МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
в г. ЗЕРНОГРАДЕ

Кафедра высшей математики

Д.В. Степовой, Н.М. Удинцова, С.А. Белоконов

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Зерноград – 2014

УДК 517.(075)

Печатается по решению методической комиссии
по направлению подготовки 080100.62 – Экономика
Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВПО ДГАУ в г. Зернограде

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая математика»
Коптева Н.А.
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит» ***Бурейко И.Г.***

Степовой, Д.В. Дискретная математика: учебное пособие / Д.В. Степовой, Н.В. Удинцова, С.А. Белоконов. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВПО ДГАУ, 2014. – 51 с.

Пособие предназначено для студентов 2 курса очной и заочной форм обучения высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 080100.62 – Экономика.

Учебное пособие содержит теоретические сведения по основным разделам дискретной математики: теория множеств, математическая логика, теория графов, комбинаторика, а также примеры решения задач, контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы по всем изучаемым разделам.

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с ФГОС ВПО по направлению подготовки 080100.62 – Экономика.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры высшей математики
Протокол № 3 от 21 октября 2014 г.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией
по направлению подготовки 080100.62 – Экономика.
Протокол № 2 от 24 октября 2014 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Материал, изложенный в данном учебном пособии, соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования дисциплины «Дискретная математика», изучаемой студентами основной образовательной программы бакалавриата по направлению подготовки 080100.62 - Экономика.

Учебное пособие охватывает основные разделы дисциплины «Дискретная математика»: теория множеств, теория графов, математическая логика, комбинаторика. Каждый раздел содержит теоретические сведения, примеры решений типовых задач и задания для самостоятельной работы студентов, помогающие усвоить и закрепить изучаемый материал. При изложении материала применяются традиционные обозначения и терминология.

Данное учебное пособие может быть полезно как преподавателям при проведении занятий со студентами очного и заочного обучения по указанному направлению, так и студентам для самостоятельного изучения соответствующего материала и является базой для подготовки к зачету.

Пособие способствует формированию у студентов:

− знаний основных положений теории множеств, алгебры высказываний, комбинаторики, теории графов (ОК-1); методов и аппарата дискретной математики (ПК-5).

− умений обобщать, анализировать информацию; проводить верные логические рассуждения; применять методы дискретной математики для анализа экономических задач и выбора метода их решения (ОК-1); применять аппарат дискретной математики в задачах формирования экономических моделей и решении прикладных задач (ПК-5).

- владений математическими методами анализа и решения прикладных и экономических задач (ОК-1); методами дискретной математики при составлении моделей и решении экономических задач, анализа результатов полученных решений (ПК-5).

Изучение дискретной математики позволит студенту приобрести необходимые навыки, требуемые при его дальнейшем обучении; развить способность к общению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения, а также способность самостоятельно выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы.

Всё это понадобится для успешной работы и ориентации в будущей профессиональной деятельности.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дискретная математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов. В отличие от дискретной математики классическая математика занимается преимущественно изучением структур *непрерывного* характера. Деление математики на классическую и дискретную достаточно условно, поскольку, с одной стороны, происходит взаимопроникновение возникающих идей и методов, а с другой – средства дискретной математики используются для изучения непрерывных моделей и наоборот.

Бурное развитие дискретной математики обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления различных моделей на компьютерах, являющихся по своей природе конечными структурами.

Дискретная математика - совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов, то есть свойства математических моделей объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, которыми оперируют в различных областях знаний. В дискретной математике существует множество разделов, таких как математическая логика, комбинаторная логика, теория алгоритмов, теория автоматов, теория множеств, теория искусственного интеллекта и многие другие.

1 ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ

1.1 Основные понятия теории множеств

Приводимые определения, понятия и теоремы изложены с позиций так называемой *наивной теории множеств*. Существуют другие построения теории множеств, например, конструктивное и формалистское. С позиций наивной теории множеств понятие множества является первоначальным, неопределяемым.

Под множеством понимают совокупность каких-либо элементов одной природы.

Например, можно говорить о множестве деревьев в парке, множестве студентов в аудитории, множестве действительных чисел и т.п.

Определение. Конечное множество – это такое множество, для которого существует натуральное число, являющееся числом его элементов.

Определение. Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным.

Определение. Если бесконечное множество оказывается возможным привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то такое множество называют счетным.

Множества обозначают прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, а элементы множеств – строчными. Предложения «x– элемент множества M» и «a– не является элементом множества Y» будем записывать с помощью символа *принадлежности* «$\in$»: «$x\in$M» и «$a\notin$Y».

Существование несчетных множеств следует из теоремы, доказанной Георгом Кантором.

Теорема. Множество всех действительных чисел интервала $0 < x \leq 1$ несчетно.

Существуют три *основных способа задания множеств*:

1. Перечисление. Множество можно задать, перечислив все его элементы. Такой способ удобен при малом числе элементов. Перечислением можно задать, естественно, только конечное множество, хотя иногда проще задать его описанием.

2. Описание – задание такого свойства, которым обладают только элементы рассматриваемого множества. Например, трудно перечислить *все натуральные числа от 2 до* 2^n, а описание содержится в выделенных словах.

3. Задание порождающих процедур. Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже имеющихся элементов или других объектов. Тогда элементами множества считаются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

Замечание. Бесконечные множества можно задать только последними двумя способами.

Определение. Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Определение. Два множества M и N называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Если множества M и N равны, то пишут M=N, в противном случае M$\neq$N. Таким образом, M$\neq$N, если в множестве M есть элемент, не принадлежащий N, либо, наоборот, в N есть элемент, не принадлежащий M.

Определение. Множество, любой элемент которого является числом, называется числовым.

Среди числовых множеств особо выделяют следующие:

N – множество всех натуральных чисел;

Z – множество всех целых чисел; Z={..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...};

Q– множество всех рациональных чисел;

R– множество всех действительных чисел.

Определение. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Любое множество является подмножеством самого себя, $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Определение. Множество A <u>включено</u> в множество B ($A \subseteq B$), если любой элемент множества A принадлежит множеству B.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ и говорят, что множество A строго включено в множество B.

Основные свойства включений:
1) $A \subseteq A$;
2) $\varnothing \subseteq A$;
3) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
4) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
5) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$;
6) если $A \subset B$ и $B \subseteq C$, то $A \subset C$.

Определение. Множество всех подмножеств множества A называется <u>множеством-степенью</u> (фактор-множеством) множества A и обозначается через $\boldsymbol{P}(A)$.

Пример 1. Дано множество $A=\{1,2,3\}$. Найти его фактор-множество $\boldsymbol{P}(A)$.

Решение. $\boldsymbol{P}(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Для любого множества A справедливы следующие утверждения:
1) Если $B \subseteq A$, то $B \in \boldsymbol{P}(A)$.
2) Если $a \in A$, то $\{a\} \subseteq A$ и $\{a\} \in \boldsymbol{P}(A)$.
3) Если A- бесконечное множество, то и $\boldsymbol{P}(A)$ - бесконечное.
4) Если множество A состоит из n элементов, то можно определить общее число всевозможных подмножеств n-элементного множества A.

Теорема о мощности множества-степени.

