингредиентов т. ингр./т. краски		Запас т. ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1	2	6
В	2	1	8

Вариант 19

При производстве автомобильных деталей двух видов используются последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе указаны в таблице 14:

Таблица 14 – Исходные данные к варианту №19.

Станок	Трудоемкость на 1 ед. продукции		Фонд времени, час
	A	B	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибыль на 1 ед. продукции (д.е.)	2	3	

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Вариант 20

Из двух сортов бензина образуются две смеси – А и В. Смесь А содержит 60% бензина 1-го сорта и 40% 2-го сорта; смесь В – 80% 1-го сорта и 20% 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А – 30 д.е., а смеси В – 32 д.е.

Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50 тонн бензина 1-го сорта и 30 тонн бензина 2-го сорта.

Вариант 21

Для производства двух видов автомобильных деталей А и Б предприятие использует 3 вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице 15. Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальна, при условии, что изделий Б нужно выпустить не менее, чем изделий А.

Таблица 15 – Исходные данные к варианту №21.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну деталь, кг		Общее количество сырья, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одной детали, ден. ед.	30	40	

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию задачи
4. Решение задачи линейного программирования стандартными средствами MathCAD.
5. Решение задачи линейного программирования графическим методом
6. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Что такое математическая модель задачи?
2. Какая функция называется целевой?
3. Что является допустимым решением ЗЛП?
4. Что является оптимальным решением ЗЛП?
5. Какие бывают формы записи ЗЛП?
6. Как перейти от симметричной формы записи ЗЛП к канонической?
7. Какой вид может иметь область допустимых решений?
8. Что представляет собой на плоскости целевая функция?
9. Перечислите основные этапы решения ЗЛП графическим способом?
10. Чем отличается нахождение минимума целевой функции от нахождения максимума при использовании графического способа решения ЗЛП?
11. Что является допустимым решением ЗЛП (покажите на плоскости)?
12. Что является оптимальным решением ЗЛП (покажите на плоскости)?
13. Какой вид может иметь область допустимых решений?
14. Что представляет собой на плоскости целевая функция?
15. Перечислите основные этапы решения ЗЛП графическим способом?
16. Чем отличается нахождение минимума целевой функции от нахождения максимума при использовании графического способа решения ЗЛП?

Лабораторная работа № 4

Симплекс-метод

Цель работы: нахождение оптимальных решений задач линейного программирования с использованием симплекс-метода.

Задание:

1. Составить математическую модель задачи;
2. Решить ЗЛП симплекс-методом

На предприятии возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии конкретных ресурсов (сырья, полуфабрикатов, оборудования, финансов и др.) или проблемы оптимизации распределения неоднородных ресурсов на производстве. Рассмотрим примеры постановки таких задач.

Задача 4.1. Для изготовления n типов автомобильных двигателей $И_1$, $И_2$,…,$И_n$ необходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные финансовые и др. Известно требуемое количество отдельного i-го ресурса для изготовления каждого j-го двигателя. Назовем эту величину нормой расхода c_{ij}. Пусть определенно количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент – a_i. Известна прибыль П, получаемая предприятием от изготовления каждого j-го двигателя. Требуется определить, какие двигатели и в каком количестве должны производиться предприятием, чтобы прибыль была максимальной. Исходные данные представлены в таблице 16.

Таблица 16 – Исходные данные к задаче 4.1.

Используемые ресурсы, Q_i	Изготавливаемые двигатели				Наличие ресурсов, a_i
	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	
Трудовые	3	5	2	7	15
Материальные	4	3	3	5	9
Финансовые	5	6	4	8	30
Прибыль, r_{ij}	40	50	30	20	

Задача 4.2. Пусть в распоряжении завода железобетонных изделий (ЖБИ) имеется m видов сырья (песок, щебень, цемент) в объемах a_j. Требуется произвести продукцию n видов. Дана технологическая норма c_{ij} потребления отдельного i – го вида сырья для изготовления единицы продукции каждого j – го вида. Известна прибыль П, получаемая от выпуска единицы продукции j – го вида. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве должен производить завод ЖБИ, чтобы получить максимальную прибыль. Исходные данные приведены в таблице 17.

Таблица 17 – Исходные данные к задаче 4.2.

Используемые ресурсы, Q_i	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, a_i
	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	
Песок	3	5	2	7	15
Щебень	4	3	3	5	9
Цемент	5	6	4	8	30
Прибыль, r_{ij}	40	50	30	20	

Задача 4.3. Пусть на предприятии после модернизации производства появился свободный ресурс времени оборудования. Предлагается организовать производство новых изделий нескольких наименований. Известно время, требуемое на изготовление отдельного изделия на каждом оборудовании, свободные резервы времени на каждой машине, а также прибыль, получаемая от выпуска каждого изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве целесообразно производить, чтобы получить максимальную прибыль.

Составим математическую модель задачи.

Количество изделий j – го наименования, которое может производить предприятие, обозначим через x_j. Зная количество каждого вида i – го ресурса a_{ij} для изготовления отдельного j – го типа изделия, норму расхода c_{ij} (табл.2), можно записать следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 < 15 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 < 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 < 30 \end{cases} \qquad (1)$$

Полученную систему неравенств можно записать в виде совокупности равенств, если в каждое из них ввести фиктивные изделия (дополнительные переменные) x_5, x_6, x_7 при изготовлении которых используют каждый оставшийся вид ресурса. В этом случае система (1) примет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 + x_5 = 15 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 = 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_7 = 30 \end{cases} \qquad (2)$$

Прибыль, получаемая от фиктивных изделий, принимается равной нулю. Критерий оптимизации (суммарная величина прибыли) можно представить так:

$$\sum c_{ij} x_j \to max \qquad (3)$$

Граничные условия будут записаны следующим образом:

$$x_j \geq 0 \qquad (4)$$

Совокупность системы ограничений (2), целевой функции (3) и граничных условий (4) образует математическую модель для нашей задачи.

<u>Решение задачи</u>.

Для решения данной задачи будем использовать симплекс – метод. Для его использования необходимо определить начальный базис, т.е. решение, удовлетворяющее системе равенств (2). Для этого требуется взять m неизвестных – по числу уравнений в системе (2). В нашей системе уравнений (m=3) это x_5, x_6, x_7, которые и выражаем через оставшиеся неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4. Систему уравнений записываем в следующем виде:

$$\begin{cases} x_5 = 15 - (3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4) \\ x_6 = 9 - (4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4) \\ x_7 = 30 - (5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4) \end{cases} \qquad (5)$$

Переменные, находящиеся в левой части системы, называются базисными (основными), а находящиеся справа – небазисными (неосновными). Для определения значений базисных переменных x_5, x_6, x_7 необходимо приравнять к нулю небазисные x_1, x_2, x_3, x_4 и подставить их в систему уравнений (5). Полученное таким образом решение является базисным. В нашей задаче оно будет выглядеть следующим образом: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \to (0,0,0,0,15,9,30)$.

После определения начального базиса можно перейти к использованию алгоритма симплекс – метода, который содержит следующие основные этапы:

1. Заполнение исходной симплекс-таблицы. В соответствии с полученной системой уравнений и критерием оптимизации заполним исходную симплекс-таблицу (таблица 18).

Таблица 18 – Исходная симплекс-таблица задачи 4.3.

Базисные переменные	Св. члены	Коэффициенты при базисных и небазисных переменных						
x_j		x_1	X_2 *	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5 *	15	3	5 *	2	7	1	0	0
x_6	9	4	3	3	5	0	1	0
x_7	30	5	6	4	8	0	0	1
Прибыль	0	40	50	30	20	0	0	0

2. Проверка базисного решения на оптимальность. Просматриваются знаки коэффициентов при небазисных переменных в целевой функции (прибыль). Если все коэффициенты при небазисных переменных неположительные, то исходный базис является оптимальным; в противном случае переходят к следующему этапу. В нашей задаче решение неоптимальное, так как все коэффициенты целевой функции при небазисных переменных положительны.

3. Проверка задачи на наличие решения. Если столбец коэффициентов при какой – либо небазисной переменной, имеющей положительный коэффициент в целевой функции, в системе уравнений состоит из одних неположительных чисел, то максимальное значение целевой функции стремится к бесконечности, т.е. задача решения не имеет. В нашей задаче решение существует.

4. Выбор из небазисных переменных той, которая способна при введении ее в базис увеличить значение целевой функции. Наиболее простой и чаще всего используемый способ состоит в выборе той небазисной переменной, которой соответствует наибольший положительный коэффициент в целевой функции. В нашей задаче это переменная x_2 (наибольший положительный коэффициент равен 50). Следовательно, переменную x_2 необходимо ввести в базис.

5. Определение базисной переменной, которая должна быть выведена из базиса. Для всех положительных коэффициентов в системе уравнений определяется отношение свободного члена уравнения к коэффициенту при вводимой в базис переменной. Для нашей задачи это будут следующие отношения: 15/5=3, 9/3=3, 60/6=5. Минимальное из полученных отношений указывает строку и базисную переменную, которая должна быть выведена из базиса. При наличии нескольких одинаковых отношений берется любое. Выведем из базиса переменную x_5.

6. Представление новой базисной переменной через небазисные. Строится новая симплекс-таблица (табл. 19). Отмечается звездочкой строка и столбец в предыдущей симплекс-таблице (табл. 18) для выводимой из базиса и вводимой в него переменной. Коэффициент, находящийся на пересечении строки и столбца, отмеченных звездочками, называется разрешающим и также помечается звездочкой. Все коэффициенты строки со звездочкой делятся на разрешающий элемент, а результаты расчета заносятся в новую симплекс-таблицу. В нашей задаче на первом шаге разрешающий элемент равен 5 (табл. 18). Результаты деления каждого элемента строки, отмеченной звездочкой, заносятся в строку 1 новой таблицы (табл. 19).

7. Представление остальных базисных переменных и целевой функции через новый набор небазисных переменных. Для этого коэффициенты в последней таблице при новой базисной переменной умножаются на такое число, чтобы после сложения с преобразуемой строкой предыдущей таблицы в столбце новой таблице при базисной переменной появился нуль. Результаты сложения заносятся в новую симплекс-таблицу. Исходя из этого, для получения коэффициентов второй строки в новой таблице (табл. 19) умножаем коэффициенты при новой базисной переменной x_2 на число (-3), складываем с соответствующими коэффициентами второй строки таблицы 3 и результаты расчета заносим во вторую строку таблицы 4. Аналогичные преобразования проводим и для других строк. После этого выполняем новую

итерацию. Цикл расчета начинается с этапа 2 и повторяется до нахождения оптимального решения.

Таблица 19 – Новая симплекс-таблица к задаче 4.3.

