МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
в г. ЗЕРНОГРАДЕ

Кафедра высшей математики

Л.Н. Шаповалова, В.В. Серегина

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Зерноград – 2014

УДК 517.(075)

Печатается по решению методической комиссии по направлению подготовки 110800.62 – Агроинженерия Азово-Черноморского инженерного института ФГБОУ ВПО «Донской государственный аграрный университет» в г. Зернограде

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика»
Середина М.Н.,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные технологии и управляющие системы»
Емелин А.А.

Шаповалова, Л.Н. Дискретная математика. Элементы теории множеств: учебное пособие / Л.Н. Шаповалова, В.В. Серегина. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВПО ДГАУ, 2014. – 43 с.

Учебное пособие содержит краткий теоретический и практический материал по теории множеств. Может быть использовано для проведения лекционных и практических занятий по дисциплине «Математика».

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 110800.62 – Агроинженерия, получающих степень бакалавра.

Данная работа поможет студентам освоить следующие компетенции:

− ОК-1 − владением культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

− ПК-1 − способностью к использованию основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования.

Содержание

Предисловие

Дискретная математика включает в себя несколько самостоятельных разделов современной математики, условно объединенных тем, что в них отсутствует понятие предельного перехода. По этому признаку к дискретной математике можно отнести многие математические направления: теорию множеств, математическую логику, теорию чисел, векторную и матричную алгебры, теорию конечных групп, колец и полей, комбинаторику, теорию конечных автоматов и другие. С точки зрения «чистой» математики все перечисленные разделы важны в равной степени. Наиболее важными с практической точки зрения являются разделы: теория множеств, математическая логика, комбинаторика и теория графов. Эти теории создают фундамент не только для дальнейшего изучения других математических направлений, но также создают базу для изучения предметов, связанных с электроникой, информатикой и автоматизированной техникой.

Данное учебное пособие содержит теоретический и практический материал только по теории множеств. Оно состоит из одиннадцати пунктов. В каждом пункте подробно излагается теория, приводятся примеры решения задач, а затем предлагаются упражнения для закрепления материала. В конце пособие содержит ответы.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 110800.62 − Агроинженерия. Оно может быть использовано преподавателями и студентами очной и заочной форм обучения для освоения следующих модулей рабочей программы дисциплины Б2.Б.1 «Математика» в соответствии с ФГОС ВПО:

1. Модуль № 2. Математический анализ.

2. Модуль № 6. Элементы дискретной математики. Теория вероятностей и математическая статистика.

В результате изучения материала учебного пособия студенты должны:

– знать определения основных понятий теории множеств, операций над множествами; свойства операций (ОК-1); распознавать объекты и символику теории множеств (ОК-2);

– уметь применять изученные формулы алгебры множеств к решению задач; проводить доказательства свойств алгебраических операций, логически верные рассуждения; корректно выполнять действия с объектами теории множеств (ОК-1); аргументированно выбирать метод решения задачи; правильно использовать терминологию и символику при решении математических задач (ОК-2); использовать аппарат теории множеств для обработки технической информации (ПК-1);

– владеть методами теории множеств при решении задач прикладного характера (ПК-1); графически иллюстрировать задачи (ОК-1); владеть способностью корректно записывать знания профессиональной области с использованием символики теории множеств (ОК-2).

Введение

Теория множества в виде самостоятельной теории сформировалась в 70-х годах 19 века в работах немецкого математика Г.Кантора (1845-1918). Являлась в некотором смысле «двойником» математической логики, она быстро проникла во все разделы математики. Язык теории множеств позволяет достаточно строго и просто формировать математические предложения. Здесь мы коснемся только лишь основных понятий этой теории.

1. Понятие множества

Понятие множества является одним из самых общих понятий математики. Оно не имеет формального определения. *Множество* есть любое собрание определенных и различных между собой объектов (конкретных или абстрактных), мыслимое как единое целое.

Например, множеством являются рой пчел, группа студентов, алфавит и т.д.

Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами. Множество принято обозначать большими латинскими буквами А, В, С … , объекты множества – малыми латинскими буквами. Если объект *a* является элементом множества А, то говорят , что «*a* принадлежит множеству А», или , что «А содержит элемент *a*». При этом пишут

$$a \in A.$$

Если объект *a* не является элементом множества А, то пишут

$$a \notin A.$$

При этом говорят, что «*a* не принадлежит множеству А» или «А не содержит *a*».

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*. Например, множество студентов; множество целых чисел, удовлетворяют неравенству $0 < x < 5$. Не исключается случай, когда конечное множество состоит из одного элемента. Такое множество называется *одноэлементным*.

Для удобства вводиться понятие *пустого* множества как множества, не содержащего ни одного элемента. Примером пустого множества является множество всех решений уравнения $\sin x = 2$. Обозначается пустое множество символом $\varnothing$.

Множество, содержащее бесконечное число элементов, называется *бесконечным*. Примером бесконечного множества является множество натуральных чисел.

2. Основные способы задания множеств

Конечное множество может быть задано простым перечислением его элементов. Элементы конечного множества записывают в фигурных скобках. Например, множество целых чисел от 1 до 5 можно записывать в виде

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Указанный способ задания множества не применяют в случае, когда число его элементов достаточно велико. Простым перечислением также нельзя задать бесконечное множество. В этом случае множество задается указанием общего свойства, которым обладают элементы этого множества и не обладают объекты, не являющиеся его элементами.

Обозначим через P(x) – свойство, которым обладают элементы данного множества, и не обладают объекты, не являющиеся его элементами. Тогда множество записывают в виде

$$A = \{x \mid P(x)\}, \tag{2.1}$$

что читается так: «множество всех таких x, что $P(x)$».

Например, множество всех решений уравнения $\sin x = 0$ можно записать в виде

$$B = \{x \mid \sin x = 0\}.$$

Замечание 2.1. По сути некоторый объект может входить в множество только один раз. Нет необходимости указать его несколько раз. Но так как при составлении множества приходится вносить один объект несколько раз, то иногда допускается в записи повторение элементов. Например, множество, состоящее из первых трех положительных четных чисел, можно записать $\{2, 4, 6\}$, или $\{2, 6, 4\}$, или $\{2, 4, 4, 6\}$. Это одно и то же множество.

Замечание 2.2. Для обозначения множеств используются и различные видоизменения основной скобочной записи (1.2.1). Например, для того чтобы обозначить множество всех предметов, являющихся элементами множества A и обладающих свойством P(x), вместо

$$\{x \mid x \in A,\ P(x)\}$$

часто пишут

$$\{x \in A \mid P(x)\}. \tag{2.2}$$

Это множество можно охарактеризовать как «множество всех элементов из A, обладающих свойством P(x)».

Упражнения

1. Укажите верную запись

а) $2 \in \{1, 2, 3\}$;

б) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$.

2. Что представляет собой множество всех насекомых, которые являются млекопитающимися.

3. Укажите множество цифр, из которых составлено число 1254325.

4. Пусть A – множество простых чисел. Укажите верные записи:

1) $1 \in A$; 2) $2 \in A$; **3)** $0 \in A$; **4)** $27 \in A$; $23 \in A$.