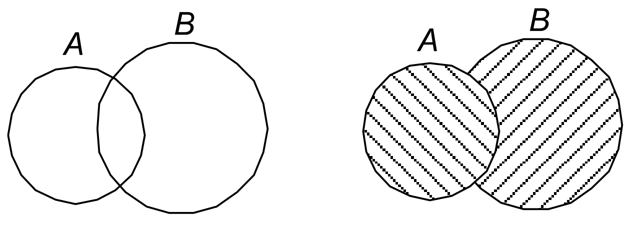
Если $|A|=n$, то $|\boldsymbol{P}(A)|=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, (n=1, 2, 3,...).

1.2 Алгебра множеств

Определение. Способы получения новых множеств из уже имеющихся называются операциями над множествами.

Определение. <u>Объединением</u> (соединением, суммой) множеств A и B называется множество (обозначается через $A \cup B$, иногда $A+B$), состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A или B, то есть

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{или } (x \in B)\}.$$

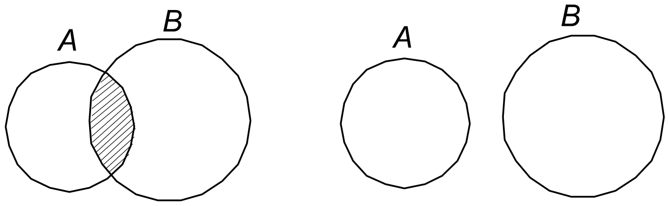


а *б*

Рисунок 1. Объединение множеств

Определение. <u>Пересечением</u> (произведением) множеств A и B называется множество (обозначается через $A \cap B$, иногда $A{\cdot}B$ или AB), состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A, B, то есть

$$A \cap B = \{x|\ (x \in A) и\ \ (x \in B)\ \}.$$

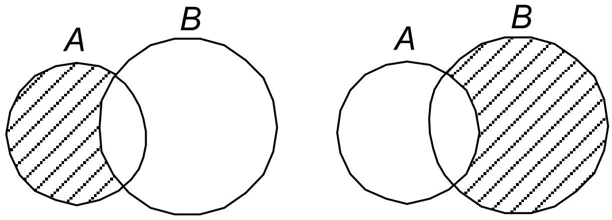


а *б*

Рисунок 2. Пересечение множеств

Определение. <u>Разностью</u> множеств A и B называется множество (обозначается $A\backslash B$ или A-B), состоящее из всех тех и только тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B, то есть

$$A\backslash B = \{x|\ (x \in A) и\ \ (x \notin B)\}.$$



а *б*

Рисунок 3. Разность множеств

Пример 2. Если A={1, 2, 3, 4}, B={1, 3, 5}, C={5, 6}. Указать элементы множеств $A\backslash B$, $A\backslash C$,$B\backslash C$, $C\backslash B$, $B\backslash A$.

Решение.
$A\backslash B$={2, 4},
$A\backslash C$=A={1, 2, 3, 4},
$B\backslash C$={1, 3},
$C\backslash B$={6},
$B\backslash A$={5}.

Определение. Если в некотором рассмотрении все множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества U, то это множество называется <u>универсальным</u> (для этого рассуждения) или универсумом рассуждения, или просто <u>универсумом</u>.

Определение. Множество $\overline{A}$, определяемое из соотношения

$$\overline{A} = U \setminus A,$$

называется <u>дополнением</u> множества A до универсального множества U, то есть

$$\bar{A} = \{x |\ (x \in U) и\ \ (x \notin A)\}.$$

Определение. Симметрической разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое через $A\Delta B$ и определяемое следующим образом:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

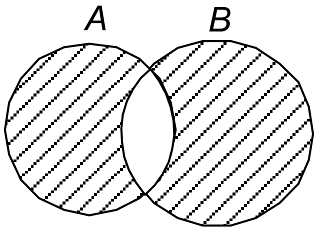


Рисунок 4. Симметрическая разность множеств

1.3 Основные свойства операций над множествами

1) $A \bigcup B = B \bigcup A$;
2) $A \bigcap B = B \bigcap A$;
3) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$;
4) $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$;
5) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
6) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

Тождества (1, 3, 5) выражают соответственно *коммутативный*, *ассоциативный* и *дистрибутивный законы* для объединения множества, а тождества (2, 4, 6) – те же законы для пересечения множеств.

7) $A \bigcup \varnothing = A$;
8) $A \bigcap U = A$;
9) $A \bigcup \overline{A} = U$;
10) $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$;
11) $A \bigcup U = U$;
12) $A \bigcap \varnothing = \varnothing$;
13) $\bar{\varnothing} = U$;
14) $\bar{U} = \varnothing$.

Соотношения (7, 9, 11) определяют свойства пустого множества $\varnothing$ и универсума U относительно объединения, а соотношения (8, 10, 12) –

относительно пересечения. Из симметрии этих формул относительно A и $\bar{A}$ следует не только то, что $\bar{A}$ является дополнением A, но и что A является дополнением $\bar{A}$.

С помощью операции дополнения можно в удобном виде представить разность множеств

$$A \backslash B = \{x \mid (x \in A) и \ (x \notin B)\} = \{x \mid (x \in A) и \ (x \in \bar{B})\},$$

то есть

15) $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

Законы идемпотентности позволяют записывать формулы с множествами без коэффициентов и показателей степени:

16) $A \cup A = A$;

17) $A \cap A = A$.

Законы поглощения:

18) $A \cup (A \cap B) = A$;

19) $A \cap (A \cup B) = A$.

Закон де Моргана:

20) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

21) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Свойства дополнения, разности, дизъюнктивной системы, включения и равенства:

22) Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \bar{A}$;

23) $\bar{A} = U \backslash A$;

24) $\bar{\bar{A}} = A$;

25) $A \backslash B = A \cap \bar{B}$;

26) $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$;

27) $A \Delta B = B \Delta A$;

28) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

29) $A \Delta \varnothing = \varnothing \Delta A = A$;

30) $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$;

31) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

32) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$;

33) $A \subset B$, если и только если $A \cap B = A$ или $A \cup B = B$ или $A \cap \bar{B} = \varnothing$;

34) A=B, если $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \varnothing$, то есть $A \Delta B = \varnothing$.

Операция объединения является двойственной к операции пересечения и наоборот, операция пересечения является двойственной к операции объединения. Операция дополнение является двойственной сама к себе (самодвойственной).

Пустое множество является двойственным к универсальному множеству и наоборот, универсальное множество является двойственным к пустому множеству.

Принцип двойственности в алгебре множеств заключается в том, что если справедливо тождество F=R, то справедливо и двойственное тождество F*=R*.

Выполнимость принципа двойственности иллюстрируют вышеприведенные законы алгебры множеств.