Базисные переменные	Св. члены	Коэффициенты при базисных и небазисных переменных						
x_j		x_1	x_2	x_3 *	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	3	3/5	1	2/5	7/5	1/5	0	0
x_6 *	0	11/5	0	9/5 *	4/5	-3/5	1	0
x_7	12	7/5	0	8/5	-2/5	-6/5	0	1
прибыль	-150	10	0	10	-50	-10	0	0

Так как в последней строке таблицы 4 не все коэффициенты целевой функции при небазисных переменных неположительные, то решение неоптимальное, следовательно, выполняем следующий итерационный цикл расчета и строим новую симплекс-таблицу (табл. 20). В качестве вводимой в базис небазисной переменной принимаем x_3 (или x_1), имеющую наибольший положительный коэффициент. Отмечаем звездочкой столбец x_3. В качестве выводимой из базиса переменной берем x_6, так как частное от деления свободного члена на соответствующий положительный коэффициент минимально. Разрешающий множитель равен 9/5. Результаты расчета представлены в таблице 20.

Таблица 20 – Новая симплекс-таблица к задаче 4.3.

Базисные переменные	Св. члены	Коэффициенты при базисных и небазисных переменных						
x_j		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	3	1/9	1	0	1/9	1/3	-2/9	0
x_3	0	11/9	0	1	4/9	-3/9	5/9	0
x_7	12	-5/9	0	0	-10/9	-2/3	-8/9	1
прибыль	-150	-20/9	0	0	-490/9	-20/3	-50/9	0

Последняя строка таблицы содержит только неположительные коэффициенты при небазисных переменных, следовательно, решение оптимально и выглядит так:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	3	0	0	0	0	12

Из полученных результатов следует, что предприятия наиболее выгодно изготовление только изделия $И_2$, производство которого обеспечит максимальную прибыль в размере 150 у.е. При этом материальные и трудовые ресурсы будут задействованы полностью, а финансовые недоиспользованы на 12 единиц.

Решение задачи с использованием MathCAD

$$Y(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7) := 40\cdot x1 + 50\cdot x2 + 30\cdot x3 + 20\cdot x4 + 0\cdot x5 + 0\cdot x6 + 0\cdot x7$$

Начальные приближения

$x1 := 0$ $x2 := 0$ $x3 := 0$ $x4 := 0$

$x5 := 15$ $x6 := 9$ $x7 := 30$

Given

Система ограничений

$$3\cdot x1 + 5\cdot x2 + 2\cdot x3 + 7\cdot x4 + 1\cdot x5 = 15$$

$$4\cdot x1 + 3\cdot x2 + 3\cdot x3 + 5\cdot x4 + 1\cdot x6 = 9$$

$$5\cdot x1 + 6\cdot x2 + 4\cdot x3 + 8\cdot x4 + 1\cdot x7 = 30$$

$x1 \ge 0$ $x2 \ge 0$ $x3 \ge 0$ $x4 \ge 0$

$x5 \ge 0$ $x6 \ge 0$ $x7 \ge 0$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \\ x7 \end{pmatrix} := Maximize(Y,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7)$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \\ x7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3.553 \times 10^{-15} \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$Y(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7) = 150$$

Варианты заданий.

Примечание:

Для нечетных вариантов выполняется задача 1, для четных вариантов выполняется задача 2.

Задача 1.

Для производства двух моделей автомобилей A и B используется три типа технологического оборудования. На производство одного автомобиля модели A оборудование первого типа используется a1 часов, оборудование второго типа – a2 часов, третьего – a3 часов. На производство одного автомобиля модели B оборудование первого типа используется b1 часов, оборудование второго типа – b2 часов, третьего – b3 часов.

На изготовление всех изделий администрация завода может предоставить оборудование первого типа не более, чем на t1 часов, оборудование второго типа не более, чем на t2 часов, оборудование третьего типа не более, чем на t3 часов.

Прибыль от реализации одного автомобиля марки A составляет r1 тыс. денежных единиц, марки B – r2 тыс. денежных единиц.

Составить план выпуска автомобилей, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задача 2.

Для производства двух видов двигателей A и B используется три вида сырья.

На производство одного двигателя A требуется затратить сырья первого вида a1 кг, сырья второго вида – a2 кг, третьего – a3 кг. На производство одного двигателя B требуется затратить сырья первого вида b1 кг, сырья второго вида – b2 кг, третьего – b3 кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве t1 кг, второго вида в количестве t2 кг, третьего вида t3 кг.

Прибыль от реализации одного двигателя А составляет r1 денежных единиц, двигателя В – r2 денежных единиц.

Составить план выпуска двигателей, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вариант 1
a1=5, b1=3, t1=750;
a2=4, b2=3, t2=630;
a3=3, b3=4, t3=700;
r1=5, r2=6.
	Вариант 2
	a1=6, b1=2, t1=600;
	a2=4, b2=3, t2=520;
	a3=3, b3=4, t3=600;
	r1=6, r2=3.
		Вариант 3
		a1=4, b1=3, t1=440;
		a2=3, b2=4, t2=393;
		a3=3, b3=5, t3=450;
		r1=6, r2=5.

Вариант 4
a1=3, b1=2, t1=273;
a2=3, b2=3, t2=300;
a3=2, b3=5, t3=380;
r1=4, r2=5.
	Вариант 5
	a1=2, b1=1, t1=438;
	a2=3, b2=6, t2=747;
	a3=3, b3=7, t3=812;
	r1=7, r2=5.
		Вариант 6
		a1=4, b1=3, t1=480;
		a2=3, b2=4, t2=444;
		a3=2, b3=6, t3=546;
		r1=2 , r2=4.

Вариант 7
a1=8, b1=2, t1=840;
a2=6, b2=3, t2=870;
a3=3, b3=2, t3=560;
r1=6, r2=2.
	Вариант 8
	a1=5, b1=2, t1=505;
	a2=3, b2=3, t2=393;
	a3=2, b3=3, t3=348;
	r1=7, r2=4.
		Вариант 9
		a1=6, b1=2, t1=600;
		a2=4, b2=3, t2=520;
		a3=3, b3=4, t3=600;
		r1=6. r2=3.

Вариант 10
a1=2, b1=3, t1=428;
a2=3, b2=6, t2=672;
a3=2, b3=8, t3=672;
r1=3, r2=8.
	Вариант 11
	a1=3, b1=2, t1=273;
	a2=3, b2=3, t2=300;
	a3=2, b3=5, t3=380;
	r1=4, r2=5.
		Вариант 12
		a1=7, b1=3, t1=1365;
		a2=6, b2=3, t2=1245;
		a3=1, b3=2, t3=650;
		r1=6, r2=5.

Вариант 13
a1=4, b1=3, t1=480;
a2=3, b2=4, t2=444;
a3=2, b3=6, t3=546;
r1=2, r2=4.
	Вариант 14
	a1=5, b1=3, t1=750;
	a2=4, b2=3, t2=630;
	a3=3, b3=4, t3=700;
	r1=5, r2=6.
		Вариант 15
		a1=5, b1=2, t1=505 ;
		a2=3, b2=3, t2=393;
		a3=2, b3=3, t3=348;
		r1=7, r2=4.

Вариант 16
a1=4, b1=3, t1=440;
a2=3, b2=4, t2=393;
a3=3, b3=5, t3=450;
r1=6, r2=5.
	Вариант 17
	a1=2, b1=3, t1=428;
	a2=3, b2=6, t2=672;
	a3=2, b3=8, t3=672;
	r1=3, r2=8.
		Вариант 18
		a1=2, b1=1, t1=438;
		a2=3, b2=6, t2=747;
		a3=3, b3=7, t3=812;
		r1=7, r2=5.

Вариант 19
a1=7, b1=3, t1=1365;
a2=6, b2=3, t2=1245;
a3=1, b3=2, t3=650;
r1=6, r2=5.
	Вариант 20
	a1=8, b1=2, t1=840;
	a2=6, b2=3, t2=870;
	a3=3, b3=2, t3=560;
	r1=6, r2=2.
		Вариант 21
		a1=5, b1=3, t1=750;
		a2=4, b2=3, t2=630;
		a3=3, b3=4, t3=700;
		r1=5, r2=6.

Вариант 22
a1=6, b1=2, t1=600;
a2=4, b2=3, t2=520;
a3=3, b3=4, t3=600;
r1=6, r2=3.
	Вариант 23
	a1=4, b1=3, t1=440;
	a2=3, b2=4, t2=393;
	a3=3, b3=5, t3=450;
	r1=6, r2=5.
		Вариант 24
		a1=3, b1=2, t1=273;
		a2=3, b2=3, t2=300;
		a3=2, b3=5, t3=380;
		r1=4, r2=5.

Вариант 25
a1=2, b1=1, t1=438;
a2=3, b2=6, t2=747;
a3=3, b3=7, t3=812;
r1=7, r2=5.
	Вариант 26
	a1=4, b1=3, t1=480;
	a2=3, b2=4, t2=444;
	a3=2, b3=6, t3=546;
	r1=2, r2=4.
		Вариант 27
		a1=8, b1=2, t1=840;
		a2=3, b2=3, t2=393;
		a3=2, b3=3, t3=348;
		r1=6, r2=4.

Вариант 28
a1=5, b1=2, t1=505;
a2=6, b2=3, t2=870;
a3=3, b3=2, t3=560;
r1=7, r2=2.
	Вариант 29
	a1=2, b1=3, t1=428;
	a2=3, b2=6, t2=672;
	a3=2, b3=8, t3=672;
	r1=3, r2=8.
		Вариант 30
		a1=7, b1=3, t1=1365;
		a2=6, b2=3, t2=1245;
		a3=1, b3=2, t3=650;
		r1=6, r2=5.

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию задачи
4. Решение задачи линейного программирования с использованием Mathcad (минимальний уровень) и расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
5. Решение задачи линейного программирования с использованием любого языка программирования (листинг программы и результат ее выполнения)
6. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы

1. В какой форме должна быть записана ЗЛП для решения ее симплекс-методом?
2. Какие переменные являются зависимыми (базисными), а какие – независимыми (свободными)?
3. Какие переменные приравниваются к 0 для нахождения первого опорного плана?

4. Что является первым опорным решением ЗЛП?

5. Что выступает критерием оптимальности при минимизации (максимизации) целевой функции?

6. Каков алгоритм симплекс-метода?

7. Как выбирается направляющий столбец?

8. Как выбирается направляющая строка?

9. Какой элемент называется разрешающим?

10. Когда ЗЛП не имеет решения?

11. Как определяются элементы новой симплекс-таблицы (разрешающий элемент, элементы направляющего столбца и строки, остальные элементы)?