5. Сколько элементов содержит каждое множество

а) $\{a, b, c, aa, bc, ac\}$ **г)** $\{1, 2, 3, 123, 12\}$

б) $\{a, b, c, a, b, c\}$ **д)** $\{111, 22, 2, 33\}$

в) $\{11, 22, 11, 22\}$ **е)** $\{1, 11, 111, 1111\}$

6. Элементами множества S являются множества

$$P = \{a, b, c\};\ \ Q = \{1, 2, 3\};\ \ R = \{11, 12, 13\}.$$

Укажите верные записи:

а) $P \in S$ **в)** $\{a, b, c\} \in \{P, Q, R\}$ **д)** $\{1, 2, 3\} \in S$

б) $a \in S$ **г)** $11 \notin S$ **е)** $\{P, Q\} \in S$

7. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

8. Приведите пример таких множеств $A \in B$, $B \in C$, но $A \notin C$. (Например, $1 \in Z$, $Z \in \{Z\}$, но $1 \notin \{Z\}$, где Z − множество целых чисел).

9. Опишите словесно каждое из следующих множеств (где Z − множество целых чисел):

1) $\{x \in Z \mid x$ делится на 2 и x делится на $3\}$;

2) $\{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

3. Основные числовые множества

В этом пункте приведем основные числовые множества, которые наиболее часто используются в математике и её приложениях.

Определение 3.1. Множество, элементами которого являются числа, называется *числовым*.

Например, множество $\{1, 2, 5\}$ – числовое, а множество $\{\{1, 2\}, 5\}$ – не числовое.

1. Множество *натуральных* чисел. Обозначается N. Натуральные числа – это числа счета 1, 2, 3, …

2. Множество *целых* чисел. Обозначается Z. Целые числа – это числа вида 0, ±1, ±2, ±3, …

3. Множество *рациональных* чисел. Обозначается Q. Рациональным называется число, представляемое в виде обыкновенной дроби вида $\frac{p}{q}$, где $p, q \in$ Z, $q \neq 0$.

Можно показать, что всякое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби (конечные десятичные дроби считаются периодическими с периодом 0).

4. Множество *иррациональных* чисел.

Иррациональное число – это число, представленное в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Примером иррационального числа является число e = 2,7… . Иррациональным является также число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру; $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ и т.д.

5. Множество *действительных* чисел. Обозначается R. Это множество состоит из рациональных и иррациональных чисел. Часто действительные числа называют *вещественными.*

6. Множество *комплексных* чисел. Обозначаются C. Комплексное число по определению – это упорядоченная пара (x,y) двух действительных чисел, $x \in$R, $y \in$R.

Каждое действительное число может служить координатой точки на некоторой оси Ox. Отождествляя его с этой точкой, мы часто будем называть действительные числа «точками». На рисунке 1 точка a изображает число a.

Рисунок 1

Если $a < b$, то точка b располагается правее точки a. Точка O соответствует числу 0. Ось Ox при этом называется числовой осью или числовой прямой.

4. Интервалы и сегменты

Кроме указанных в предыдущем пункте основных числовых множеств N, Z, Q, R, C часто используют следующие виды множеств.

Пусть a и b действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a < b$.

Определение 4.1. *Сегментом* с концами в точках a и b называется множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$.

Обозначается сегмент символом $[a,b]$. Символически определение сегмента можно записать в виде

$$[a,b] = \{x \mid x \in \mathrm{R},\ a \le x \le b\}.$$

Запятая между $x \in \mathrm{R}$ и $a \le x \le b$ заменяет союз И. Последнее множество можно также записать в виде (2.2)

$$[a,b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a \le x \le b\}.$$

На числовой прямой сегмент $[a,b]$ представляет собой отрезок, включающий концы a и b (рисунок 2).

Рисунок 2.

Определение 4.2. *Интервалом* с концами в точках a и b называется множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Обозначается интервал символом (a, b). Символически определение интервала можно записать в виде

$$(a, b) = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$$

На числовой прямой интервал представляет собой отрезок с выброшенными концами a и b (см. рисунок 3)

Рисунок 3

Определение 4.3. *Полусегментом* или *полуинтервалом*, открытым слева, с концами в точках a и b называется множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$.

Обозначается такой полусегмент символом $(a, b]$. Символическое определение полусегмента можно записать в виде

$$(a, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \le b\}.$$

На числовой прямой полусегмент представляет отрезок с концами a и b, с выброшенным левым концом (см. рисунок 4)

Рисунок 4

Аналогично можно рассматривать полусегмент, открытый справа.

Определение 4.4. *Полусегментом* или *полуинтервалом*, открытым справа, с концами в точках a и b называется множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x < b$.

Обозначается такой полусегмент $[a, b)$. Символическое определение полусегмента можно записать в виде

$$[a, b) = \{x \in \mathrm{R} \mid a \le x < b\}.$$

На числовой прямой полусегмента $[a, b)$ представляет отрезок с концами a и b, с выброшенным правым концом (Рисунок 5).

Рисунок 5

В определениях интервала и полуинтервалов не исключается случай, когда в качестве a или b фигурируют символы $+\infty$ и $-\infty$. Соответствующие определения имеют вид

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathrm{R} \mid x < b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid x > a\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathrm{R} \mid x \le b\}, \qquad (4.1)$$

$[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$ (см. рисунки 6,7,8,9)

Рисунок 6

Рисунок 7

Рисунок 8

Рисунок 9

Интервалы и полуинтервалы четырех видов (4.1) называются *неограниченными.* Считается, что всякое действительное число x удовлетворяет двойному неравенству $-\infty < x < +\infty$. Следовательно, множество R совпадает с множеством $(-\infty; +\infty)$.

Упражнения

10. Укажите пустые множества.

а) $\{x \in R \mid x \geq 1, x \leq 0\}$;

б) $\{x \in Z \mid x > 0, x < e\}$;

в) $\{\varnothing\}$;

г) $\{x \in R \mid x > 2, x = 5\}$;

д) $\{x \in R \mid x < 0, x = 1\}$;

е) $\{x \in R \mid x \geq 0, x = 0\}$.

11. Какие из указанных множеств пустые?

а) $B = \varnothing$; **б)** $B = \{\varnothing\}$; **в)** $B = \{0\}$; **г)** $B = \{x \mid x = 2n+1$, x − четное число, $n \in Z\}$.

12. Найдите количество элементов множеств.

а) $P = \{x \mid x < 10, x \in N\}$; **б)** $P = \varnothing$; **в)** $P = \{0, \varnothing\}$; **г)** $P = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 0\}$;

д) $P = \{x \mid x \in Z, |x| < 2\}$.

13. Укажите элементы множеств

а) $P = \{x \mid x \in \{a, в, c\}\}$;

б) $P = \{x \mid x > 4, x \in \{3, 4, 5, 7, 8\}\}$;

в) $P = \{x \mid x \in N,\ x \le 3\}$.

5. Включение и равенство множеств

Рассмотрим два множества A и B.

Определение 5.1. Множество A, называется подмножеством множества B, если всякий элемент множества A является элементом множества B.

Например, множество всех волков является подмножеством множества всех млекопитающих; множество $\{1, 2, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; множество точек A на рисунке 10 содержится в множестве точек B.