Пример 3. Пусть заданы три числовых множества A={2,3,4,10}, B={1,2,10,12}, C={1,9,10}. Требуется указать элементы множеств

$$D = (A \cap B) \cup (B \cap C), \quad E = (A \cup C)/(B \cap A).$$

Решение. Множество D есть объединение множеств $A \cap B \; и \; B \cap C$. Найдем сначала множества

$$A \cap B = \{2,10\},$$
$$B \cap C = \{1,10\}.$$

Тогда

$$D = (A \cap B) \cup (B \cap C) = \{1,2,10\}.$$

Множество E есть разность между объединением $A \cup C$ и пересечением $B \cap A$. Найдем сначала множества

$$A \cup C = \{1,2,3,4,10,12\},$$
$$B \cap A = \{2,10\}.$$

Тогда

$$E = (A \cup C)/(B \cap A) = \{1,3,4,12\}.$$

Пример 4. Упростить выражение

$$S = \overline{\overline{A \cap \overline{B}} \cup A \cap B \cap \overline{C}} \cap \overline{(A \cup B \cup C)\backslash(A\backslash C)}.$$

Решение. В преобразованиях будем пользоваться свойствами операций над множествами и формулами поглощения. Знак $\cap$ в записи формул часто опускают. Обозначим

$$S_1 = \overline{\overline{A \cap \overline{B}} \cup A \cap B \cap \overline{C}},$$
$$S_2 = \overline{(A \cup B \cup C)\backslash(A\backslash C)}.$$

Тогда

$$S = S_1 \cap S_2.$$

По формулам (21) и (24)

$$S_1 = \overline{\overline{A\overline{B}} \cup AB\overline{C}} = A\overline{B}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) = A\overline{B}\left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) = A\overline{B}.$$

Последний результат получен с использованием формулы поглощения:

$$\overline{B}\left(\overline{B} \cup (\overline{A} \cup C)\right) = \overline{B}.$$

$$S_2 = \overline{(A \cup B \cup C)\backslash(A\backslash C)} = \overline{(A \cup B \cup C) \cap \overline{(A\overline{C})}} \,,$$

так как дважды заменяем разность по формуле (15).

Далее вновь применяем закон де Моргана:

$$S_2=\overline{A \cup B \cup C} \cup \overline{\overline{A\bar{C}}} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{C}.$$

Вынесем за скобки $\bar{C}$, используя дистрибутивный закон:

$$S_2=\bar{C}(\bar{A}\bar{B} \cup A).$$

К выражению в скобках применим дистрибутивный закон (15):

$$\bar{A}\bar{B} \cup A = (A \cup \bar{A})(A \cup \bar{B}) = U(A \cup \bar{B}) = A \cup \bar{B}$$

Следовательно,

$$S_2=\bar{C}(A \cup \bar{B}).$$

Так как по формуле поглощения (19)

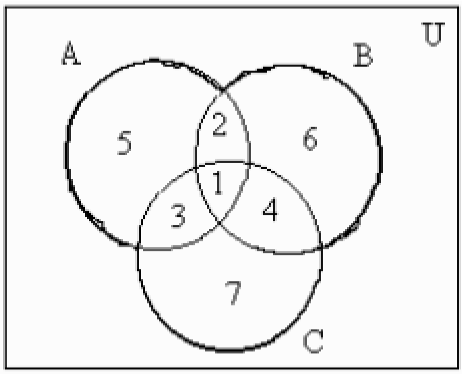
$$\bar{B}(A \cup \bar{B}) = \bar{B},$$

то

$$S=S_1 \cap S2 = A\bar{B}\bar{C}(A \cup \bar{B}) = A\bar{B}\bar{C}\ .$$

Пример 5. Среди 100 деталей прошли обработку на первом станке 42 штуки, на втором – 30 штук, на третьем – 28. Причем на первом и втором станках обработано 5 деталей, на первом и третьем – 10 деталей, на втором и третьем – 8 деталей. На всех трех станках обработано 3 детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

Решение. Обратимся к диаграмме



Обведенное жирной линией множество $A \cup B \cup C$ есть множество деталей, обработанных хотя бы на одном из станков. Оно разбито на 7 непересекающихся подмножеств, обозначенных на чертеже цифрами.

Область 1 есть множество деталей, прошедших обработку на всех трех станках, то есть множество $A \cap B \cap C$.

По условию задачи

$$n(A \cap B \cap C)=3.$$

Множество деталей, обработанных на первом и втором станках, то есть $A \cap B$ – это сумма областей помеченных цифрами 1 и 2. Причем область 2 – множество деталей, обработанных только на первом и втором станках.

По условию задачи

$$n(A \cap B)=5.$$

Следовательно, число деталей, обработанных только на первом и втором станках, равно 5-3=2.

Аналогично, число элементов множества, обозначенного цифрой 3, есть число деталей, прошедших обработку на первом и третьем станках, оно равно

$$n\,(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 10 - 3 = 7.$$

Число деталей, прошедших обработку только на втором и третьем станках (область 4), равно

$$n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 8 - 3 = 5.$$

Область, помеченная на диаграмме цифрой 5, есть множество деталей, обработанных только на первом станке. Число элементом этого множества получим, если из числа всех обработанных на первом станке деталей вычесть число деталей, обработанных одновременно на первом и втором, а также на первом и третьем станках, в том числе и на всех трех станках, 42– (3+2+7)=30.

Аналогично можно определить число деталей, обработанных только на втором станке (область 6), 30–(3+2+5)=20, а также только на третьем (область 7) 28–(3+7+5)=13. Число всех обработанных деталей, то есть $n(A \cup B \cup C)$, получим, если сложим число элементов всех областей с 1 по 7. Оно равно 80. Дополнением к нему является множество необработанных деталей

$$U\backslash(A \cup B \cup C) = \overline{A \cup B \cup C}\,,$$

$$n(\overline{A \cup B \cup C})=100\text{-}80=20.$$

1.4 Декартово произведение двух множеств

Определение. Под упорядоченной парой будем понимать два элемента x и y, рассматриваемых в определенном порядке как единое целое.

Пары (a,b) и (c,d) считаются *равными* тогда и только тогда, когда a=c, b=d.

Определение. Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, первый компонент которых принадлежит множеству A, а второй – множеству B:

$$A \times B = \{(x, y) |\ (x \in A) и\ \ (y \in B)\ \}.$$

Пример 6. A={a, b, c}, B={1, 2}. Указать элементы множеств $A\times B$ и $B\times A$.

Решение. $A\times B$={(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)};
$B\times A$={(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)}.

Произведение множеств не подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, но для него выполняются законы дистрибутивности относительно операций объединения, пересечения, разности и симметрической разности.

Приведем эти свойства прямого произведения для произвольных множеств *A, B, C, D*:

Некоммутативность:

$$A\times B\neq B\times A.$$

Ассоциативность с точностью до расстановок скобок:

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C=A\times B\times C.$$

Левая и правая дистрибутивность относительно операции объединения:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C);$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A).$$

Левая и правая дистрибутивность относительно операции пересечения:

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C);$$
$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A).$$

Левая и правая дистрибутивность относительно операции разности:

$$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C);$$
$$(B\setminus C)\times A=(B\times A)\setminus(C\times A).$$

Левая и правая дистрибутивность относительно операции симметрической разности:

$$A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C);$$
$$(B\Delta C)\times A=(B\times A)\Delta(C\times A).$$

Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D);$$
$$(A\times B)\cap(C\times D)\setminus(A\cap C)\times(B\cap D)=\varnothing.$$

Определение. Пусть A и B – множества. Бинарным отношением R из множества A во множество B называется подмножество прямого произведения A×B:

$$R\subset A\times B.$$

Для бинарного отношения R обычно используется запись

$$aRb$$

или

$$(a,b)\in R\subset A\times B,$$

и говорят, что элементы a и b находятся в отношении R.