Лабораторная работа № 5

Двойственная задача линейного программирования

Цель работы: составление двойственных задач линейного программирования, нахождение оптимальных решений прямой и двойственной задач, анализ полученных результатов.

Задание:

1. Составить математическую модель двойственной задачи к задаче из вариантов;

2. Решить прямую и двойственную ЗЛП симплекс-методом;

3. Провести экономико-математический анализ полученных оптимальных решений.

Задача об оптимальной производственной программе.

Задача 5.1. Предприятию необходимо выпустить номенклатуру из 5 видов продукции в объемах (неизвестных) $x_i, i=1..5$, используя 4 вида ресурсов. Для выпуска одной единицы изделия вида i требуется a_{ij} ресурсов вида j. Тогда при выпуске изделий расход каждого ресурса не должен превышать его запасов b_j. Данные о количестве ресурсов, необходимых для производства каждого вида продукции, имеющиеся ресурсы и прибыль c_i от производства единицы изделия каждого вида приведены в таблице 21.

Таблица 21 – Исходные данные к задаче 5.1.

Изд,i / Ресурс, j	I	II	III	IV	V	Огранич b_j
I	1	2	3	2	4	700
II	5	4	3	2	1	250
III	3	4	2	5	3	600
IV	4	2	5	3	1	400
Прибыль c_i	25	35	25	40	30	

Составим математическую модель задачи. Система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 700 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \le 250 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 600 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 \le 400 \end{cases} \qquad (1)$$

Целевая функция: $F(x) = 25x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 40x_4 + 30x_5 \to max$

Решение задачи в MathCAD.

Исходные данные:

N - количество производимых изделий

b - вектор имеющихся ресурсов размерности m

A - матрица размерности $(m \times N)$, каждый элемент которой является расходом ресурса вида i на производство единицы изделия вида j

c - вектор прибыли от производства единицы изделия каждого вида

x - начальное приближение

$n := 5 \qquad m := 4$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 700 \\ 250 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \\ 25 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$F(X) := c \cdot X$

Given

$A \cdot X \le b \qquad X \ge 0$

$y := \text{Maximize}(F, X)$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18.182 \\ 22.727 \\ 150 \end{pmatrix} \qquad F(y) = 5.864 \times 10^3 \qquad A \cdot y = \begin{pmatrix} 700 \\ 250 \\ 600 \\ 309.091 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача

Прямая и двойственная задача тесно связаны. Эта связь заключается в следующем:

1. если прямая задача является задачей максимизации, то двойная задача – задачей минимизации, и наоборот;
2. коэффициенты функции в прямой задаче являются ограничениями в двойственной задаче;
3. ограничения в прямой задаче становятся коэффициентами функции;
4. знаки неравенств в ограничениях меняются на противоположные;
5. матрица системы равенств транспонируется.

Для нашей задачи.

Система ограничений:

$$\begin{cases} u_1 + 5u_2 + 3u_3 + 4u_4 \ge 25 \\ 2u_1 + 4u_2 + 4u_3 + 2u_4 \ge 35 \\ 3u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 5u_4 \ge 25 \\ 2u_1 + 2u_2 + 5u_3 + 3u_4 \ge 40 \\ 4u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4 \ge 30 \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F(u) = 700u_1 + 250u_2 + 600u_3 + 400u_4 \rightarrow min$$

Решение задачи в MathCAD.

$n := 5 \qquad m := 4$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 700 \\ 250 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \\ 25 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$F(X) := c \cdot X$

Given

$A \cdot X \geq b \qquad X \geq 0$

$y := \mathrm{Minimize}(F, X)$

$$y = \begin{pmatrix} 2.273 \\ 1.818 \\ 6.364 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F(y) = 5.864 \times 10^3 \qquad A \cdot y = \begin{pmatrix} 30.455 \\ 37.273 \\ 25 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Решение задачи показывает, что наименьшую ценность для производителя имеет четвертый ресурс: он имеет неиспользованный запас, его теневая стоимость нулевая. Третий ресурс имеет наиболее высокую теневую цену, и это ресурс целесообразно приобрести в первую очередь с целью увеличения прибыли. Значения целевой функции в прямой и двойственной задачах совпадают. Это основное свойство двойственных задач.

Варианты заданий.

Примечание:

Для нечетных вариантов выполняется задача 1, для четных вариантов выполняется задача 2.

<u>Задача 1.</u>

Для производства двух видов двигателей А и В используется три типа технологического оборудования. На производство одного двигателя А оборудование первого типа используется a1 ч, оборудование второго типа – a2 ч, третьего – a3 ч. На производство одного двигателя B оборудование первого типа используется b1 ч, оборудование второго типа – b2 ч, третьего – b3 ч.

На изготовление всех двигателей администрация предприятия может предоставить оборудование первого типа не более, чем на t1 часов, оборудование второго типа не более, чем на t2 часов, оборудование третьего типа не более, чем на t3 часов.

Прибыль от реализации одного двигателя A составляет r1 денежных единиц, двигателя B – r2 денежных единиц.

Составить план выпуска двигателей, обеспечивающий максимальную прибыль.

<u>Задача 2.</u>

Для производства двух марок автомобилей A и B используется три вида сырья.

На производство одного автомобиля марки A требуется затратить сырья первого вида a1 кг, сырья второго вида – a2 кг, третьего – a3 кг. На производство одного автомобиля марки B требуется затратить сырья первого вида b1 кг, сырья второго вида – b2 кг, третьего – b3 кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве t1 кг, второго вида – в количестве t2 кг, третьего вида – t3 кг.

Прибыль от реализации одного автомобиля марки A составляет r1 тыс. денежных единиц, изделия B – r2 тыс. денежных единиц.

Составить план выпуска автомобилей, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вариант 1
a1=5, b1=3, t1=750;
a2=4, b2=3, t2=630;
a3=3, b3=4, t3=700;
r1=5, r2=6.
	Вариант 2
	a1=6, b1=2, t1=600;
	a2=4, b2=3, t2=520;
	a3=3, b3=4, t3=600;
	r1=6, r2=3.
		Вариант 3
		a1=4, b1=3, t1=440;
		a2=3, b2=4, t2=393;
		a3=3, b3=5, t3=450;
		r1=6, r2=5.

Вариант 4
a1=3, b1=2, t1=273;
a2=3, b2=3, t2=300;
a3=2, b3=5, t3=380;
r1=4, r2=5.
	Вариант 5
	a1=2, b1=1, t1=438;
	a2=3, b2=6, t2=747;
	a3=3, b3=7, t3=812;
	r1=7, r2=5.
		Вариант 6
		a1=4, b1=3, t1=480;
		a2=3, b2=4, t2=444;
		a3=2, b3=6, t3=546;
		r1=2 , r2=4.

Вариант 7
a1=8, b1=2, t1=840;
a2=6, b2=3, t2=870;
a3=3, b3=2, t3=560;
r1=6, r2=2.
	Вариант 8
	a1=5, b1=2, t1=505;
	a2=3, b2=3, t2=393;
	a3=2, b3=3, t3=348;
	r1=7, r2=4.
		Вариант 9
		a1=6, b1=2, t1=600;
		a2=4, b2=3, t2=520;
		a3=3, b3=4, t3=600;
		r1=6. r2=3.

Вариант 10
a1=2, b1=3, t1=428;
a2=3, b2=6, t2=672;
a3=2, b3=8, t3=672;
r1=3, r2=8.
	Вариант 11
	a1=3, b1=2, t1=273;
	a2=3, b2=3, t2=300;
	a3=2, b3=5, t3=380;
	r1=4, r2=5.
		Вариант 12
		a1=7, b1=3, t1=1365;
		a2=6, b2=3, t2=1245;
		a3=1, b3=2, t3=650;
		r1=6, r2=5.

Вариант 13
a1=4, b1=3, t1=480;
a2=3, b2=4, t2=444;
a3=2, b3=6, t3=546;
r1=2, r2=4.
	Вариант 14
	a1=5, b1=3, t1=750;
	a2=4, b2=3, t2=630;
	a3=3, b3=4, t3=700;
	r1=5, r2=6.
		Вариант 15
		a1=5, b1=2, t1=505 ;
		a2=3, b2=3, t2=393;
		a3=2, b3=3, t3=348;
		r1=7, r2=4.

Вариант 16
a1=4, b1=3, t1=440;
a2=3, b2=4, t2=393;
a3=3, b3=5, t3=450;
r1=6, r2=5.
	Вариант 17
	a1=2, b1=3, t1=428;
	a2=3, b2=6, t2=672;
	a3=2, b3=8, t3=672;
	r1=3, r2=8.
		Вариант 18
		a1=2, b1=1, t1=438;
		a2=3, b2=6, t2=747;
		a3=3, b3=7, t3=812;
		r1=7, r2=5.

Вариант 19
a1=7, b1=3, t1=1365;
a2=6, b2=3, t2=1245;
a3=1, b3=2, t3=650;
r1=6, r2=5.
	Вариант 20
	a1=8, b1=2, t1=840;
	a2=6, b2=3, t2=870;
	a3=3, b3=2, t3=560;
	r1=6, r2=2.
		Вариант 21
		a1=5, b1=3, t1=750;
		a2=4, b2=3, t2=630;
		a3=3, b3=4, t3=700;
		r1=5, r2=6.

Вариант 22
a1=6, b1=2, t1=600;
a2=4, b2=3, t2=520;
a3=3, b3=4, t3=600;
r1=6, r2=3.
	Вариант 23
	a1=4, b1=3, t1=440;
	a2=3, b2=4, t2=393;
	a3=3, b3=5, t3=450;
	r1=6, r2=5.
		Вариант 24
		a1=3, b1=2, t1=273;
		a2=3, b2=3, t2=300;
		a3=2, b3=5, t3=380;
		r1=4, r2=5.

Вариант 25
a1=2, b1=1, t1=438;
a2=3, b2=6, t2=747;
a3=3, b3=7, t3=812;
r1=7, r2=5.
	Вариант 26
	a1=4, b1=3, t1=480;
	a2=3, b2=4, t2=444;
	a3=2, b3=6, t3=546;
	r1=2, r2=4.
		Вариант 27
		a1=8, b1=2, t1=840;
		a2=3, b2=3, t2=393;
		a3=2, b3=3, t3=348;
		r1=6, r2=4.

Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
a1=5, b1=2, t1=505;	a1=2, b1=3, t1=428;	a1=7, b1=3, t1=1365;
a2=6, b2=3, t2=870;	a2=3, b2=6, t2=672;	a2=6, b2=3, t2=1245;
a3=3, b3=2, t3=560;	a3=2, b3=8, t3=672;	a3=1, b3=2, t3=650;
r1=7, r2=2.	r1=3, r2=8.	r1=6, r2=5.