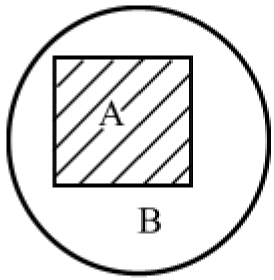


Рисунок 10

Тот факт, что множество A является подмножеством множества B записывается в виде

$$A \subset B.$$

Читается «множество A включено в множество B» или « множество A содержится в множестве B».

Допускается также запись

$$B \supset A.$$

В этом случае читается «множество B содержит множество A».

Тот факт, что множество A не содержится в множестве B записывается в виде

$$A \not\subset B \text{ или } B \not\supset A.$$

Считается, что

$$\varnothing \subset A$$

для всякого множества A.

Из определения 5.1 вытекают следующие свойства отношения включения.

1. $A \subset A$ для всякого множества A.
2. Если $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$.

Определение 5.2. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

При этом пишут

$$A = B.$$

Из определения 5.2 следует, что множества A и B будут равными, если каждый элемент множества A является элементом множества B, а каждый элемент множества B является элементом множества A.

Значит, A = B тогда и только тогда, когда

$$A \subset B, \text{ и } B \subset A.$$

Таким образом, определение 5.2 можно переформулировать.

Определение 5.3. Множества A и B называются *равными*, если

$$A \subset B, \text{ и } B \subset A.$$

Из определения равенства множеств вытекают следующие его свойства.

1. A = A для всякого множества A (это свойство называется свойством рефлексивности).
2. Если A = B, то B = A (это свойство называется свойством симметричности).
3. Если A = B, B = C, то A = C (это свойство называется свойством транзитивности).

Пример. Дано множество $S = \{1, 3, 5\}$. Составьте множество всех подмножеств множества S.

Решение.

Перечислим все множества, которые являются подмножествами:

– $\varnothing$ − пустое множество;

– $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ − одноэлементные;

– $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}$ − множества, содержащие 2 элемента;

– $\{1, 3, 5\}$ − множества, содержащие три элемента, то есть само S.

Таким образом, множество всех подмножеств S имеет вид

$$\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}.$$

Упражнения

14. Верно ли, что $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

15. Сколько различных подмножеств содержит множество, состоящее из четырех элементов.

16. Сколько одноэлементных подмножеств содержится в множестве

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}?$$

17. Дано множество вида $A = \{a, b, c, d\}$. Установите верными или неверными являются записи.

1) а) $a \in A$;

б) $d \subset A$;

в) $\varnothing \in A$;

г) $\{a, b, d\} \subset A$;

д) $\varnothing \subset A$;

е) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.

2) а) $\{a\} \subset \{a, d\}$;

б) $\{c\} \subset \{a, b, d\}$;

в) $\varnothing \in \{a, b, c\}$;

г) $\varnothing \subset \{a\}$;

д) $A \subset \{a, b, c, d\}$;

е) $a, b \subset \{a, b\}$.

3) а) $a, b \in \{a, b, c\}$;

б) $\varnothing \notin \{a, b, c\}$;

в) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;

г) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$;

д) $a = \{a\}$;

е) $\varnothing = \{\varnothing\}$.

18. Дано множество $S = \{a, b, 1, 2, 3, 4\}$. Выпишите все

а) подмножества этого множества, не содержащие букв;

б) все подмножества, не содержащие цифр;

в) сколько существует подмножеств множества S, не содержащих ни букв, ни цифр.

19. Для множества $B = \{c, d, e\}$ составьте множество всех его подмножеств.

20. Укажите верные равенства

а) $\{2, 4, 6\} = \{2, 6, 6, 4, 2, 4, 4\}$;

б) $\{1, 2, 4\} = \{\{1\}, 2, 4\}$;

в) $\{0\} = \{x \mid x$ − целое неотрицательное число, x − натуральное число$\}$;

г) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\} = \{x \in R \mid x \le 12, x$ − простое число$\}$;

д) $\{2, 4\} = \{x \mid x$ − решение уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0\}$;

е) $\{\varnothing\} = \{x \in R \mid x$ − решение уравнения $2x^2 - x + 8 = 0\}$**.**

21. Укажите множества, равные множеству $\{2, 4, 6\}$

а) $P = \{x \in N \mid x \le 5\}$;

б) $P = \{x \mid x = 2n, n \in N, n \le 3\}$.

в) $P = \{x \mid x = 2n + 1, n \in N, n \le 6\}$.

г) $P = \{x \mid x = 2n, n \in N, x$ − решение неравенства $(x-1)(2x-14) < 0\}$.

д) $P = \{x \in N \mid |x| \le 6\}$.

6. Диаграммы Венна. Универсальное множество

Для графической иллюстрации множеств и отношения между ними используют диаграммы Венна (часто их называют кругами Эйлера или диаграммы Эйлера-Венна). Диаграмма Венна представляет собой схематическое изображение множеств в виде точечных множеств. Чаще всего используют круги, прямоугольники (см. рисунок 10).

Если требуется показать, что множество А и В не содержат одинаковых элементов, то их изображают непересекающимися кругами (см. рисунок 11).

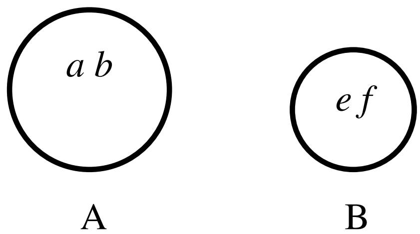


Рисунок 11.

Если множество A является подмножеством множества B, то на диаграмме A целиком лежит внутри B (для наглядности их можно заштриховать) (см. рисунок 12).

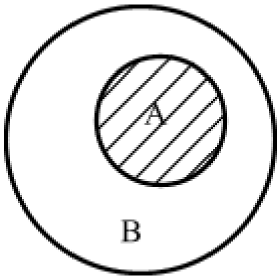


Рисунок 12

Например, рассмотрим два множества:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ K = \{1, 2, 3\}.$$

Геометрически эти множества можно представить

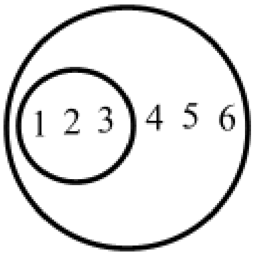


Рисунок 13

Из диаграммы на рисунке 13 видно, что $K \subset P$.

Если все рассматриваемые в ходе какого-либо рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество называют *универсальным* множеством (для этого рассмотрения). Обозначается это множество символом U (либо I).

На диаграммах Венна универсальное множество изображают в виде прямоугольника, внутри которого размещают круги, обозначающие подмножества.

Например, рассмотрим универсальное множество на рисунке 14

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

и два его подмножества:

$$P = \{2\},$$

$$Q = \{2, 3, 5, 7\},$$

где P – множество четных простых чисел, Q − множество всех простых чисел, меньших 10.

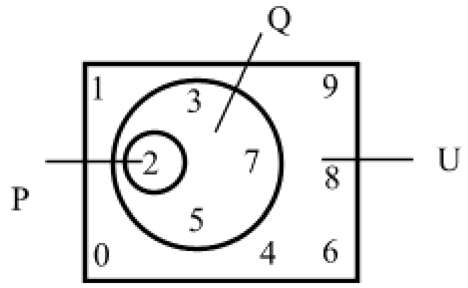


Рисунок 14

Упражнения

22. На рисунке 14 укажите элементы универсального множества, не входящие в множество Q.