Самыми известными отношениями на множестве чисел отношения $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$.

Например: 1. Отношение $R = \{\leq\}$ на множестве натуральных чисел N, $A \in N$, $B \in N$:

$(7, 9) \in R$, так как выполняется условие $7 \leq 9$;

$(7, 7) \in R$, так как выполняется условие $7 \leq 7$;

$(9, 7) \notin R$, так как не выполняется условие $9 \leq 7$.

2. Отношение R - «иметь общий делитель, не равный 1»

$(6, 9) \in R$, так как имеют общий делитель, равный 3;

$(2, 8) \in R$, так как имеют общий делитель, равный 2;

$(5, 15) \in R$, так как имеют общий делитель, равный 5;

$(3, 10) \notin R$, , так как не имеют общего делителя, не равного 1.

3. Отношения на множестве людей R – «жить в одном городе», «быть сыном», «быть выше».

1.5 Свойства отношений

Определение. Отношение R называется рефлексивным, если для любых $a \in A$ имеет место:

$$aRa$$

или

$$(a, a) \in R \text{ для всех } a.$$

Например: 1. Отношения «=», «≤», «≥».

2.Отношение «иметь общий делитель».

3. Отношение «быть одного роста».

Определение. Отношение R называется антирефлексивным, если ни для какого $a \in A$ не выполняется aRa (или если для всех a, $(a, a) \notin R$).

Например: 1. Отношения «<», «>», «≠» .

2. Отношения«быть сыном», «быть выше».

Определение. Отношение R называется симметричным, если для любых $a, b \in A$ имеет место:

$$\text{из } aRb \text{ следует } bRa,$$

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

Например: 1. Отношение «=».

2. Отношения«быть одного роста», «быть братом».

3. Отношение «быть параллельным».

Определение. Отношение R называется антисимметричным (или асимметричным), если из aRb и bRa следует, что a=b (или если $a \neq b$, то из $(a, b) \in R$ следует $(b, a) \notin R$).

Например: 1. Отношения«≤», «≥».

2. Отношение «$\subset$».

Определение. Отношение R называется транзитивным, если для любых $a, b, c \in A$ имеет место:

$$\text{из } aRb \text{ и } bRc \Rightarrow aRc.$$

Например: 1. Отношение «=».

2. Отношение«≤».

3. Отношение«быть родственником».
4. Отношение «быть одного роста».

Отношение «быть сыном» нетранзитивно.

Определение: Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно:

$$aRa,$$
$$aRb \Rightarrow bRa,$$
$$aRb,\ bRc \Rightarrow aRc.$$

Например: 1. Отношение «=».
2. Отношение «быть родственником».
3. Отношение «быть параллельным».

Пример 7. Дано множество A={1,2,3,4} и бинарное отношение $R \subset A \times A$:

$$R = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

Определить, является ли R рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Решение.

1. R не рефлексивно, так как нет пар (2,2); (3,3), но и не антирефлексивно, так как есть пара (1,1).

2. R не симметрично, так как для пары (1,2) нет (2,1) и для (1,3) нет (3,1). Не является антисимметричным, так как для (1,4) есть пара (4,1).

3. R является транзитивным, так как

$(1,1) \in R,\ (1,2) \in R$ и $(1,2) \in R$,
$(1,1) \in R,\ (1,3) \in R$ и $(1,3) \in R$,
$(1,1) \in R,\ (1,4) \in R$ и $(1,4) \in R$,
$(1,4) \in R,\ (4,1) \in R$ и $(1,1) \in R$,
$(1,4) \in R,\ (4,2) \in R$ и $(1,2) \in R$,
$(1,4) \in R,\ (4,3) \in R$ и $(1,3) \in R$,
$(1,4) \in R,\ (4,4) \in R$ и $(1,4) \in R$,
$(4,1) \in R,\ (1,2) \in R$ и $(4,2) \in R$,
$(4,1) \in R,\ (1,3) \in R$ и $(4,3) \in R$,
$(4,1) \in R,\ (1,4) \in R$ и $(4,4) \in R$,
$(4,4) \in R,\ (4,1) \in R$ и $(4,1) \in R$,
$(4,4) \in R,\ (4,2) \in R$ и $(4,2) \in R$,
$(4,4) \in R,\ (4,3) \in R$ и $(4,3) \in R$.

Пример 8. Дано множество M = {волк, коза, капуста}. Отношение R – множество пар (i , j), в которых i – может съесть j.

Определить, является ли R рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Решение. Составим отношение R:

R={(волк, коза), (коза, капуста)}.

1. R антирефлексивно, так как не содержит пар (волк, волк), (коза, коза), (капуста, капуста).

2. R антисимметрично, так как не содержит пар (коза, волк) и (капуста, коза).

3. R нетранзитивно, так как не содержит пары (волк, капуста).

1.6 Отображения

Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$, то говорят, что определено отображение множества X во множество Y. Обозначают y=f(x). Элемент y есть образ элемента x при данном отображении f, x - прообраз элемента y и обозначают $x= f^{-1}(y)$.

Частным случаем отображения множества X во множество Y является отображение множества X на множество Y.

Отображение f множества X в Y является отображение множества X на Y, если каждому элементу $y\in Y$ был поставлен в соответствие какой-либо элемент $x\in X$ при данном отображении f.

Определение. Такое соотношение называется <u>сюръективным</u>, то есть если каждый элемент множества Y имеет прообраз, то отношение f <u>сюръективно</u>.

Пример 9. Пусть X={a,b,c,d}, Y={2,4,6}. Зададим отображения f_1 и f_2 так:

f_1: a→2	f_2: a→2
b→4	b→2
c→4	c→6
d→6	d→6

то есть

$$f_1(a)=\{2\}\ ,\ f_1^{-1}(2)=\{a\},$$
$$f_2(a)=\{2\},\ \ f_2^{-1}(2)=\{a,b\},$$
$$f_1(b)=\{4\},\ \ f_1^{-1}(4)=\{b,c\},$$
$$f_2(b)=\{2\},\ \ f_2^{-1}(4)=\{\emptyset\},$$
$$f_1(c)=\{4\},\ \ f_1^{-1}(6)=\{d\},$$
$$f_2(c)=\{6\},\ \ f_2^{-1}(6)=\{c,d\},$$
$$f_1(d)=\{6\},\ \ f_2(d)=\{6\}.$$

Отображение f_1 X в Y является сюръективным, то есть отображением X на Y, так как каждый элемент множества Y имеет прообраз. Отображение f_2 несюръективно, элемент «4» не имеет прообраза.

Определение. Отображение X в Y называется <u>инъективным</u>, если для каждого элемента $y\in Y$ существует не более одного прообраза.

Приведенные выше отображения f_1 и f_2 не являются инъективными.

Пример 10. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$.Зададим отображение

f_3: $x_1 \to y_1$

$x_2 \to y_2$

$x_3 \to y_4$.

Отображение f_3 – инъективно.

Определение. Если отображение f сюръективно и инъективно, оно называется биективным (взаимно однозначное соответствие).