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию прямой и двойственной задач
4. Решение прямой и двойственной ЗЛП симплекс-методом с использованием MathCAD (минимальний уровень) и расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
5. Решение задачи линейного программирования с использованием любого языка программирования (листинг программы и результат ее выполнения)
6. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Сформулируйте экономическое содержание двойственной задачи производственного планирования.
2. Сформулируйте общие правила построения двойственной задачи.
3. Чему равняется количество переменных двойственной задачи?
4. Чему равняется количество ограничений двойственной задачи?
5. Что ограничению-неравенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче? Что ограничению-равенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче?
6. Что соответствует положительной переменной $x_{j \geq 0}$ в двойственной задаче? А что переменной произвольного знака?

7. Какая взаимосвязь между матрицами систем ограничений прямой и двойственной задачи?

8. Что характеризует дефицитность ресурсов?

9. Как проводится анализ на чувствительность оптимального решения?

10. Как используется двойственная оценка для оценки эффективности выпуска того или иного вида продукции?

Лабораторная работа №6

Транспортная задача

Цель работы: нахождение оптимального решения транспортной задачи.

Задание:

Решить транспортную задачу (найти оптимальный план) с помощью метода потенциалов и MathCAD.

Задача 6.1. Из трех торфопредприятий необходимо вывезти торфокомпост в четыре совхоза. Запасы торфопредприятий следующие: первого – 10 т, второго – 12 т, третьего – 13 т. Первому совхозу требуется 9 т торфокомпоста, второму – 6 т, третьему – 10 т, четвертому – 10 т. Необходимо составить такой план транспортировки торфокомпоста, чтобы транспортные издержки на весь объем перевозки были минимальными. Стоимость перевозки 1 т торфокомпоста от каждого торфопредприятия к каждому совхозу различна и характеризуется данными из таблицы 22:

Таблица 22 – Исходные данные к задаче 6.1.

Предприятия	Совхозы			
	1	2	3	4
1	6	7	6	4
2	5	3	4	7
3	6	1	2	8

1. Выбор начального опорного решения

Опорное решение найдем методом северо-западного угла. Результаты построения опорного решения приведены в следующей таблице 23:

Таблица 23 – Опорное решение задачи 6.1.

5 6	5 7	6	4
4 5	1 3	7 4	0 7
6	1	3 2	10 8

Найдем суммарные затраты на перевозку как сумму произведений элементов в заполненных клетках:

$$L(X) = 30 + 35 + 20 + 3 + 28 + 6 + 80 = 202 \text{ руб}$$

1. Решение методом потенциалов

Построим систему потенциалов, соответствующих найденному опорному решению.

Найдем значения потенциалов в нашей задаче. Одному из потенциалов зададим значение произвольно: пусть U_1=0. Остальные потенциалы для заполненных клеток находятся аналогично:

$U_1 = 0;$

$V_1 = C_{11} - U_1 = 6 - 0 = 6;$

$V_2 = C_{12} - U_1 = 7 - 0 = 7;$

$U_2 = C_{21} - V_1 = 5 - 6 = -1;$

$V_3 = C_{23} - U_2 = 4 - (-1) = 5;$

$U_3 = C_{33} - V_3 = 2 - 5 = -3;$

$V_4 = C_{34} - U_3 = 8 - (-3) = 11.$

Результаты вычислений запишем в таблицу 24:

Таблица 24 – Преобразование опорного решения задачи 6.1.

5 6	5 7	6	4	10	$U_1 = 0$
4 5	1 3	7 4	7	12	U2=-1
6	1	3 2	10 8	13	U3=-3
9	6	10	10	35	
V1=6	V2=7	V3=5	V4=11		

По данным потенциалам проверим, является ли опорное решение оптимальным. С этой целью для всех свободных (незаполненных) клеток проверим выполнимость условия:

$$C_{ij} - (U_i + V_j) \geq 0.$$

В нашем случае

$C_{13} - (U_1 + V_3) = 6 - (5 + 0) = 1;$

$C_{31} - (U_3 + V_1) = 6 - (6 - 3) = 3;$

$C_{32} - (U_3 + V_2) = 1 - (7 - 3) = -3;$
$C_{14} - (U_1 + V_4) = 4 - (11 + 0) = -7;$
$C_{24} - (U_2 + V_4) = 7 - (11 - 1) = -3.$

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в клетках (3,2), (1,4), и (2,4) разность отрицательна.

Перейдем к новому опорному решению. Рассмотрим клетку таблицы (1,4), которой соответствует наибольшая отрицательная оценка. Ее пополним новым значением поставки w. Определим величину поставки w, распределяемой в таблице. Она равна наименьшей из уменьшаемых поставок: w = min {5,7,10} = 5.

Таблица 25 – Преобразование решения задачи 6.1.

5 / 6	5-w / 7	6	w / 4	10
4 / 5	1+w / 3	7-w / 4	7	12
6	1	3+w / 2	10-w / 8	13
9	6	10	10	

Получим новое опорное решение:

Таблица 26 – Новое опорное решение задачи 6.1.

5 / 6	7	6	5 / 4	10
4 / 5	6 / 3	2 / 4	7	12
6	1	8 / 2	5 / 8	13
9	6	10	10	

Вычислим суммарные затраты на перевозку груза для найденного решения:

$$L(X) = 30 + 20 + 18 + 8 + 16 + 20 + 40 = 152 \text{ руб.}$$

Пересчитаем значения потенциалов и проверим оптимальность полученного решения.

Таблица 27 – Проверка оптимальности нового опорного решения задачи 6.1.

5 6	 7	 6	5 4	10	U1=0
4 5	6 3	2 4	 7	12	U2=-1
 6	 1	8 2	5 8	13	U3=-3
9	6	10	10		
V1=6	V2=4	V3=5	V4=4		

$C_{12} - (U_1 + V_2) = 7 - (4 + 0) = 3;$

$C_{13} - (U_1 + V_3) = 6 - (0 + 5) = 1;$

$C_{24} - (U_2 + V_4) = 7 - (-1 + 4) = 4;$

$C_{31} - (U_3 + V_1) = 6 - (6 - 3) = 3;$

$C_{32} - (U_3 + V_2) = 1 - (4 - 3) = 0$

Во всех свободных клетках разность неотрицательна, значит данное решение является оптимальным.

Вывод: $x_{11} = 5$, $x_{14} = 5$, $x_{21} = 4$, $x_{22} = 6$,$x_{23}=2$ $x_{33} = 8$, $x_{34} = 5$, суммарные затраты на перевозку L(X) = 152 рубля.

Пример решения в MathCAD.

Исходные данные.

b_j / a_i	$b_1 = 110$	$b_2 = 80$	$b_3 = 100$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 250$	1	4	7	9	1
$a_2 = 300$	2	3	1	2	4
$a_3 = 150$	2	1	3	1	4

ORIGIN := 1

$i := 1..18$ $\qquad x_i := 0$

$F1(x) := 1 \cdot x_1 + 4 x_2 + 7 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$

$F2(x) := 2 \cdot x_7 + 3 \cdot x_8 + 1 \cdot x_9 + 2 \cdot x_{10} + 4 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12}$

$F3(x) := 2 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{14} + 3 \cdot x_{15} + 1 \cdot x_{16} + 4 \cdot x_{17} + 0 \cdot x_{18}$

$F(x) := F1(x) + F2(x) + F3(x)$

Given

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 250$

$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 300$

$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 150$

$x_1 + x_7 + x_{13} = 110$ $\qquad x_2 + x_8 + x_{14} = 80$

$x_3 + x_9 + x_{15} = 100$ $\qquad x_4 + x_{10} + x_{16} = 90$

$x_5 + x_{11} + x_{17} = 70$ $\qquad x_6 + x_{12} + x_{18} = 250$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0 \quad x_6 \ge 0$

$x_7 \ge 0 \quad x_8 \ge 0 \quad x_9 \ge 0 \quad x_{10} \ge 0 \quad x_{11} \ge 0 \quad x_{12} \ge 0$

$x_{13} \ge 0 \quad x_{14} \ge 0 \quad x_{15} \ge 0 \quad x_{16} \ge 0 \quad x_{17} \ge 0 \quad x_{18} \ge 0$

$D := \text{Minimize}(F, x)$

$D^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	110	0	0	0	70	70	0	0	100	20	0	180	0	80	0	70	0	0

$F1(D) = 180$

$F2(D) = 140$

$F3(D) = 150$

$F(D) = 470$

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант 1.

b_j / a_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 120$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 80$
$a_1 = 200$	1	2	3	5	2
$a_2 = 150$	4	6	7	3	1
$a_3 = 350$	2	2	3	4	5

Вариант 2.

b_j / a_i	$b_1 = 140$	$b_2 = 110$	$b_3 = 170$	$b_4 = 90$	$b_5 = 160$
$a_1 = 250$	4	3	4	5	3
$a_2 = 200$	2	4	5	7	8
$a_3 = 220$	4	3	7	2	1

Вариант 3.

b_j / a_i	$b_1 = 110$	$b_2 = 140$	$b_3 = 220$	$b_4 = 190$	$b_5 = 120$
$a_1 = 180$	2	4	5	8	6
$a_2 = 300$	7	3	6	4	5
$a_3 = 300$	8	5	6	5	3

Вариант 4.

b_j / a_i	$b_1 = 160$	$b_2 = 120$	$b_3 = 140$	$b_4 = 200$	$b_5 = 130$
$a_1 = 300$	1	4	2	1	3
$a_2 = 250$	6	2	3	5	1
$a_3 = 200$	2	3	4	1	4

Вариант 5.

b_j / a_i	$b_1 = 110$	$b_2 = 200$	$b_3 = 90$	$b_4 = 100$	$b_5 = 120$
$a_1 = 100$	5	2	3	6	1
$a_2 = 300$	1	1	4	4	2
$a_3 = 220$	4	1	2	3	5

Вариант 6.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$b_5 = 300$
$a_1 = 150$	5	1	2	3	4
$a_2 = 320$	7	8	1	1	2
$a_3 = 400$	4	1	3	1	2

Вариант 7.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 150$	$b_4 = 200$	$b_5 = 150$
$a_1 = 200$	1	4	5	3	1
$a_2 = 350$	2	3	1	4	2
$a_3 = 150$	2	1	3	1	1

Вариант 8.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 90$	$b_3 = 200$	$b_4 = 30$	$b_5 = 80$
$a_1 = 200$	1	2	4	1	5
$a_2 = 120$	1	2	1	3	1
$a_3 = 180$	2	1	3	3	1

Вариант 9.

b_j / a_i	$b_1 =100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 130$	$b_4 = 100$	$b_5 = 90$
$a_1 = 300$	1	4	5	3	1
$a_2 = 120$	2	1	2	1	2
$a_3 = 120$	3	1	4	2	1