23. Перечислите все элементы, которые останутся в множестве U, если из него удалить все элементы, не входящие в множество Q. (см. рисунок 14).

24. Универсальное множество U образуют гласные буквы русского алфавита (рисунок 15). Укажите буквы, не входящие ни в множество M, ни в множество N.

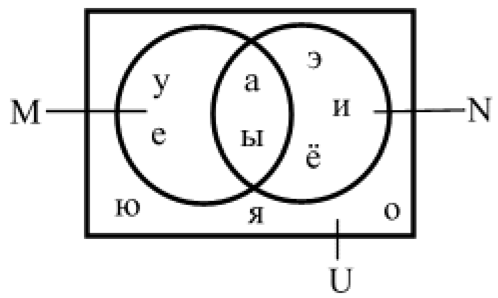


Рисунок 15.

25. Перечислите буквы (в алфавитном порядке), которые останутся во множестве M, если удалить все элементы множества N.

26. Даны множества:

$A = \{2, 20, 120, 16, 52, 502\}$;

B = {10, 2, 5}; E = {120, 502};

C = {2, 20, 16}; F = {12, 16, 25};

D = {20, 16, 52}; К = {20, 120, 502, 52, 16};

S = {52, 120, 2, 502, 20, 2}; M = {502}.

1) Перечислите множества, являющиеся подмножествами множества A;

2) Укажите, какие из нижеследующих утверждений истинные, а какие – ложные:

а) $B \subset A$; **в)** $D \subset A$; **д)** $F \subset E$; **ж)** $A \subset S$;

б) $C \subset A$; **г)** $E \subset M$; **е)** $M \subset A$; **з)** $A = S$.

3) Какие элементы множества C останутся в нем, если из него удалить все элементы множества К?

4) Элементы множества C объединили с элементами множества D. В результате получилось новое множество Q. Перечислите все элементы Q.

27. Известно, что $A \subset B$, и $a \in A$. Какие из следующих записей верны:

а) $a \subset A$; **в)** $a \in B$; **д)** $A \in B$;

б) $\{a\} \subset B$; **г)** $a \notin B$; **е)** $\{a\} \subset A$;

7. Объединение множеств

Определение 7.1. *Объединением* множества A с множеством B называется новое множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B.

Обозначается

$$A \cup B.$$

Символически можно записать

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}.$$

(слово «или» имеет не исключающий смысл).

Таким образом, по определению $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда x есть элемент хотя бы одного из множеств A и B.

Например,

$$\{1, 2, 5\} \cup \{1, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$

Геометрическая иллюстрация операции объединения двух множеств приведена на рисунке 16.

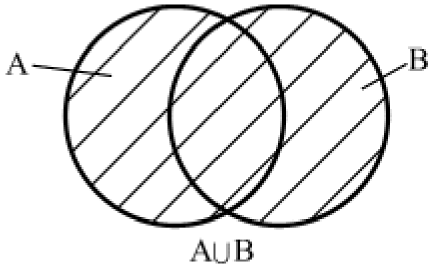


Рисунок 16

Из данного определения вытекают следующие свойства операции объединения

1. $A \cup \varnothing = A$ для всякого множества A. (7.1)
2. Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$. (7.2)
3. $A \subset A \cup B$ для всяких множеств A и B. (7.3)
4. $A \cup B = B \cup A$ для всяких множеств A и B. (7.4)
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ для всяких множеств A, B, C. (7.5)

Свойство (7.5) позволяет распространить операцию объединения на любое количество множеств. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – то их объединение

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

часто записывают в виде

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Упражнения

28. Найдите элементы множества $A \cup B$, если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$.

29. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Укажите элементы следующих множеств :

1) $A_1 \subset U$ – множество чисел, кратных трем;

2) $A_2 \subset U$ – множество чисел, кратных четырем;

3) A= $\{x \mid x \in U,\ x \in A_1$ или $x \in A_2\}$.

30. Найдите множество $A \cup B$, если

а) $A = \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$, **б)** $A = \{x \mid x \in Z, 2 \le x < 4\}$,

$B = \{x \in R \mid 3 \le x < 7\}$; $B = \{x \mid x \in Z, 4 < x < 9\}$.

31. Даны три множества A, B, C: $A = \{a, в\}$, $B = \{\{a\}, \{в\}\}$, $C = \{1, 2\}$. Установите справедливость следующих утверждений.

а) $a \subset B$;

б) $a \in A \cup B$;

в) $a \subset B \cup C$;

г) $a \in A \cup B \cup C$;

д) $\{a\} \subset A$;

е) $\{a\} \in B$;

ж) $\{a\} \subset A \cup B$;

з) $\{b\} \in A \cup C$;

и) $\{a\} \subset A \cup B \cup C$.

32. На рисунке 17 приведена диаграмма Венна для трех множеств. Найдите:

а) элементы множества $A \cup B$;

б) элементы множества $A \cup C$.

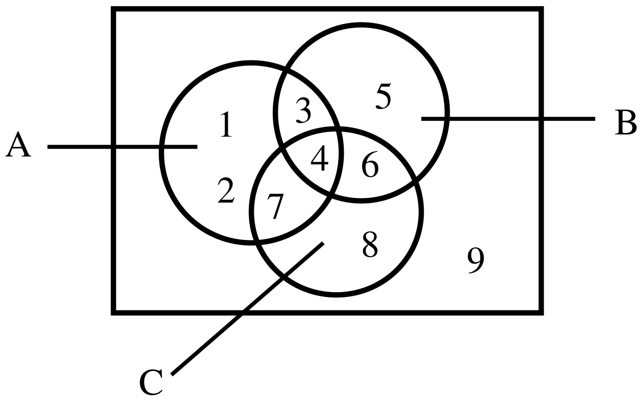


Рисунок 17.

33. Перечислите элементы множеств (см. рисунок 17)

а) $M = \{x \mid x \notin A, x \in U\}$;

б) $N = \{x \mid x \in A \cup B, x > 4\}$;

в) $K = \{x \mid x \in A \cup B \cup C$, x – четное число$\}$;

г) $T = \{x \mid x \notin A \cup B,\ x \in U\}$.

8. Пересечение множеств

Определение 8.1. *Пересечением* множества A с множеством B называется новое множество состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.

Обозначается

$$A \cap B.$$

Символически можно записать

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

Союз «и» можно не писать.

Например,

$$\{1, 2, 5\} \cap \{1, 3, 5, 6\} = \{1, 5\}.$$

Геометрическая иллюстрация операции пересечения двух множеств приведена на рисунке 18. Как и в случае объединения множеств, их пересечение на диаграммах Венна обозначается штриховкой.

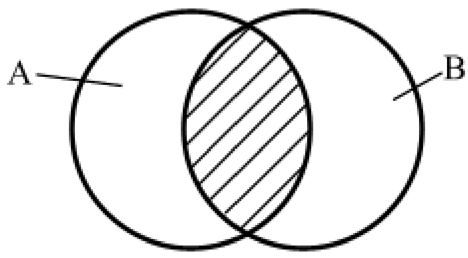


Рисунок 18

Из определения 8.1 выводится следующие свойства операции пересечения.