Очевидно, биективное отображение между конечными множествами X и Y возможно только в случае, когда число элементов этих множеств совпадает.

1.7 Задания для самостоятельной работы

1. Докажите следующие равенства:

а) $A\cap\bar{A}=\varnothing$;
б) $(A\backslash B)\backslash C=A\backslash(B\cup C)$;
в) $A\cup(B\backslash C)=(A\cup B)\backslash(C\backslash A)$;
г) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$;
д) $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$;
е) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

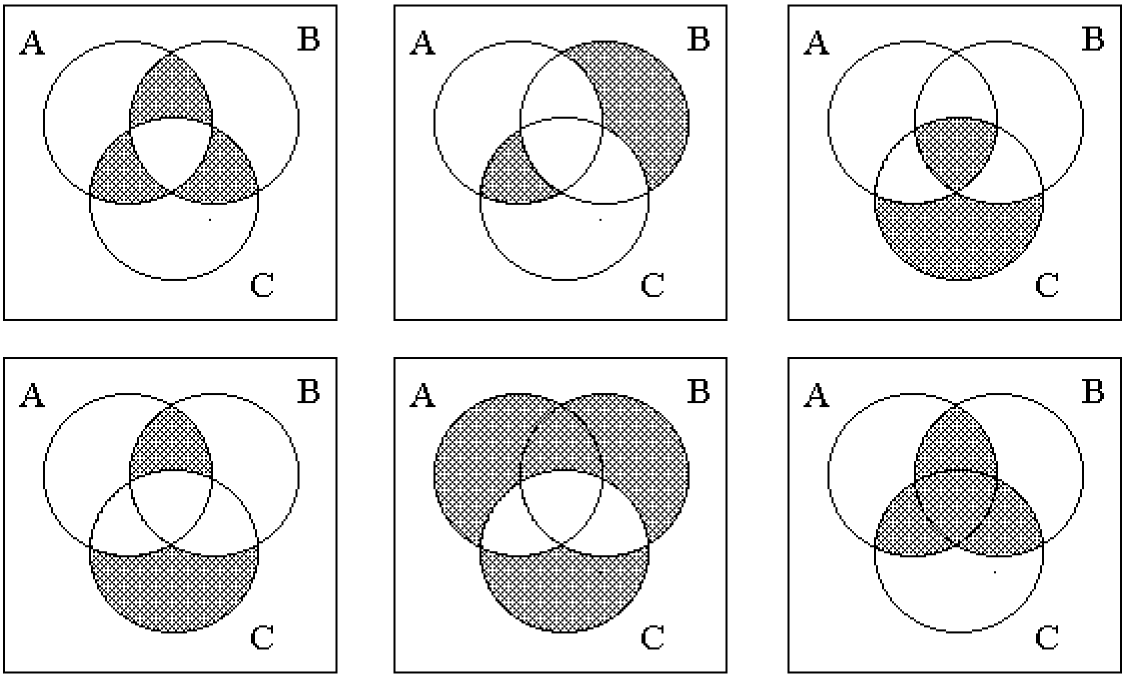
2. Изобразите на числовой прямой пересечение, объединение и разность следующих множеств:

а) $X_1=\{x|\ -5\le x<3\}$, $X_2=\{x|\ 1<x<7\}$;
б) $X_1=\{x|\ x<0\}$, $X_2=\{x|\ x^2\le 1\}$;
в) $X_1=\{x\ |\ -4<x\le 6\}$, $X_2=\{x\ |\ 0\le x<2\}$.

3. Найдите дополнение множества A до множества X.

а) $X=\{3,8,7,4,2,1\}$, $A=\{2,7\}$;
б) $X=\{10^n|\ n\in N\}$, $A=\{100^n|\ n\in N\}$;
в) $X=\{3x+1|\ x\in N\}$, $A=\{3x+4|\ x\in N\}$;
г) $X=\{x^2+x+1|\ x\in N\}$, $A=\{x^2+5x+7|\ x\in N\}$.

4. Запишите с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



5. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

6. Из 40 студенток 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько студенток умеют плавать и играть в шахматы? Сколько студенток умеет плавать, но не умеет играть в шахматы?

7. В классе обучаются 42 ученика. Из них 16 участвуют в секции по легкой атлетике, 24 – в футбольной секции, 15 – в шахматной секции, 11 – и в секции по легкой атлетике и в футбольной, 8 – и легкоатлетической и в шахматной, 12 – и футбольной и шахматной, а 6 – во всех трех секциях. Остальные школьники увлекаются только туризмом. Сколько школьников увлекаются туризмом? Сколько школьников участвуют только в одной секции?

8.Преподаватель решил узнать, кто из 40 студентов читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читало 25 человек, книгу В – 22, книгу С – также 22. Книгу А или В читали 33 студента, А или С – 32, В или С – 31; все три книги прочли 10 студентов. Сколько студентов прочли только по одной книге? Сколько студентов не читали ни одной из этих трех книг?

9. Даны множества: A={a, b, c}, B={x, y, z}. $R \subset A \times A$ - бинарное отношение.
R={(a, a); (a, c); (b, b); (c; a); (c, c);(b, c)}.
Установить, является ли отношение R рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, антитранзитивным?

10. M={человек, кошка, молоко}.

а) Составить бинарное отношение $R1 \subset M \times M$ таких пар, в которых первый может съесть второго. Установить, является ли отношение R1 рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, антитранзитивным?

б) Составить бинарное отношение $R2 \subset M \times M$ таких пар, в которых первый не может съесть второго. Установить, является ли отношение R рефлексивным, симметричным, транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным, антитранзитивным?

11.Указать, какие из нижеперечисленных отношений являются рефлексивными, симметричными, транзитивными:
- иметь разный вес;
- быть младше;
- быть дочерью;
- быть перпендикулярным.

2 ТЕОРИЯ ГРАФОВ

У немногих математических теорий достоверно известно начало их развития. Теория графов – один из таких редких разделов математики. Начало теории графов относят к 1736 г., когда, работая в Санкт-Петербурге, Леонард Эйлер решил задачу о Кенигсбергских мостах. Следующим этапом в развитии теории графов являются работы инженера-электрика Г. Кирхгофа, применившего графы в исследовании электрических цепей (1847г.). А в 1857 г. математик А. Кели, описывая строение углеводородов, решил соответствующие задачи для трех типов деревьев (здесь под деревом понимается граф определенной структуры). Сам термин “граф” появился только через 200 лет после начала теории. В 1936 г. Этот термин ввел в употребление выдающийся математик Д. Кениг.

Во второй половине 20 века теория графов превратилась в один из наиболее бурно развивающихся разделов математики. В терминах этой теории формулируются множество задач дискретной природы. Такие задачи возникают в экономике, химии, биологии, в теории расписаний, в проектировании схем управления, разработке интегральных схем и коммуникационных систем (дороги, телефонные и компьютерные сети) и во многих других областях.

2.1 Основные понятия теории графов

Определение. Пусть X –непустое множество, U – множество пар некоторых элементов множества X. Упорядоченная совокупность двух множеств (X, U) называется графом (неориентированным графом).

Определение. Элементы множества X называются вершинами графа $G = (X, U)$, а элементы множества U– ребрами.

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а линии − ребрам.