Вариант 10.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 20$	$b_3 = 70$	$b_4 = 90$	$b_5 = 180$
$a_1 = 300$	1	4	2	1	2
$a_2 = 90$	2	2	3	1	3
$a_3 = 70$	3	4	5	6	7

Вариант 11.

b_j / a_i	$b_1 =100$	$b_2 = 200$	$b_3 = 130$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 250$	1	4	7	2	1
$a_2 = 200$	2	5	1	4	3
$a_3 = 270$	46	27	36	40	45

Вариант 12.

b_j / a_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 130$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 240$	1	4	7	8	1
$a_2 =250$	2	3	1	4	1
$a_3 = 250$	5	1	3	2	3

Вариант 13.

b_j / a_i	$b_1 = 140$	$b_2 = 110$	$b_3 = 170$	$b_4 = 110$	$b_5 = 140$
$a_1 = 250$	1	2	3	5	2
$a_2 = 200$	4	6	7	3	1
$a_3 = 220$	3	2	3	4	5

Вариант 14.

b_j / a_i	$b_1 = 110$	$b_2 = 130$	$b_3 = 200$	$b_4 = 180$	$b_5 = 110$
$a_1 = 230$	2	4	5	8	6
$a_2 = 150$	7	3	6	4	5
$a_3 = 350$	8	2	3	4	5

Вариант 15.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 140$	$b_4 = 200$	$b_5 = 170$
$a_1 = 300$	1	4	2	1	3
$a_2 = 230$	6	2	3	5	1
$a_3 = 200$	2	3	4	1	4

Вариант 16.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$b_5 = 300$
$a_1 = 100$	2	5	3	6	1
$a_2 = 320$	1	1	4	4	2
$a_3 = 400$	4	1	2	3	5

Вариант 17.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 90$	$b_4 = 110$	$b_5 = 150$
$a_1 = 200$	1	4	7	2	1
$a_2 = 250$	2	5	1	4	3
$a_3 = 100$	2	3	1	2	1

Вариант 18.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$b_5 = 300$
$a_1 = 100$	1	4	2	1	3
$a_2 = 320$	6	2	3	5	1
$a_3 = 400$	2	3	4	1	4

Вариант 19.

a_i \ b_j	$b_1 = 180$	$b_2 = 110$	$b_3 = 110$	$b_4 = 100$	$b_5 = 170$
$a_1 = 250$	1	2	4	1	5
$a_2 = 200$	1	2	1	3	1
$a_3 = 220$	2	1	3	3	1

Вариант 20.

a_i \ b_j	$b_1 = 110$	$b_2 = 150$	$b_3 = 200$	$b_4 = 130$	$b_5 = 110$
$a_1 = 200$	5	2	3	6	1
$a_2 = 150$	1	1	4	4	2
$a_3 = 350$	4	3	1	2	1

Вариант 21.

a_i \ b_j	$b_1 = 100$	$b_2 = 20$	$b_3 = 70$	$b_4 = 100$	$b_5 = 180$
$a_1 = 300$	1	4	7	2	3
$a_2 = 90$	1	5	3	1	6
$a_3 = 80$	2	1	3	1	4

Вариант 22.

a_i \ b_j	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 = 210$	$b_4 = 210$	$b_5 = 110$
$a_1 = 300$	1	4	1	5	6
$a_2 = 250$	1	3	1	1	2
$a_3 = 200$	4	1	2	2	3

Вариант 23.

a_i \ b_j	$b_1 = 160$	$b_2 = 130$	$b_3 = 100$	$b_4 = 150$	$b_5 = 160$
$a_1 = 350$	1	5	1	7	1
$a_2 = 200$	2	3	1	8	3
$a_3 = 150$	6	7	9	10	8

Вариант 24.

a_i \ b_j	$b_1 = 110$	$b_2 = 90$	$b_3 = 100$	$b_4 = 80$	$b_5 = 200$
$a_1 = 180$	1	4	7	9	1
$a_2 = 300$	2	3	1	2	4
$a_3 = 100$	5	6	7	1	2

Вариант 25.

b_j / a_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 130$	$b_3 = 100$	$b_4 = 150$	$b_5 = 200$
$a_1 = 250$	1	5	1	3	1
$a_2 = 300$	2	4	7	1	3
$a_3 = 150$	2	4	5	6	1

Вариант 26.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 120$	$b_4 = 110$	$b_5 = 120$
$a_1 = 200$	1	4	2	3	1
$a_2 = 150$	2	1	7	8	1
$a_3 = 200$	2	1	3	1	4

Вариант 27.

b_j / a_i	$b_1 = 110$	$b_2 = 80$	$b_3 = 100$	$b_4 = 90$	$b_5 = 70$
$a_1 = 200$	1	4	7	9	1
$a_2 = 100$	2	3	1	2	4
$a_3 = 150$	2	1	3	1	4

Вариант 28.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 120$	$b_3 =90$	$b_4 = 70$	$b_5 = 80$
$a_1 = 200$	1	4	7	9	1
$a_2 = 100$	1	3	1	1	2
$a_3 = 160$	4	1	2	3	1

Вариант 29.

b_j / a_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 160$	$b_3 = 150$	$b_4 = 150$	$b_5 = 120$
$a_1 = 350$	1	5	1	7	1
$a_2 = 200$	3	2	1	8	3
$a_3 = 150$	6	7	9	1	3

Вариант 30.

b_j / a_i	$b_1 = 100$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 80$	$b_5 = 200$
$a_1 = 200$	1	4	7	9	1
$a_2 = 200$	2	3	1	2	4
$a_3 = 150$	2	4	5	6	1

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Решение транспортной задачи
4. Решение транспортной задачи с помощью MathCAD.
5. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы:

1. Общая математическая постановка транспортной задачи.
2. Открытая и закрытая транспортная задачи.
3. Особенности транспортных задач.
4. Методы поиска опорного плана транспортных задач: метод северо-западного угла, метод наименьших стоимостей.
5. Метод потенциалов для решения транспортной задачи.

Лабораторная работа №7

Матричные игры. Чистые и смешанные стратегии. Решение игр.

Цель работы: научиться определять верхнюю и нижнюю цену игры, находить оптимальные стратегии игроков.

Задание:

1. Найти нижнюю и верхнюю границы игры.
2. Найти седловую точку.
3. Найти оптимальные стратегии игроков.
4. Решить задачу с помощью MathCAD.

Задача 7.1. Пусть дана матрица конечной игры размером 4×4 (таблица 28).

Таблица 28 – Исходные данные к задаче 7.1.

j / i	y_1	y_2	y_3	y_4	A(x)
x_1	7	2	5	1	1
x_2	2	2	3	4	2
x_3	5	3	4	4	3
x_4	3	2	1	6	1
B(y)	7	3	5	6	

Определим наилучшие стратегии второго игрока, стремящегося минимизировать выигрыш первого игрока, если первый игрок применяет стратегию x.

Если первый игрок все время будет делать ход x_1, то второй игрок, минимизируя свой проигрыш, должен выбрать стратегию y_4 с результатом игры

$$A(x_1) = \min_y (7,2,5,1) = 1$$

В общем случае

$$A(x) = \min_y L(x, y) \tag{1}$$

соответствует наилучшей стратегии второго игрока. Аналогично,

$$B(y) = \max_x L(x, y) \tag{2}$$

- наилучшая стратегия первого игрока при применении вторым игроком стратегии y.

Вычислим нижнюю цену игры:

$$\alpha = \max_x \min_y L(x, y) = \max_x A(x) = 3 \tag{3}$$

и верхнюю цену игры:

$$\beta = \min_y \max_x L(x, y) = \min_y B(y) = 3. \tag{4}$$

Нижняя граница игры гарантирует выигрыш первого игрока при оптимальной стратегии не менее, чем α, а верхняя цена игры гарантирует проигрыш второго игрока не более чем β.

В силу определения функций $A(x)$ и $B(y)$ имеем:

$$A(x) \le L(x, y) \le B(y), \quad \alpha \le \beta \tag{5}$$

Если $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет седловую точку и игра справедливая. Для такой функции безразличен порядок выполнения операций минимизации и максимизации, т.е. если сначала определить оптимальную стратегию первого игрока, а потом оптимальную стратегию второго игрока, то они совпадут и игра будет с результатом $c = \alpha = \beta$, где c – цена игры. Оптимальные стратегии обоих игроков и результат игры выделен в таблице курсивом. Такие стратегии, выбранные игроком, называются *чистыми стратегиями*.

Если верхняя цена игры не совпадает с нижней, то определение оптимальных стратегий становится более сложным. Рассмотрим пример игры без седловой точки (таблица 29). Если первый игрок применяет стратегию x_2, то его выигрыш α равен 4 единицам при наилучшей стратегии y_2 второго игрока. Гарантированный проигрыш второго игрока β равен 5, при правильном выборе стратегии y_1 он не проиграет больше 5.

Таблица 29 – Матричная игра без седловой точки.

i \ j	y_1	y_2	A(x)
x_1	3	6	3
x_2	5	4	*4*
B(y)	*5*	6	

Таким образом, верхняя цена игры $\alpha = \max\limits_{x} A(x) = 4$ не равна нижней цене $\beta = \min\limits_{y} B(y) = 5$ и образуется ничейная зона (рис. 18)

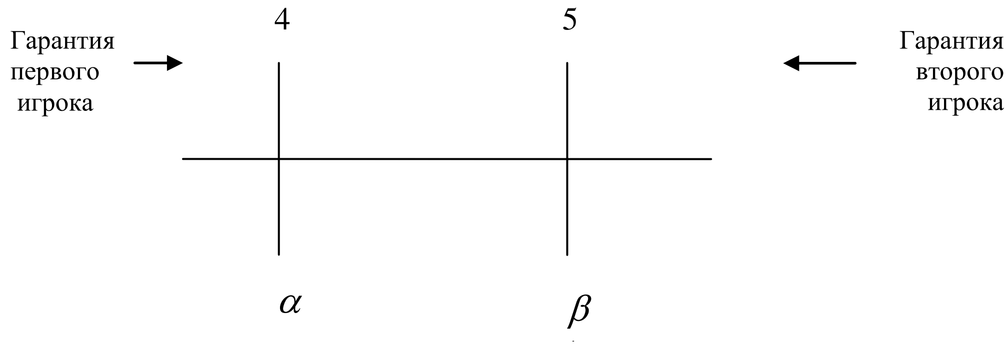


Рисунок 18 – Верхняя и нижняя цены игры без седловой точки

Борьба за ничейную зону состоит в продвижении вправо от точки α для первого игрока и влево от точки β для второго игрока. И в результате этой борьбы устанавливается некое равновесие.