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ для всякого A; (8.1)
2. Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$; (8.2)
3. $A \cap B \subset A$ для всяких множеств A и B; (8.3)
4. $A \cap B = B \cap A$ для всяких множеств A и B; (8.4)
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ для всяких множеств A, B, C; (8.5)

Свойство 5 позволяет распространить операцию пресечения на любое количество множеств. Если A_1, A_2, A_3, …, A_n – множества, то их пересечение $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$ часто записывают в виде

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

Отметим два важных свойства:

1. *дистрибутивность* пересечения относительно объединения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad (8.6)$$

2. *дистрибутивность* объединения относительно пересечения

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (8.7)$$

Приведем, например, доказательство второго свойства.

Справедливость равенства (8.7) можно установить, показав, что множество, стоящее по одну сторону равенства, включено в множество, стоящее по другую сторону от этого знака равенства.

а) Доказательство того, что $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а, следовательно, x есть элемент пересечения этих множеств. Если же $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а, значит, и в этом случае x есть элемент их пересечения.

б) Доказательство того, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$, или же $x \in B$ и $x \in C$. Из этого и вытекает, что $x \in A \cup (B \cap C)$.

Замечание 8.1. В литературе по дискретной математике принято: если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то первой выполняется операция пересечения, а затем − объединения.

Если же сначала должна выполняться операция объединения, а затем пересечения, то необходимо ставить скобки.

Например,

$$(A \cup B \cup C) \cap Д.$$

В этом выражении первой выполняется операция объединения, и лишь затем – операция пересечения.

В силу замечания 8.1 правую часть формулы (8.6) можно записать в виде:

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C.$$

Упражнения

34. Найдите элементы множества $A \cap B$, если:

1) $A = \{a, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$;

2) $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{4, 7, 9\}$;

3) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3\}$;

4) A = {июнь, июль, август}, B = {август, сентябрь}.

35. Найдите элементы множества $S \cap Q$, если:

а) $S = \{x \mid x \in N,\ x < 10\}$,

$Q = \{x \mid x \in N,\ x \geq 6\}$;

б) $S = \{x \in R \mid 3 < x < 5\}$,

$Q = \{x \in R \mid 4 \leq x < 6\}$;

в) $S = \{x \mid x \in Z, 2 \leq x < 4\}$,

$Q = \{x \mid x \in Z, 3 \leq x \leq 5\}$.

36. Найдите элементы множества $A \cup B \cap C$, если:

1) $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{x \mid x \in N,\ x < 9\}$, $C = \{x \mid x \in N\}$;

2) $A = \{a, в, c\}$, $B = \{l, в, c\}$, $C = \{l, в, k\}$.

37. Найдите элементы множеств $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, если

$A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{5, 7, 9\}$.

38. Укажите верные равенства:

а) $(A \cup B) \cap (C \cup A) = A \cup (B \cap C)$;

б) $(B \cup C) \cap A = A \cap B \cup C \cap A$;

в) $A \cap B = B \cap A$;

г) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cap (C \cup B)$;

д) $A \cap B \cup A \cap C = A \cup C \cap B$;

е) $A \cap (B \cup C) = A \cup B \cap C$

39. По диаграмме Вена (см . рисунок 17) найдите

а) элементы множества $B \cap C$;

б) элементы множества $A \cap B \cap C$;

в) элементы множества $A \cap B \cup C$.

40. Укажите верные выражения:

а) $A \cap A \cap (A \cup B) = A \cup A \cap B \cup A \cap B \cap C$;

б) $(A \cup B) \cap \varnothing = \varnothing$;

в) $\varnothing \cup A \cap B = \varnothing \cap (A \cup B) \cup \varnothing \cap C$;

г) $(A \cap U) \cup B = A \cup B$;

д) $A \cap \varnothing \cup B = B$;

е) $A \cap \varnothing \cap B = A \cap B$.

41. Укажите пустые множества, если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $U \neq \varnothing$ и $A \subset U$, $B \subset U$.

а) $\varnothing \cup A$; **в)** $U \cap (A \cup B) \cap \varnothing$; **д)** $U \cup \varnothing \cap A$;

б) $A \cap \varnothing \cap B$; **г)** $\varnothing \cup A \cap \varnothing$; **е)** $U \cap B \cup \varnothing$.

9. Дополнение множества. Законы де Моргана

Путь U – универсальное множество, $A \subset U$.

Определение 9.1. *Дополнением* множества A (до U) называется множество всех элементов U, которые не выходят в множество A .

Обозначается дополнение $\overline{A}$.

Символические можно записать

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

На диаграмме Вена множество $\overline{A}$ изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределом круга, изображающего A (рисунок 19).

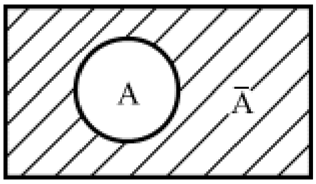


Рисунок 19

Из определения 9.1 выводятся следующие равенства:

1. $A \cup \overline{A} = U$; (9.1)

2. $A \cap \overline{A} = \varnothing$; (9.2)

3. $\overline{\overline{A}} = A$; (9.3)

4. Если $A = \varnothing$, то $\overline{A} = U$; (9.4)

5. Если $A = U$, то $\overline{A} = \varnothing$. (9.5)

Между операциями объединения, пересечения и дополнения существует связь, которая выражается двумя формулами:

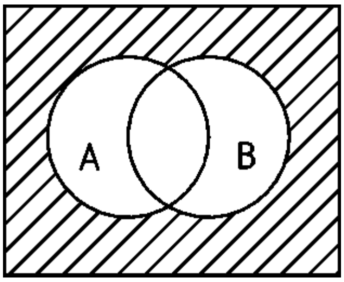
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{9.6}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{9.7}$$

Формулы (9.6) и (9.7) называют соответственно первым и вторым законом *де Моргана*.

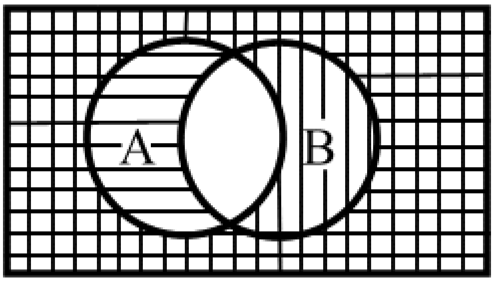
Первый закон формируется так: «дополнение объединения двух множеств есть пересечение дополнительной этих множеств». Аналогично формируется второй закон: «дополнение пересечения двух множеств есть объединение дополнений этих множеств».

В справедливости равенства (9.6) можно убедиться на диаграммах Венна. Рисунок 20 соответствует правой части, рисунок 21 – левой части равенства.



$\overline{A \cup B}$

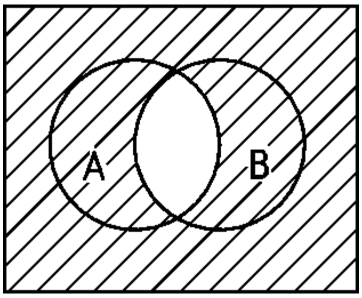
Рисунок 20



$\bar{A} \cap \bar{B}$ (двойная штриховка)

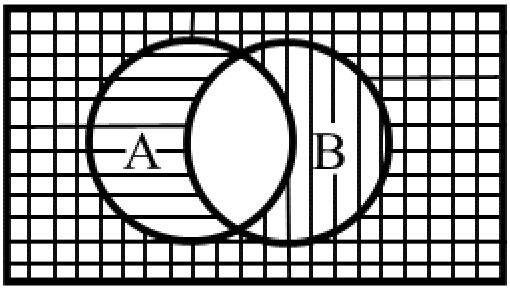
Рисунок 21

Аналогично можно убедиться в справедливости формулы (9.7). На рисунках 22 и 23 приведены примеры диаграммы Венна соответственно левой и правой части этого равенства. Заштрихованные области на рисунках совпадают.