Пример 11. Граф $G = (X, U)$, где

$$X = \{1,2,3,4,5\}; U = \{\{1,2\}; \{2,3\}; \{3,4\}; \{1,4\}; \{2,4\}; \{3,5\}\}$$

изображен на рисунке5.

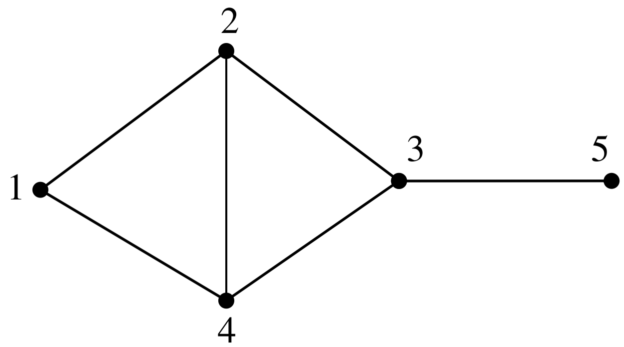


Рисунок 5. Неориентированный граф

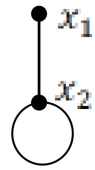


Рисунок 6. Граф с петлей

Определение. Говорят, что две вершины u и v графа G смежны, если множество $\{u, v\}$является ребром. Если е $= \{u, v\} -$ ребро, то вершины u и v называются его концами.

Определение. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Определение. Вершина v и ребро e называются инцидентными, если v является концом ребра e.

Например, для графа G на рисунке 5 вершины 1 и 2 смежны; ребра $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$ так же являются смежными. Вершина 2 и ребро $\{1,2\}$ инцидентны.

Определение. Ребро, инцидентное только одной вершине называется петлей.

Например, на рисунке 6 петлей является ребро $\{x_2, x_2\}$.

Определение. Цепью в графе G называется последовательность ребер $(e_1, e_2, ...)$,в которой у каждого ребра e_k один конец инцидентен ребруe_{k-1}, а другойконец инцидентен ребру e_{k+1}.

Определение. Циклом называется конечная цепь у которой начальная и конечная вершины совпадают.

Определение. Длиной цепи называется число ее ребер.

Направление обхода цепи задаётся порядком следования ее ребер.

Например, последовательность рёбер $(\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\})$ на рисунке 5 является цепью, соединяющей вершины 1 и 5 , а последовательность $\{1,2\}$,$\{2,4\}$,$\{4,1\}$является циклом.

Определение. Граф G называется связным, если любые две его различные вершины можно соединить цепью. В противном случае граф G называется несвязным.

Определение. Пусть дан граф $G = (X, U)$. Граф $G' = (X', U')$ называется подграфом графа G, если$X' \subseteq X, U' \subseteq U$, причем ребро $\{u, v\}$ содержится в U'тогда и только тогда, когда $u \in X'$и $v \in X'$.

Определение. Всякий несвязный граф состоит из отдельных связных подграфов, которые называются компонентами связности данного графа.

Определение. Связный граф, не содержащий циклов, называется деревом. Деревом некоторого графа G называется его связный подграф без циклов.

Определение. Дерево графа G, содержащее все его вершины называется остовом графа G или его покрывающим деревом.

Пример 12. На рисунке 7 изображено покрывающее дерево графа, изображенного на рисунке 5.

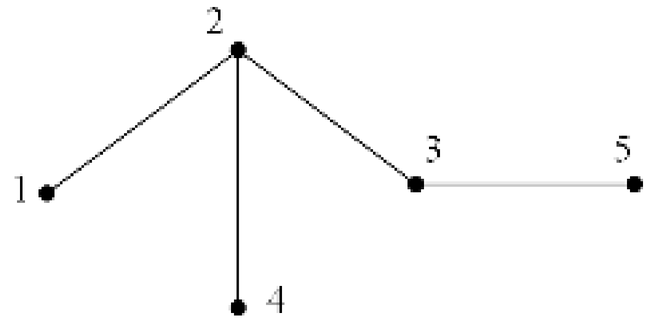


Рисунок 7. Покрывающее дерево

Определение. Если на каждом ребре графа G задано направление, то такой граф называется ориентированным или орграфом.

Определение. Направленное ребро $\{u, v\}$называют дугой и обозначают (u, v), где $u-$ начало дуги, а $v-$ ее конец.

Определение. Дуга в некоторой цепи называется прямой, если ее направление совпадает с направлением обхода цепи, в противном случае дуга называется обратной.

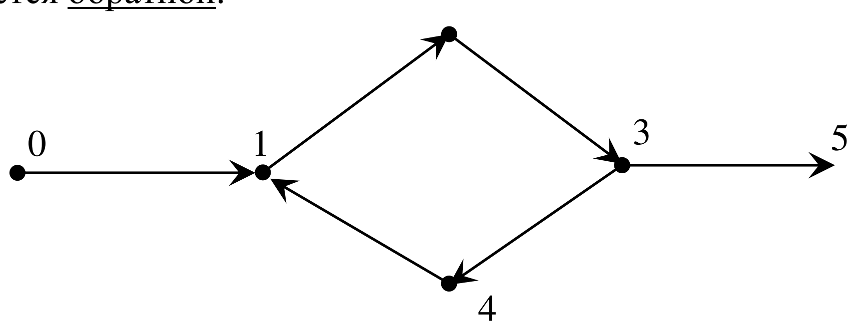


Рисунок 8. Ориентированный граф

Пример 13. Для цепи $(0,1)$, $(4,1)$, $(3,4)$, $(3,5)$на рисунке 8 дуги $(0,1)$, $(3,5)$ являются прямыми, а дуги $(4,1)$, $(3,4)$ – обратными.

Определение. Путем в графе называется конечная цепь, у которой все дуги прямые.

Определение. Контуром называют конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной.

Последовательность дуг $(0,1), (1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$ графа, изображенного на рисунке 8, образует путь из вершины 0 в вершину 5. Дуги $(1,2)$, $(2,3)$,$(3,4)$, $(4,1)$ образуют контур.

Определение. Сетью называется орграф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что называют графом?
2. Какое ребро называют дугой?
3. Как задается направление обхода цепи?
4. В чем отличие прямой и обратной дуг цепи?
5. Что называют путем в графе?
6. Какой граф называют связным?
7. Что такое покрывающее дерево?

2.2 Построение минимального покрывающего дерева

2.2.1 Понятие минимального покрывающего дерева

Пусть имеется связный неориентированный граф G, для которого каждому ребру $\{x, y\}$ поставлено в соответствие число $p(x, y)$, которое будем называть весом ребра.

Вес дерева определяется как сумма весов составляющих его ребер. Для графа Gнеобходимо построить покрывающее дерево минимального веса.

2.2.2 Алгоритм построения минимального покрывающего дерева

Просматривают ребра графа в порядке возрастания их весов. Если ребро включается в покрывающее дерево, то его окрашивают в зеленый цвет, в противном случае − в красный. Ребра, включенные в дерево, образуют граф, состоящий из нескольких компонент связности. Если концевые вершины просматриваемого ребра принадлежат одной и той же компоненте, то ребро образует цикл с ребрами, ранее включенными в дерево. Такое ребро не включают в дерево. В потивном случае ребро включают в дерево. Вершины одной связной компоненты составляют букет.