Если кто-то из игроков будет обладать информацией о ходе соперника, то он получит преимущество и может закончить игру с лучшим для себя результатом, чем гарантированная оценка. В нашем примере (таблица 29), если второй игрок знает, что будет сделан ход x_2, он может выбрать ход y_2 и проиграть всего 4 единицы. Однако, если первый игрок догадается, что будет сделан ход y_2, он может применить стратегию x_1 и выиграть 6 единиц. Отсюда следует, что каждому игроку нужно сохранять свой ход в тайне от соперника. Для этого при выборе хода нужно включить механизм случайного выбора.

Рассмотрим вероятности

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \text{ и } q = (q_1, q_2, \ldots, q_m), \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

с которыми случайным образом будут выбираться стратегии x и y каждого игрока. Стратегии могут быть чистыми и смешанными.

Чистая стратегия – такая стратегия, когда какая – либо из вероятностей хода равна единице, тогда остальные вероятности равны р нулю и игрок точно знает свой ход.

Смешанная стратегия – стратегия при выборе хода, в котором присутствует элемент случайности. Вероятность ни одного хода не равна единице. Игрок сам не знает, какой ход будет сделан. Поскольку в поведении любого игрока при выборе определенной стратегии присутствует какая-либо закономерность, которая может быть замечена соперником, то лучшая стратегия – не знать заранее своего хода, тогда игрок не сможет выдать себя.

Теперь в распоряжении игроков вместо выбора чистых стратегий x и y имеется выбор вероятностей p и q. Функция выигрыша будет иметь случайные значения с математическим ожиданием

$$L(p,q)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} l_{ij}\,p_i q_j\ ,$$

где l_{ij} - элемент матрицы выигрышей.

В задачу первого игрока входит максимизация этой функции по p, в задачу второго игрока входит минимизация этой функции по q при выполнении условий $\sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ \sum_{j=1}^{m} q_j=1,\ p_i, q_j \ge 0$.

Нахождение нижней и верхней цены игры в MathCAD.

Решение игр

<u>Задача 7.2.</u> Пусть дана матрица L:

$$L=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к матрице такое число, чтобы все элементы матрицы были неотрицательными:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}+5=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 7t_1 + 2t_2 + 9t_3 \geq 1, \\ 2t_1 + 9t_2 + 0t_3 \geq 1, \\ 9t_1 + 0t_2 + 11t_3 \geq 1. \end{cases}$$

В задаче линейного программирования, для того чтобы перейти от системы неравенств к системе равенств, необходимо ввести новые переменные z_i:

$$\begin{cases} 7t_1 + 2t_2 + 9t_3 - z_1 = 1, \\ 2t_1 + 9t_2 + 0t_3 - z_2 = 1, \\ 9t_1 + 0t_2 + 11t_3 - z_3 = 1. \end{cases}$$

Из шести переменных $t_1, t_2, t_3, z_1, z_2, z_3$ только три должны составлять базис, остальные равны нулю. Примем $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, тогда система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} 7t_1 + 2t_2 + 9t_3 = 1, \\ 2t_1 + 9t_2 = 1, \\ 9t_1 + 11t_3 = 1. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим $t_1 = 0.05;\ t_2 = 0.1;\ t_3 = 0.05$.

Цена игры $c = \dfrac{1}{t_1 + t_2 + t_3} = 5.$

$$p_1 = t_1 c = 0.25;\ p_2 = t_2 c = 0.5;\ p_3 = t_3 c = 0.25.$$

Для второго игрока q_i - вероятность, с которой второй игрок примет стратегию y_i. Система уравнений для второго игрока:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1, \\ 2q_1 + 9q_2 = 5, \\ 9q_1 + 11q_2 = 5, \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_1 = q_3 = 0.25;\ q_2 = 0.5.$$

В измененной матрице $c = 5$, в исходной $c = 0$, т.е. при проведении большого числа партий, если ни один из игроков не будет ошибаться, выигрыш каждого игрока будет равен нулю.

Решение в MathCAD иллюстрирует удаление заведомо худших стратегий.

Нижняя и верхняя цена игры:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad m := \mathrm{rows}(A) \qquad n := \mathrm{cols}(A)$$

$$m = 3 \qquad n = 3$$

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$i := 1..n \qquad j := 1..m$$

$$b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right) \qquad a_j := \min\left[\left(A^T\right)^{\langle j \rangle}\right]$$

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha := \max(a) \qquad \beta := \min(b)$$

$$\alpha = -3 \qquad \beta = 4$$

Нижняя цена: $\alpha = 3$

Верхняя цена: $\beta = 4$.

$L := A - \alpha$ $\qquad L1 := L^T$

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -2 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$x := a$ $\quad c_i := 1$ $\quad c := c^T$ $\quad c = (1 \ \ 1 \ \ 1)$

$f(x) := c \cdot x$ $\quad f(x) = -13$ $\quad c1 := c$

$y := b$ $\quad w(y) := c1 \cdot y$ $\quad w(y) = 14$

Given

$L1 \cdot x \geq c1^T$ $\quad x \geq 0$

$M := \text{Minimize}(f, x)$

$M = \begin{pmatrix} 0.083 \\ 0.167 \\ 0.083 \end{pmatrix}$ $\quad f(M) = 0.333$ $\quad v1 := \dfrac{1}{f(M)}$ $\quad v1 = 3$

$v := \begin{vmatrix} (v1 + \alpha) & \text{if } \alpha < 0 \\ v1 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$ $\quad v = 0$ $\quad P := M \cdot v1$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

Given

$L \cdot y \leq c^T$ $\quad y \geq 0$ $\quad M1 := \text{Maximize}(w, y)$

$M1 = \begin{pmatrix} 0.083 \\ 0.167 \\ 0.083 \end{pmatrix}$ $\quad w(M1) = 0.333$ $\quad v1 := \dfrac{1}{w(M1)}$ $\quad v1 = 3$

$v := \begin{vmatrix} (v1 + \alpha) & \text{if } \alpha < 0 \\ v1 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$ $\quad v = 0$ $\quad Q := M1 \cdot v1$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

Ответ

$v = 0$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы.
2. Решение задачи.
3. Решение задачи с помощью MathCAD.
4. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Вопросы к защите лабораторной работы:

1. Что такое матричная игра?
2. Чистые и смешанные стратегии.
3. Верхняя и нижняя цена игры.
4. Оптимальная стратегия.
5. Игра с Седловой точкой.

Лабораторная работа №8, 9

Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера

Цель работы: познакомиться с методом ветвей и границ на примере задачи коммивояжера.

Задание: Решить задачу коммивояжера в системе Mathcad.

Задача 8.1. Коммивояжеру нужно посетить 5 городов, затраты на переход из города i в город j в таблице 1 (знак # означает запрещение перехода). В программах, реализующих решение задачи коммивояжера, соответствующим элементам матрицы можно присвоить значение машинной бесконечности (∞).

Таблица 30 – Матрица затрат в задаче коммивояжера.

i \ j	1	2	3	4	5
1	#	3	4	7	5
2	6	#	7	4	8
3	9	6	#	5	10
4	4	7	5	#	8
5	3	9	8	7	#

Алгоритм метода ветвей и границ применительно к задаче коммивояжера

1. Оценка вариантов. Пусть $G^{(0)}$ - множество всех вариантов задачи. Вычислим оценку этого множества. Рассмотрим конкретный цикл с номерами городов i_1, i_2, …, i_n. Затраты в таком цикле будут следующими:

$$f(x) = c_{i_1,i_2} + c_{i_2,i_3} + \ldots + c_{i_{n-1},i_n}.$$

Определим числа $h_i = \min_j c_{ij}$. Эти числа представляют собой минимальные затраты на переход из города i во все другие города (таблица 31).

Таблица 31 – Минимальные затраты на выход из каждого города.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	h_i
1	#	3	4	7	5	3
2	6	#	7	4	8	4
3	9	6	#	5	10	5
4	4	7	5	#	8	4
5	3	9	8	7	#	3

Так как из каждого города нужно выйти, суммарные затраты составят не меньше чем $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$. Оценка для данной матрицы: $h = \sum_{i=1}^{n} h_i = 19$. Вычтем эти числа из каждого элемента матрицы затрат $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - h_i$. Теперь суммарные затраты составят

$$f(x) = h + \overline{c_{i_1,i_2}} + \overline{c_{i_2,i_3}} + \ldots + \overline{c_{i_{n-1},i_n}}.$$

Матрица затрат $\bar{c}$ показана в таблице 3.

Таблица 32 – Матрица затрат $\bar{c}$.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	#	0	1	4	2
2	2	#	3	0	4
3	4	1	#	0	5
4	0	3	1	#	4
5	0	6	5	4	#

Рассмотрим минимальные величины по столбцам g_j, $g_j = \min\limits_i \overline{c_{ij}}$. Эти числа представляют собой минимальные затраты на вход в город j. Так как в каждый город нужно войти, то $g = \sum\limits_{j=1}^{m} g_j = 3$ - минимальные затраты на всем пути (таблица 33).

Таблица 33 – Минимальные затраты на вход в каждый город.

i \ j	1	2	3	4	5
1	#	0	1	4	2
2	2	#	3	0	4
3	4	1	#	0	5
4	0	3	1	#	4
5	0	6	5	4	#
g_j	0	0	1	0	2

Матрица $\overline{\overline{c_{ij}}} = \overline{c_{ij}} - g_j$ называется приведенной матрицей, и значение функции через элементы этой матрицы будет следующее:

$$f(x) = h + g + \overline{\overline{c_{i_1,i_2}}} + \overline{\overline{c_{i_2,i_3}}} + \ldots + \overline{\overline{c_{i_{n-1},i_n}}}.$$

Оценка $\underline{m}(f(x)) = h + g \le f(x)$. Матрица $\overline{\overline{\tilde{n}}}$ представлена в таблице 34.

Таблица 34 – Приведенная матрица затрат $\overline{\overline{\tilde{n}}}$.

i \ j	1	2	3	4	5
1	#	0	0	4	0
2	2	#	2	0	2
3	4	1	#	0	3
4	0	3	0	#	2
5	0	6	4	4	#

Суммарные минимальные затраты – оценка множества всех вариантов – составит $\underline{m}(G^0) = h + g = 19 + 3 = 22$.

2. Ветвление. Зададим множество $G_k^{(v)}$, $v = 1,2,\ldots$, $k = 1,2,\ldots$, где v - номер шага, k - варианты множеств решений следующим образом:

1) при $k = 1$ – это множество всех маршрутов, содержащих путь из города i в город j;

2) при $k = 2$ – это множество всех маршрутов, не содержащих путь из города i в город j.