$\overline{A \cap B}$

Рисунок 22



$\bar{A} \cup \bar{B}$ (вся заштрихованная область)

Рисунок 23

Законы де Морга можно распространить на конечное число множеств. Для трех множеств, например, справедливы равенства

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C},$$

$$\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$$

Упражнения

42. Пусть $U = \{x \in N \mid x < 7\}$. Составьте множество $\bar{A}$, если

1) A $=\{1, 2\}$;

2) A $=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

3) A $= \{1, 3, 5\}$;

4) A $= \varnothing$.

43. Найдите элементы множества $\bar{A}$, если

$$A = \{x \in N \mid x - \text{простое число}, x < 8\},$$

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

44. Даны множества

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Используя законы де Моргана, найдите элементы следующих множеств:

1) $\overline{A\cup B}$; **3)** $\overline{A\cap B}$; **5)** $\overline{\bar{A}\cap B}$;
2) $\overline{\bar{A}\cup B}$; **4)** $\overline{\bar{A}\cap \bar{B}}$; **6)** $\overline{\bar{A}\cup \bar{B}}$.

45. Упростите выражения, используя законы де Моргана, если $A \subset B$:

1) $\overline{A\cup B}$; **3)** $\overline{\bar{A}\cup B}$; **5)** $\overline{A\cap B}$; **7)** $\overline{\bar{A}\cap B}$;
2) $\overline{\bar{A}\cup \bar{B}}$; **4)** $\overline{A\cup \bar{B}}$; **6)** $\overline{\bar{A}\cap \bar{B}}$; **8)** $\overline{A\cap \bar{B}}$.

46. Для произвольных множеств A, B, P, Q и универсального множества U установите справедливость равенств:

а)
1) $A\cup B=\bar{A}\cup\bar{B}$;
2) $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=A\cup B$;
3) $A\cup\overline{B\cap C}=A\cup\bar{B}\cup\bar{C}$;
4) $P\cup\overline{Q\cup P}\cup Q=\overline{\varnothing\cap A}$;
5) $\overline{\overline{A\cup U}\cup U}=\overline{\bar{A}\cup\varnothing}$;
6) $\overline{\overline{A\cup A}\cup\overline{A\cup A}}=A$;

б)
1) $\overline{A\cup\bar{U}}=\bar{A}$;
2) $\overline{A\cap B}\cup\bar{A}=\overline{A\cap B}$;
3) $\overline{A\cap\varnothing}\cup\overline{B\cap U}=\bar{U}$;
4) $A\cap\varnothing\cup\overline{P\cap\bar{P}}=A\cup\bar{A}$;
5) $\overline{A\cup U}\cap\overline{B\cup\varnothing}=\overline{A\cup\bar{A}}$;
6) $\overline{\overline{A\cap\bar{A}}\cap\overline{\bar{B}\cap B}}=U$.

47. Упростите выражения, если $A \subset B$, $B = C$, U – универсальное множество.

1) $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}}$;
2) $\overline{A\cup B\cap\bar{C}}$;
3) $A\cup\overline{\overline{B\cup\bar{C}}}$;
4) $\overline{A\cup A\cap B\cup A\cap C}$;
5) $\overline{A\cup\overline{\bar{B}\cap C}}$;
6) $\overline{A\cap\bar{B}\cap C}\cup U$.

10. Разность множеств

Рассмотрим два множества A и B.

Определение 10.1. *Разностью* множеств A и B называется множество всех элементов множества A, которые не являются элементами B.

Обозначается $A - B$ или A/B.

Символическая запись разности имеет вид

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

На рисунке 24 множество $A - B$ обозначено штриховкой.

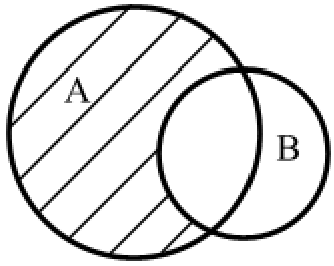


Рисунок 24

Пример. Даны множества A = {1, 2, 4}, B = {2, 5, 6}. Найдите 1) $A - B$; 2) $B - A$.

Решение. Чтобы найти множество $A - B$, из множества A нужно удалить все элементы, принадлежащие множеству B. Значит,

$$A - B = \{1, 4\}.$$

Аналогично, чтобы найти $B - A$, нужно из B удалить все элементы множества A. Следовательно,

$$B - A = \{5, 6\}.$$

Упражнения

48. Найдите элементы множества $A - B$, если

$$A = \{3, 4, 6, 7\}, B = \{6, 7, 9\}.$$

49. Найдите элементы множества $A \cup B$, если

$$A - B = \{2, 4, 5\}, \ B = \{6, 7, 8\}.$$

50. Даны множества A = {0, 1, 2, 3, 5, 6}, B = {3, 4, 6, 7, 9}, C = {1, 2, 4}, U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Найдите элементы множеств

1) $A-(B\bigcup C)$; **3)** $A-(B-C)$; **5)** $C-(\overline{A}\bigcap B)$;

2) $B-(A\bigcap \overline{C})$; **4)** $A-(B\bigcap C)$; **6)** $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$.

51. Даны множества A = {0, 1, 2, 5}, B = {1, 2}, C = { 2, 5, 7},U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Найдите множества

1) $(A\bigcup B\bigcup C)-B$;

2) $A-(B\bigcap \overline{B})$;

3) $(A\bigcup B)-(A-B)$;

4) $U-(A\bigcup B\bigcup C)$.

11. Законы поглощения. Законы склеивания. Алгебра множеств

Рассмотрим два множества A и B. Для этих множеств выполняются равенства

$$A\cup A\cap B = A, \tag{11.1}$$

$$A\cap (A\cup B) = A. \tag{11.2}$$

Тождества (11.1) и (11.2) называются *законами поглощения*.

Справедливость каждого из этих утверждений можно проверить, показав, что множество, стоящее по одну сторону от знака равенства, включено во множество, стоящее по другую сторону от этого знака равенства.

Докажем равенство (11.1).

Пусть $x \in A\cup A\cap B$. Тогда $x\in A$ или $x\in A\cap B$. И в первом и во втором случаях $x\in A$. Следовательно,

$$A\cup A\cap B \subset A$$

Пусть $x\in A$, тогда в силу операции объединения A и $A\cap B$ x является элементом $A\cup A\cap B$. Значит,

$$A \subset A\cup A\cap B.$$

Для упрощения выражения, описывающего множество, часто применяются еще два равенства, которые называются *законами склеивания*:

$$A\cap B\cup A\cap \overline{B} = A, \tag{11.3}$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B}) = A. \tag{11.4}$$

Справедливость равенств (11.3) и (11.4) можно доказать аналитически. Для формулы (11.3) имеем в силу (8.6), (9.1):

$$A\cap B\cup A\cap \overline{B} = A\cap(B\cup \overline{B}) = A\cap U = A.$$

Докажем справедливость равенства (11.4). Тогда в силу (8.7), (9.2)

$$(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B}) = A\cup(B\cap \overline{B}) = A\cup\varnothing = A.$$

Свойства операций объединения, пересечения и дополнения, а также Законы де Моргана, поглощения и склеивания позволяют упрощать различные сложные выражения, содержащие множества, подобно тому как мы проделываем тождественные преобразования в алгебре.