1. Берут ребро наименьшего веса, не являющееся петлей. Окрашивают его в зеленый цвет, а концевые вершины этого ребра включают в первый букет.
2. Выбирают неокрашенное ребро.
   - Если концевые вершины ребра принадлежат одному тому же букету, то ребро окрашивают в красный цвет.
   - Если ни одна из его концевых вершин не принадлежит ни одному избукетов, то эти вершины включают в новый букет и окрашивают ребро в зеленый цвет.
   - Если концевые вершины принадлежат разным букетам, то объединяют эти букеты в один и окрашиваят ребро в зеленый цвет.
   - Если один конец ребра принадлежит некоторому букету, а второй конец не входит ни в один букет, то нужно включить второй конец в тот же букет и окрасить ребро в зеленый цвет.
3. Заканчивают процедуру, если все вершины графа вошли в один букет. В противном случае переходят к п. 2.

Число шагов алгоритма конечно и не превосходит числа ребер графа. Если зеленые ребра не образуют покрывающего дерева, то у исходного графа его нет.

Пример 14. В новом районе города имеется шесть жилых массивов. Нужно соединить их между собой дорогами, стоимость прокладки которых была бы минимальна. В таблице 1 приведены расчетные стоимости постройки дорог между каждой парой жилых массивов.

Таблица 1. Стоимости постройки дорог между парами жилых массивов

	a	b	c	d	e	f
a	−	12	1	13	11	10
b	12	−	14	3	5	12
c	1	14	−	16	17	15
d	13	3	16	−	5	7
e	11	5	17	5	−	6
f	10	12	15	7	6	−

Решение. Решение задачи запишем в виде таблицы 2.

Таблица 2. Решение задачи

Ребро	Цвет ребра	Букет 1	Букет 2
$\{a, c\}$	зеленый	a, c	

$\{b,d\}$	зеленый		b,d
$\{d,e\}$	зеленый		b,d,e
$\{b,e\}$	красный		
$\{e,f\}$	зеленый		b,d,e,f
$\{d,f\}$	красный		
$\{a,f\}$	зеленый	a,b,c,d,e,f	

Отсюда получаем схему дорог с минимальной стоимостью прокладки, изображенную на рисунке 5.

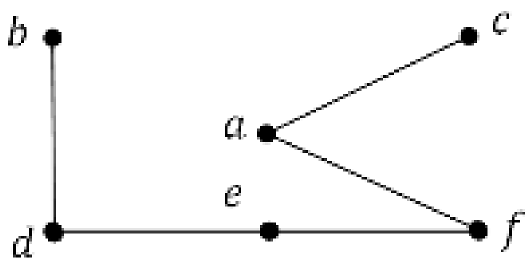


Рисунок 9. Схема прокладки дорог минимальной стоимости

2.3 Максимальный поток в сети

Определение. Потоком на орграфе называют некоторую функцию, заданную на его дугах.

Если вершины x и y соединены дугой $\alpha=(x,y)$, то поток из x в y обозначается $f(x,y)$.

Через U_x^+ обозначим множество дуг, выходящих из вершины x, ачерез U_x^-– множество дуг, входящих в вершину x.

Определение. Дивергенцией потока f в вершине x называется разность выходящих и входящих потоков:

$$div_f(x)=\sum_{(x,y)\in U_x^+} f(x,y)-\sum_{(z,x)\in U_x^-} f(z,x).$$

Определение. Вершины, в которых $div_f(x)>0$ называются источниками потока f, а вершины, в которых $div_f(x)<0$, – его стоками.

Сложив дивергенцию потока f во всех вершинах орграфа, получим

$$\sum_{x\in X} div_f(x)=0.$$

Пусть на дугах орграфа определена функция $c(x,y)$. В потоковых задачах $c(x,y)$ обычно означает пропускную способность дуги (x,y) или стоимость перевозки единицы потока по этой дуге.

Пусть задана сеть, в которой выделены две вершины s и t. Рассмотрим такие потоки $f(\alpha)$, что:

$$0\le f(\alpha)\le c(\alpha) \text{ на всех дугах } \alpha\in U; \qquad (1)$$

$$div_f(x) = 0 \forall x \in X \setminus \{s, t\}. \quad (2)$$

Определение. Вершины s и t называются полюсами сети, а остальные вершины− внутренними.

Равенство (2) означает, что количество потока, пришедшего во внутреннюю вершину, равно количеству потока, вышедшего из нее.

Из предыдущего следует, что $div_f(s) = -div_f(t) = M$. Если $M > 0$, то вершина s является источником потока, а вершина t− его стоком. Число $M > 0$ называется мощностью потока f.

2.3.1 Задача о максимальном потоке

Задача о максимальном потоке формулируется следующим образом: на орграфе G найти поток f наибольшей мощности, удовлетворяющий условиям (1)-(2).

Пусть заданы сеть G и какой-то поток f на этой сети. Дуга α, в которой $f(\alpha) < c(\alpha)$, называется увеличивающей, так как поток через эту дугу можно увеличить на величину $\Delta f(\alpha) = c(\alpha) - f(\alpha)$. Множество всех увеличивающих дуг обозначается A^+.

Дуга α, в которой $f(\alpha) > 0$, называется уменьшающей, так как поток через эту дугу можно уменьшить на величину $f(\alpha)$.Множество всех уменьшающих дуг обозначается A^-.

Заметим, что дуга может быть как уменьшающей, так и увеличивающей одновременно.

В доль некоторой цепи, соединяющей вершины s и t, можно увеличить поток, если все ее прямые дуги − увеличивающие, а все обратные дуги − уменьшающие. Максимальный дополнительный поток δ, который можно переслать вдоль такой цепи, равен минимуму из всех $\Delta f(\alpha)$для прямых дуг и всех $f(\alpha)$ для обратных дуг.

2.3.2 Алгоритм нахождения увеличивающей цепи

1. Отмечают вершину s (источник).
2. Далее отмечают некоторые вершины сети G. Именно: если вершина xотмечена, а вершина y− нет и дуга $\alpha = (x, y) \in A^+$, то отмечают вершину y. Если вершина x отмечена, а вершина y не отмечена и дуга $\alpha = (y, x) \in A^-$, то отмечают вершину y. Отмечая вершину y, нужно запомнить вершину x, отмеченную ранее, откуда в y привела дуга α.
3. Алгоритм заканчивается, если отмечена вершина t, тогда, двигаясь в обратном порядке по отмеченным вершинам, получим увеличивающую цепь; либо если дальнейшая метка вершин не возможна, а вершина t не отмечена.В этом случае увеличивающей цепи нет.