В группу 1 включаем такой переход, который характеризуется минимальными (нулевыми) затратами. Так как таких переходов несколько (в данном случае 8), то среди нулевых элементов приведенной матрицы выбираем такой путь, чтобы в группу 2 попали варианты с наибольшими затратами. Тогда для этих двух множеств будут получены оценки, максимально отличающиеся друг от друга.

Выбираем пару городов (r,m), для которых $\overline{\overline{c_{rm}}} = 0$. Если таких пар несколько, определяем числа $\theta_{rm} = \min\limits_{j \neq m} \overline{\overline{c_{rj}}} + \min\limits_{i \neq r} \overline{\overline{c_{im}}} = \alpha_r + \beta_m$. Первое слагаемое в сумме характеризует минимальные затраты на выход из города r (переход из r в m запрещен), второе слагаемое – минимальные затраты на вход в город m при этом же условии. Сумма этих чисел дает минимальные затраты для множества маршрутов, не содержащих переход из r в m. Результаты вычислений затрат α_r и β_m для всех таких пар с нулевыми значениями приведены в таблице 6.

Максимизация затрат по парам городов с нулевыми затратами θ_{rm} в результате дает переход из города 5 ($r = 5$) в город 1 ($m = 1$), максимальные затраты равны 4 (табл. 36).

Таблица 35 – Минимальные затраты для маршрутов, не содержащих переход из r в m.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	α_i
1	#	0	0	4	0	0
2	2	#	2	0	2	2
3	4	1	#	0	3	1
4	0	3	0	#	2	0
5	0	6	4	4	#	4
β_j	0	1	0	0	2	

Таблица 36 – Максимальные затраты на переход из r в m.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	α_i
1		1	0		2	0
2				2		2
3				1		1
4	0		0			0
5	4					4
β_j	0	1	0	0	2	

Приведем дерево вариантов после первого шага алгоритма с оценками снизу множества решений (рисунок 19).

На втором шаге рассматриваем варианты множества $G_1^{(1)}$, имеющие наименьшую оценку.

На следующем шаге вычеркиваем из матрицы затрат 5 – ю строку и первый столбец, делая невозможным обратный переход (1,5), т.е. $c_{15} = \infty$ (таблица 37).

Далее повторяем определение оценки для новой матрицы (таблицы 38-41).

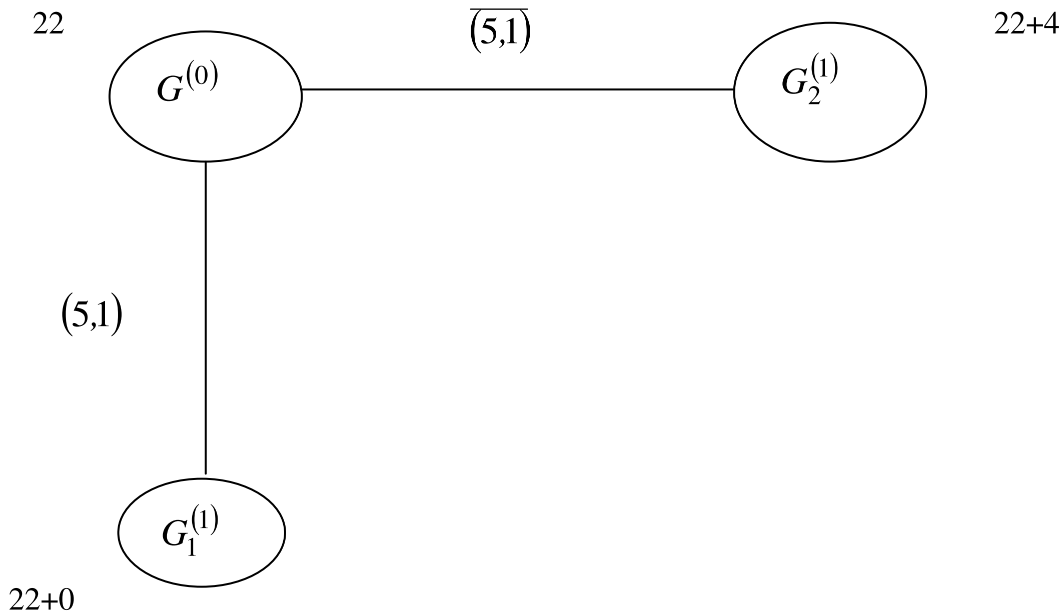


Рисунок 19 – Дерево вариантов после первого шага

Таблица 37 – Матрица затрат после первого шага.

$i \backslash j$	2	3	4	5
1	0	0	4	#
2	#	2	0	2
3	1	#	0	3
4	3	0	#	2

Таблица 38 – Минимальные затраты на выход из каждого города $h=\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$

$i \backslash j$	2	3	4	5	h_i
1	0	0	4	#	0
2	#	2	0	2	0
3	1	#	0	3	0
4	3	0	#	2	0

Таблица 39 – Минимальные затраты на вход в каждый город $g = \sum_{j=1}^{m} g_j = 2$

j / i	2	3	4	5
1	0	0	4	#
2	#	2	0	2
3	1	#	0	3
4	3	0	#	2
g_j	0	0	0	2

Таблица 40 – Минимальные затраты для маршрутов, не содержащих переход из r в m.

j / i	2	3	4	5	α_i
1	0	0	4	#	0
2	#	2	0	0	0
3	1	#	0	1	1
4	3	0	#	0	0
β_j	1	0	0	0	

Таблица 41 – Максимальные затраты на переход из r в m.

j / i	2	3	4	5	α_i
1	1	0			0
2			0	0	0
3			1		1
4		0			0
β_j	1	0	0	0	

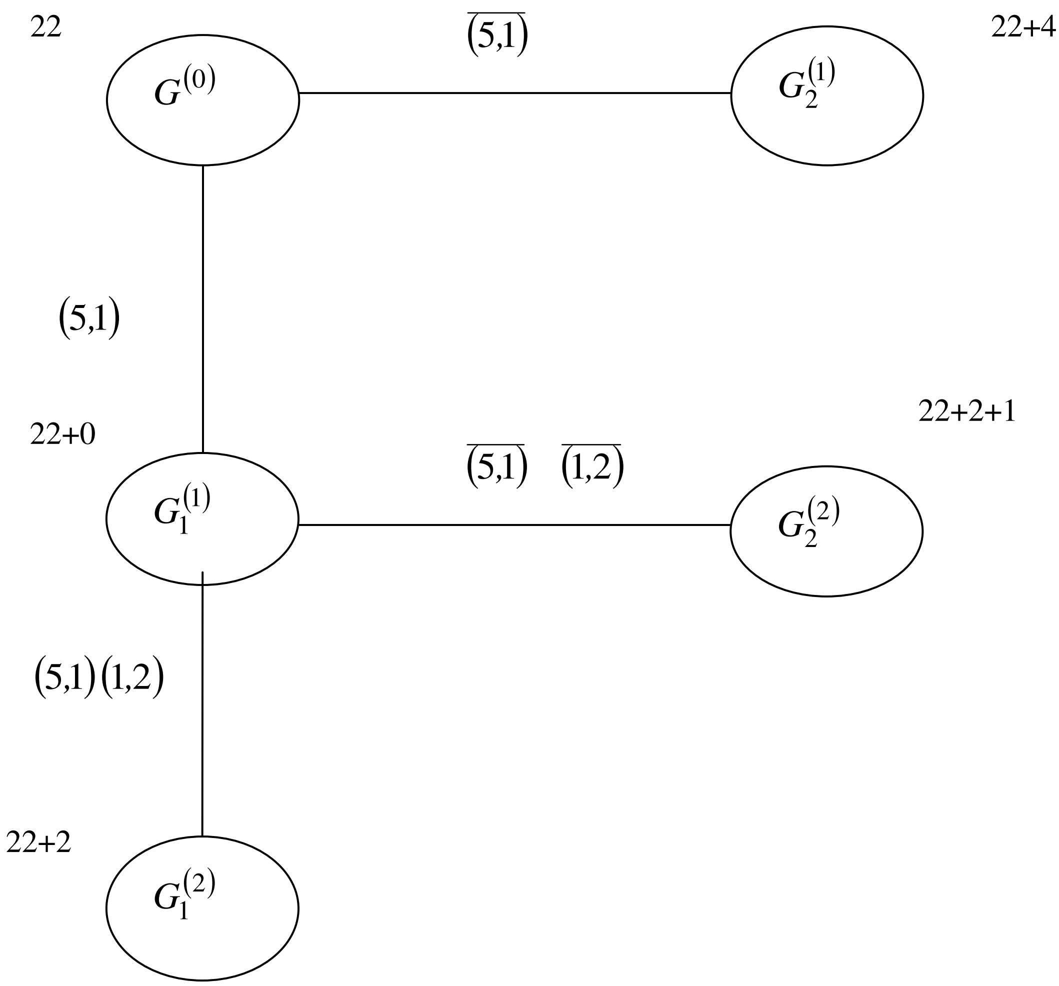


Рисунок 20 – Дерево вариантов после второго шага

Вычеркиваем 1-ю строку и 2-й столбец, запрещаем переход $2 \rightarrow 5$, в результате получаем матрицу затрат после второго шага (таблица 42). На рисунке 20 показано полученное дерево вариантов.

Снова определяем оценку (табл. 43-46).

Таблица 42 – Матрица затрат после второго шага.

i \ j	3	4	5
2	2	0	#
3	#	0	1
4	0	#	0

Таблица 43 – Минимальные затраты на выход из каждого города $h=\sum_{i=1}^{n}h_i=0$.

j / i	3	4	5	h_i
2	2	0	#	0
3	#	0	1	0
4	0	#	0	0

Таблица 44 – Минимальные затраты на вход в каждый город $g=\sum_{j=1}^{m}g_j=0$

j / i	3	4	5
2	2	0	#
3	#	0	1
4	0	#	0
g_j	0	0	0

Таблица 45 – Минимальные затраты для маршрутов, не содержащих переход из r в m.

j / i	3	4	5	α_i
2	2	0	#	2
3	#	0	1	1
4	0	#	0	0
β_j	2	0	1	

Таблица 46 – Максимальные затраты на переход из r в m.

j / i	3	4	5	α_i
2		2		2
3		1		1
4	2		1	0
β_j	2	0	1	

Из таблиц 43, 44 следует, что $h=\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$, $g=\sum_{j=1}^{m} g_j = 0$. Вычеркиваем 2-ю строку, 4-й столбец, запрещаем переход $4 \to 5$ и получаем матрицу затрат на последнем шаге (таблица 47).

Таблица 47 – Матрица затрат на последнем шаге.