Пример. Упростите выражение

$$\overline{A}\cap B\cap C\cup \overline{A}\cap B.$$

Решение.

По формуле (8.5) имеем

$$\overline{A}\cap B\cap C\cup \overline{A}\cap B = \overline{A}\cap(B\cap C)\cup \overline{A}\cap B.$$

В силу (8.2)

$$\overline{A}\cap(B\cap C)\cup \overline{A}\cap B = \overline{A}\cap(B\cap C\cup B).$$

Операция объединения множеств обладает свойством коммутативности (7.4). Значит,

$$\overline{A}\cap(B\cap C\cup B) = \overline{A}\cap(B\cup B\cap C).$$

Правую часть последнего равенства преобразуем по формуле (11.1):

$$\overline{A}\cap(B\cap C\cup B) = \overline{A}\cap(B\cup B\cap C) = \overline{A}\cap B.$$

Следовательно,

$$\overline{A}\cap B\cap C\cup \overline{A}\cap B = \overline{A}\cap B.$$

Упражнения

52. Упростите выражения, используя законы поглощения.

1) $\overline{A}\cap B\cap C\cup\overline{A}\cap B$; **4)** $A\cap\overline{B}\cap C\cup\overline{B}$;

2) $A \cap B \cap \bar{D} \cup \bar{D}$;

3) $\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A}$;

5) $A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap C$;

6) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{C}$.

53. Даны множества

A = {1, 2, 3, 4, 5};

B = {2, 3, 4, 5, 6};

C = {2, 3, 6, 7};

D = {2, 5, 6, 7, 8};

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Укажите элементы множеств.

1) $A \cap B \cap C \cup A \cap C$;

2) $B \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{C}$;

3) $A \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap D$.

54. Упростите выражения, используя законы поглощения.

1) $A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap D$;

2) $B \cap C \cap D \cup C \cap D \cup A \cap C \cap D$;

3) $B \cap (\bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap B)$;

4) $A \cap \bar{C} \cap (A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B})$;

5) $(A \cup \bar{B}) \cap (A \cup \bar{B} \cup C) \cap (A \cup \bar{B} \cup D)$;

6) $(\bar{A} \cup B) \cap B \cap (B \cup \bar{C})$.

55. Найдите элементы множества $A \cap B \cap \bar{C} \cup A \cap B \cup B$,

если A = {1, 3, 5, 7}, B = {4, 5, 6, 7}, C = {1, 2}.

56. Найдите множество

$$A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap \bar{D} \cup A \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cap D,$$

если A = {1, 2, 4, 6, 8}, B = {2, 3, 6}, C = {2, 4, 6, 7}, D = {4, 5, 7}.

57. Упростите выражение, используя законы склеивания.

1) $A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \bar{C}$;

2) $A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$;

3) $\bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B}$;

4) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

58. Найдите элементы множеств

1) $A \cap B \cap C \cup B \cap C \cup B \cap \bar{C}$;

2) $(A \cap B \cup C) \cap (A \cap B \cup \bar{C})$;

3) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \bar{C})$;

4) $(A \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap B$,

если A = {1, 2, 4, 5}, B = {1, 3, 6, 7}, C = { 2, 3, 6, 7},

59. Установите верность равенств

1) $A \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C = A \cup C$;

2) $A \cap B \cup A \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \cup A \cap B$;

3) $\bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup B = B$;

4) $A \cap B \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap B = B \cap C$;

5) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = \overline{(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})}$;

6) $(A \cap B \cup C) \cap (\overline{A \cap B} \cup C) = C$;

7) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C = B \cup C$;

8) $A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap C = A \cup C$;

9) $A \cap B \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$;

10) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \varnothing$;

11) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cap B$;

12) $(A \cap B \cup \bar{A} \cap B) \cap B = \varnothing$.

Повторение

60. Упростите выражения.

1) $A \cap B \cap \bar{C} \cup A \cap B \cap C \cup C$;

2) $A \cap C \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C$;

3) $B\cap\bar{C}\cup\bar{B}\cap\bar{C}\cup B\cap C$;

4) $\bar{A}\cap\bar{B}\cup A\cap B\cup\bar{A}\cap B$.

61. Упростите выражения, если $C=U,\ D=\varnothing$.

1) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$;

2) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup B\cap C\cap D$;

3) $(\bar{A}\cup B\cup C)\cap(C\cup D)$;

4) $A\cap C\cup\bar{B}\cap C\cup A\cap D$;

5) $\bar{A}\cap(B\cup C\cup D)\cap B\cap C$;

6) $(A\cup B\cup C)\cap(\bar{B}\cup D)$.

62. Упростите выражения, если $C\subset D$, $A\subset B$.

1) $A\cap B\cap C\cap D$;

2) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}$;

3) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$;

4) $A\cap\bar{B}\cup C\cap D$;

5) $\overline{A\cup B}\cap\overline{C\cup D}$;

6) $(A\cup B\cup C)\cap(B\cup C\cup D)$.

63. Даны множества A = {1, 2, 3}, B = {1, 2}, C = {3, 4, 5}, U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Укажите элементы множеств

1) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

2) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C$;

3) $\bar{A}\cap B\cap\bar{C}$;

4) $\bar{A}\cap B\cap C$;

5) $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

6) $A\cap\bar{B}\cap C$;

7) $A\cap B\cap\bar{C}$;

8) $A\cap B\cap C$;

9) $A\cap B\cup\bar{B}\cap C$;

10) $B\cap C\cup A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

11) $A\cap B\cap C\cup A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

12) $A\cup B\cup C$;

13) $(A\cap B)\cap\bar{C}$;

14) $(B\cup\bar{C})\cap(A\cup C)$;

15) $(A\cup B)\cap A\cap C$;

16) $\bar{A}\cap B\cup B\cap C$;

17) $(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$;

18) $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}}\cap A$.

64. Даны множества A = {1, 2, 4, 6, 7}, B = {1, 2, 4}, C = {6, 7, 8}, U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Найдите элементы множеств

1) $A\cap B\cup\bar{A}\cap\bar{C}$;

2) $A\cap\bar{B}\cap C\cup B\cap C$;

3) $(A\cup B)\cap(B\cup\bar{C})$;

4) $B\cup A\cap\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap C$;

5) $(A\cup\bar{C})\cap(B\cup C)$;

6) $A\cap B\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.

Ответы

1. а).

2. $\varnothing$.

3. $\{1, 2, 4, 5, 3\}$.

4. 2), 5).

5. а) 6; **в)** 2; **д)** 4;

б) 3; **г)** 5; **е)** 4.

6. а) ; **в)** ; **г)**; **д)** .

7. нет.