$i \backslash j$	3	5
3	#	1
4	0	#

Остается единственный вариант $4 \to 3 \to 5 \to 1$ (стоимость равна 1). Полный замкнутый путь: $5 \to 1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ с затратами 3+3+4+5+10=25. Сравнивая полученное решение с оценками множеств $G_2^{(v)}$, приходим к выводу, что лучшего решения в этих множествах нет и они могут быть отброшены (рисунок 21).

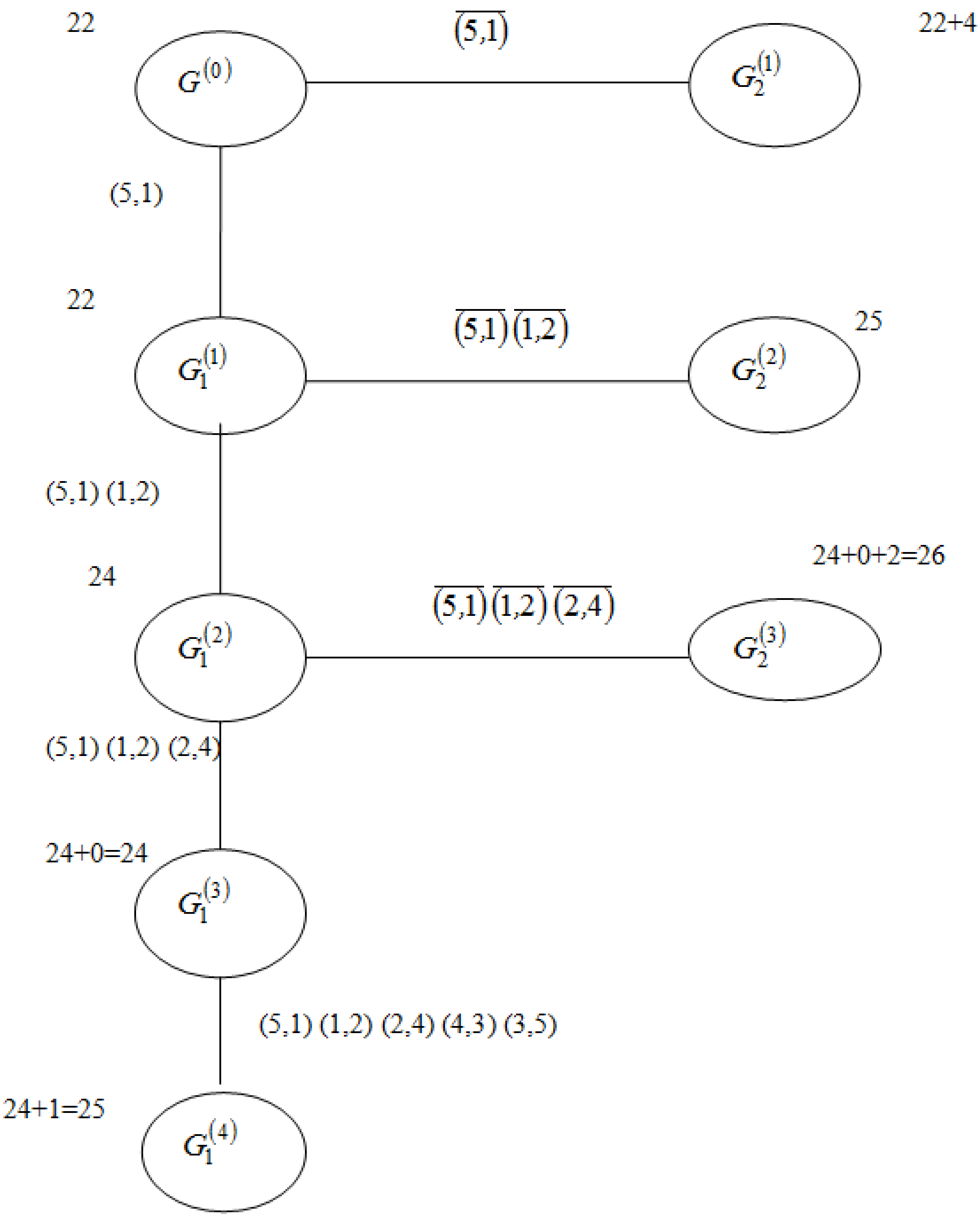


Рисунок 21 – Дерево вариантов после третьего шага

3. Отбрасывание вариантов. Если стоимость найденного варианта (25) оказалась бы выше стоимости какого-нибудь из отвергнутых вариантов (тех, что справа), то пришлось бы раскрывать другой вариант. В данном случае задача решена.

Задача коммивояжера обладает факториальной сложностью, и ее решение при достаточно большой размерности задачи потребует перебора значительного количество вариантов.

Задача относится к классу неполиномиально сложных, или комбинаторных, задач. Точное решение задачи может быть найдено только перебором вариантов. Метод ветвей и границ требует введения функции оценки множества вариантов, вычисление которой должно быть значительно проще, чем решение самой задачи.

Метод позволяет оценить решения, содержащиеся в некоторых подмножествах вариантов, и выбрать для развития такое подмножество, для которого оценка вариантов наилучшая. Отбрасывание вариантов осуществляется по сравнению оценок или по достижению предельного или приемлемого решения.

Решение задачи в MathCAD.

$$minm(A,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad h_j \leftarrow min\left(A^{\langle j \rangle}\right) \\ h \end{array} \right.$$

$$redm(A,n,h) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad B^{\langle j \rangle} \leftarrow A^{\langle j \rangle} - h \\ B \end{array} \right.$$

$$Ftab(C,n,h,g,p,q,ni,nj) := \left| \begin{array}{l} A \leftarrow augment(ni,C,h,p) \\ A \leftarrow stack\left(augment\left(\text{"i/j"}, nj^T, \text{"h"}, \text{"a"}\right), A\right) \\ A \leftarrow stack\left(A, augment\left(\text{"g"}, g^T, 0, 0\right)\right) \\ A \leftarrow stack\left(A, augment\left(\text{"b"}, g^T, 0, 0\right)\right) \end{array} \right.$$

$$alphm(A,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad h_i \leftarrow sort\left(A^{\langle i \rangle}\right)_1 \\ h \end{array} \right.$$

$$fij(A,n,p,q) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad\quad \text{if } A_{i,j} = 0 \\ \quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} s_k \leftarrow p_i + q_j \\ a_k \leftarrow i \\ b_k \leftarrow j \\ k \leftarrow k+1 \end{array} \right. \\ c \leftarrow (a, b, s) \end{array} \right.$$

$$fn1(A,n,im,jm) := \left| \begin{array}{l} A1 \leftarrow submatrix(A, 0, im-1, 0, n+2) \\ A2 \leftarrow submatrix(A, im+1, n+2, 0, n+2) \\ A12 \leftarrow stack(A1, A2) \\ B1 \leftarrow submatrix(A12, 0, n+1, 0, jm-1) \\ B2 \leftarrow submatrix(A12, 0, n+1, jm+1, n+2) \\ augment(B1, B2) \end{array} \right.$$

$$\mathrm{fim}(a,b) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \mathrm{last}(a) \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad c \leftarrow i \ \text{ if } a_i = b \\ c \end{array} \right.$$

$$\mathrm{chinf}(A) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \mathrm{cols}(A) \\ m \leftarrow \mathrm{rows}(A) \\ \text{for } i \in 0..m-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad\quad \text{if } \mathrm{IsScalar}(A_{i,j}) \\ \quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} A_{i,j} \leftarrow \text{"\#"} \ \text{ if } (A_{i,j}) = \infty \\ 0 \end{array} \right. \\ A \end{array} \right.$$

$$C := \begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 6 & \infty & 7 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & \infty & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & \infty & 8 \\ 3 & 9 & 8 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

$n := \mathrm{last}\left(C^{\langle 0 \rangle}\right) + 1$ $\qquad i := 1..n$ $\qquad ni_{i-1} := i$ $\qquad nj := ni$

$h := \mathrm{minm}\left(C^T, n\right)$ $\qquad C1 := \mathrm{redm}(C, n, h)$ $\qquad g := \mathrm{minm}(C1, n)$

$C2 := \mathrm{redm}\left(C1^T, n, g\right)^T$ $\qquad p := \mathrm{alphm}\left(C2^T, n\right)$ $\qquad q := \mathrm{alphm}(C2, n)$

$Atab := \mathrm{Ftab}(C2, n, h, g, p, q, ni, nj)$

$$\mathrm{chinf}(Atab) = \begin{pmatrix} \text{"i/j"} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{"h"} & \text{"a"} \\ 1 & \text{"\#"} & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & \text{"\#"} & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & \text{"\#"} & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & \text{"\#"} & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 4 & 4 & \text{"\#"} & 3 & 4 \\ \text{"g"} & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \text{"b"} & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i + \sum_{i=0}^{n-1} g_i = 22$$

Ветвление, определение нулевого элемента матрицы с максимальной оценкой.

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы.
2. Решение задачи.
3. Решение задачи с помощью MathCAD/
4. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы.

Вопросы к защите лабораторной работы:

1. В чем заключается метод исчерпывающего перебора?
2. При решении каких задач прибегают к методу исчерпывающего перебора?
3. В чем заключается поиск с возвратом?
4. Суть метода ветвей и границ.

Литература

1. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. Математика для экономистов на базе Mathcad. – СПб.:БХВ-Петербург,2003. – 485 с.
2. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad. – М.:Финансы и статистика, 2005. – 143с.
3. Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложения в Mathcad..-М.: Физматлит, 2005.-264 с.
4. Хабибуллин Р.Г., Макарова И.В., Лысанов Д.М., Мухаметдинов Э.М. Оптимизационные и имитационные модели на автомобильном транспорте и в автосервисе: Учебное пособие. – Набережные челны:Изд. КамПИ, 2005. Ч.1 – 161 с.; Ч.2 – 112 с.
5. Степунина О.А., Трофимова Е.Б. Основы теории случайных процессов: Учебно – практическое пособие. – Бузулук: Изд.БГТИ(филиала) ГОУ ОГУ, 2006. – 117 с.
6. Агишева Д.К., Зотова С.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А. Методы принятия оптимальных решений: Учебное пособие.Часть 1.-Волгоград:ИУНЛ ВолгГТУ,2011.-155 с.
7. Данилов А.М., Гарькина И.А., Домке Э.Р. Математическое и компьютерное моделирование сложных систем: Учебное пособие.-Пенза:Изд.ПГУАС, 2011.-296 с.
8. Зименкова Г.М. Математика: Задачи и методы оптимизации: Учебное пособие. Рязань:Изд. РВВДКУ(ВИ),2011.
9. Степовой Д.В., Кравченко Л.В. Математика: Исследование операций: Учебное пособие. – Зерноград:Изд. ФГБОУ ВПО АЧГАА, 2012.-121 с.