8. Например, $1 \in Z$, $Z \in \{Z\}$, но $1 \notin \{Z\}$, где Z − множество целых чисел.

9. 1) Множество целых чисел, кратных 6.

2) Множество таких x, которые одновременно являются элементами множества A и множества B.

10. а); **д)**.

11. а); **г)**.

12. а) 9; **в)** 2; **д)** 3.

б) 0; **г)** 3;

13. а) *а*; *в*; с **б)** 5; 7; 8 **в)** 1; 2; 3.

14. нет.

15. 16.

16. 5.

17. 1) а), г), д), е) верные;

2) а), г), д) верные;

3) а), в), г) верные.

18. в) одно.

19. всего подмножеств 8.

20. а); **д)**.

21. г).

22. 0, 1, 4, 6, 8, 9.

23. 2, 3, 5, 7.

24. ю, я, о.

25. у, е.

26. 1) C; D; S; E; K; M.

2) а), г), д), з) – ложные; б), в), е), ж) – истинные.

3) не останется ни одного элемента.

4) 2, 16, 20, 52.

27. б), **в)**, **е)**.

28. *а*, *в*, *с*, *d*.

29. 1) $A_1 = \{3, 6\}$;

2) $A_2 = \{4, 8\}$;

3) $A = A_1 \cup A_2 = \{3, 4, 6, 8\}$.

30. а) $A \cup B = \{x \in R \mid 2 < x < 7\}$;

б) $A \cup B = \{x \in Z \mid 2 \le x < 9\}$.

31. б), **г)**, **д)**, **е)**, **ж)**, **и)** – истинные;

а), **в)**, **з)** – ложные.

32. 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8\}$;

2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6,7, 8\}$.

33. $M = \{5, 6, 7, 8\}$.

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$K = \{2, 4, 6, 8\}$.

$T = \{8, 9\}$.

34. 1) $A \cap B = \{ c, d\}$;

2) $A \cap B = \{ 4 \}$;

3) $A \cap B = B$;

4) $A \cap B = \{$ август $\}$.

35. а) $S \cap Q = \{x \in N \mid 6 \le x < 10\}$;

б) $S \cap Q = \{x \in R \mid 4 \le x < 5\}$;

в) $S \cap Q = \{x \in Z \mid 3 \le x < 4\}$.

36. 1) $A \cup B \cap C = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

2) $A \cup B \cap C = \{a, в, c, l\}$.

37. $A \cap B = \{5, 7\}$; $B \cap C = \{5, 6\}$; $A \cap C = \{1, 5\}$.

38. а), **б)**, **в)**, **е)** – верные;

г), **д) –** неверные.

39. а) $B \cap C = \{4, 6\}$;

б) $A \cap B \cap C = \{4\}$;

в) $A \cap B \cup C = \{3, 4, 6, 7, 8\}$.

40. б), **г)**, **д)**.

41. б), **в)**, **г)**.

42. 1) $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$;

2) $\overline{A} = \varnothing$;

3) $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$;

4) $\overline{A} = U$.

43. $\overline{A} = \{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

44. 1) $\{6, 7\}$;

2) $\{1, 2\}$;

3) $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$;

4) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

5) $\{1, 2, 3, 6, 7\}$;

6) $\{3\}$.

45. 1) $\overline{B}$; **5)** $\overline{A}$;

2) A; **6)** B;

3) $\varnothing$; **7)** $A \cup \overline{B}$;

4) $\overline{A} \cap B$; **8)** U.

46. а) 1) неверное;

2) неверное;

б) 1) верное;

2) верное;

3) верное; **3)** неверное;

4) верное; **4)** верное;

5) неверное; **5)** верное;

6) верное; **6)** неверное.

47. **1)** A;

2) $\overline{A}$;

3) U;

4) $\overline{A}$;

5) $\varnothing$;

6) U.

48. $A - B = \{3, 4\}$;

49. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

50. **1)** $\{0, 5\}$;

2) $\{4, 7, 9\}$;

3) $\{0, 1, 2, 5\}$;

4) $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$;

5) $\{1, 2\}$;

6) $\{0, 1, 2, 4, 5, 7, 9\}$.

51. **1)** $\{0, 5, 7\}$;

2) $\{0, 1, 2, 5\}$;

3) $\{1, 2\}$;

4) $\{3, 4, 6\}$.

52. **1)** $\overline{A} \cap B$;

2) $\overline{D}$;

3) $\overline{A}$;

4) $\overline{B}$;

5) $A \cap C$;

6) $\overline{C}$.

53. **1)** $\{2, 3\}$;

2) $\{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$;

3) $\{2, 3\}$.

54. **1)** $A \cap \overline{B}$;

2) $C \cap D$;

3) $\overline{A} \cap B$;

4) $A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$;

5) $A \cup \overline{B}$;

6) B.

55. B.

56. $A \cap C = \{2, 4, 6\}$.

57. **1)** $A \cap B$;

2) $A \cap C$;

3) $\overline{A}$;

4) $\overline{B}$.

58. **1)** $\{1, 3, 6, 7\}$;

2) $\{1\}$;

3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

4) $\{3, 6, 7\}$.

59. **1)** верное;

2) верное;

3) неверное;

4) неверное;

5) верное;

6) верное;

7) неверное;

8) верное;

9) неверное;

10) неверное;

11) верное;

12) верное.

60. **1)** $A \cap B \cup C$;

2) $A \cup C$;

3) $B \cup \overline{C}$;

4) $\bar{A} \cup B$.

61. 1) $A \cup B$;

2) $\bar{A} \cap \bar{B}$;

3) U;

4) $A \cup \bar{B}$;

5) $\bar{A} \cap B$;

6) $\bar{B}$.

62. 1) $A \cap C$;

2) $\bar{B} \cap \bar{D}$;

3) $B \cap D$;

4) $\varnothing$;

5) $\bar{B} \cap \bar{D}$;

6) $B \cup C$.

63. 1) $\{6\}$;

2) $\{4, 5\}$;

3) $\varnothing$;

4) $\varnothing$;

5) $\varnothing$;

6) $\{3\}$;

7) $\{1, 2\}$;

8) $\varnothing$;

9) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

10) $\varnothing$;

11) $\varnothing$;

12) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

13) $\{1, 2\}$;

14) $\{1, 2\}$;

15) $\{3\}$;

16) $\varnothing$;

17) $\{3\}$;

18) $\varnothing$.

64. 1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $\{6, 7\}$;

3) $\{1, 2, 4\}$;

4) $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$;

5) $\{1, 2, 4, 6, 7\}$;

6) $\{3, 5\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стол Роберт, Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Стол Робер. − Москва: Просвещение, 1968. − 230 с.

2. Марков, П.Е. Элементы теории множеств: методические указания / П.Е. Марков, Л.Н. Шаповалова. − Зерноград: РИО ФГОУ ВПО АЧГАА, 2005.

3. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика: учебное пособие / Ю.П. Шевелев. –Санкт-Петербург: Лань, 2008. − 592 с.

Шаповалова Лариса Николаевна
кандидат физико-математических наук

Серегина Виктория Викторовна
кандидат социологических наук, доцент

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 11.11.2014.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 2,5. Тираж 50 экз. Заказ № 367.

РО и ОП Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВПО «Донской государственный аграрный университет»

347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15