Пример 15. Найти увеличивающую цепь сети на рисунке 10:

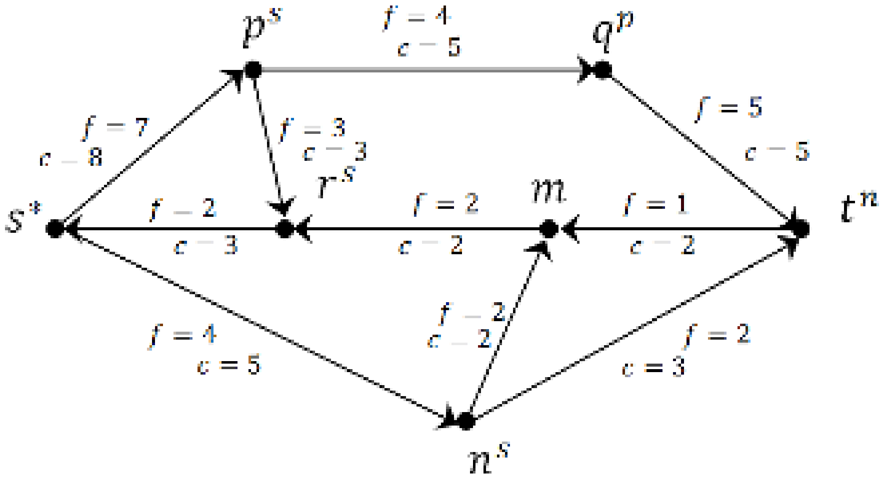


Рисунок 10. Нахождение увеличивающей цепи

Решение. Для любой отмеченной вершины будем просматривать все смежные с ней вершины.

1. Отмечаем вершину s.
2. Вершина p не отмечена и смежна отмеченной вершине s, дуга $(s, p) \in A^+$,следовательно отмечаем вершину p меткой s.
3. Вершина r не отмечена и смежна с s, дуга $(r, s) \in A^-$,следовательно отмечаем вершину r меткой s.
4. Вершина n не отмечена и смежна с s, дуга $(s, n) \in A^+$,следовательно отмечаем вершину n меткой s.
5. Вершина q не отмечена и смежна отмеченной вершине p, дуга $(p, q) \in A^+$, следовательно отмечаем вершину q меткой p.
6. Вершина q отмечена, а вершина tне отмечена, но дуга $(q, t) \notin A^+$, поэтому tотметить нельзя.
7. Вершина n отмечена и смежна с неотмеченной вершиной t, дуга $(n, t) \in A^+$, метим вершину t меткой n.

Рисунок 10. Нахождение увеличивающей цепи

Алгоритм заканчивается, так как отмечена вершина t. Двигаясь в обратном направлении по отмеченным вершинам, получаем увеличивающую цепь: $(s, n), (n, t)$.

2.3.3 Алгоритм нахождения максимального потока в сети (алгоритм Форда-Фалкерсона)

1. Выбираем некоторый начальный поток$f(\alpha)$извершиныsв вершину t. (Например, $f(\alpha) \equiv 0$).
2. Применяем алгоритм поиска увеличивающей цепи из s в t. Если такой цепи нет, то поток f − максимальный. Если же цепь c найдена, то перейти к п. 3.
3. Находим $M_1 = min\{\Delta f(\alpha)\}$ для всех прямых увеличивающих дуг цепи и $M_2 = min\{f(\alpha)\}$ для всех обратных уменьшающих дуг цепи. При

этом полагаем $min\{\emptyset\} = \infty$ (если соответствующих дуг нет, то они образуют пустое множество).

4. Находим $\delta = min\{M_1, M_2\}$.
5. Увеличиваем поток вдоль цепи c на величину δ и переходим к п.2.

Если начальные данные целочисленны, то выполнение алгоритма Форда-Фалкерсона заканчивается за конечное число шагов.

Пример 16. Найти максимальное количество информации, которое можно передать в единицу времени по сети, изображенной на рисунке 11:

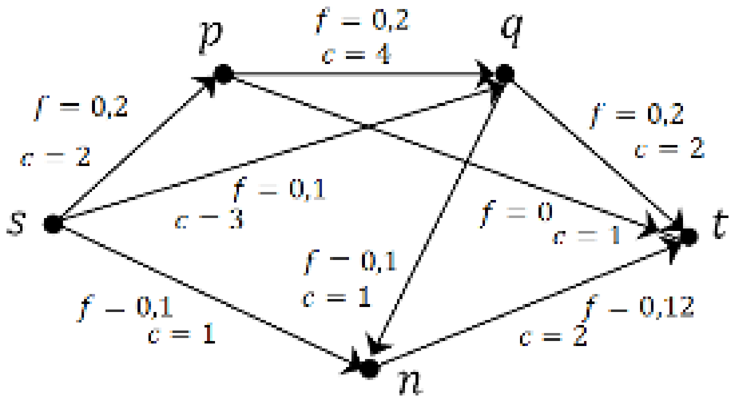


Рисунок 11. Нахождение максимального потока

Решение.

Задаем начальное значение потока $f(\alpha) \equiv 0$.

1. Находим увеличивающую цепь (s, p, q, t).
2. $M_1 = min\{2 - 0; 4 - 0; 2 - 0\} = 2, M_2 = min\{\emptyset\} = \infty$.
3. $\delta = min\{2, \infty\} = 2$.
4. $f(s, p) = 0 + 2 = 2; f(p, q) = 0 + 2 = 2, f(q, t) = 0 + 2 = 2$.
5. Находим увеличивающую цепь (s, q, n, t).
6. $M_1 = min\{3 - 0; 1 - 0; 2 - 0\} = 1, M_2 = min\{\emptyset\} = \infty$.
7. $\delta = min\{1, \infty\} = 1$.
8. $f(s, q) = 0 + 1 = 1;\ f(q, n) = 0 + 1 = 1; f(n, t) = 0 + 1 = 1$.
9. Находим увеличивающую цепь (s, n, t).
10. $M_1 = min\{1 - 0; 2 - 1\} = 1, M_2 = min\{\emptyset\} = \infty$.
11. $\delta = min\{1, \infty\} = 1$.
12. $f(s, n) = 0 + 1 = 1;\ f(n, t) = 1 + 1 = 2$.
13. Увеличивающей цепи нет, значит поток f – максимальный.

2.4 Транспортные сети

Пусть имеется n складов $x_1, x_2, \dots, x_n$, располагающих запасами продукта $s_1, s_2, \dots, s_n$, и m магазинов $y_1, y_2, \dots, y_m$ с потребностями в продукте $t_1, t_2, \dots, t_m$. Обозначим через c_{ij} полное количество продукта, которое можно перевезтииз x_i в y_j. Требуется обеспечить перевозки, удовлетворяющие как можно большее число магазинов.

Сведем эту задачу к задаче о максимльном потоке. Для этого введем две вспомогательные вершины s и t. Затем соединим x_i с y_j дугой, пропускной способности c_{ij}, затем источник s с x_i дугой весом s_i, и y_j со стоком t дугой весом t_j. Найти максимальный поток в полученной сети.

2.4.1 Задача о кратчайшем пути между двумя вершинами орграфа

Постановка задачи: Пусть каждой дуге (x, y) орграфа G поставлено в соответствие число $l(x, y) \geq 0$, которое называется длиной дуги. Длина пути определяется как сумма длин всех дуг, составляющих этот путь. Требуется найти путь наименьшей длины между двумя заданными вершинами s и t графа G.

2.4.2 Алгоритм поиска кратчайшего пути

Для любых двух несмежных вершин x и y будем полагать $l(x, y) = \infty$. В каждом цикле алгоритма будем отмечать некоторую вершину графа. Отмеченные вершины будем обозначать переменной y, а неотмеченные вершины – переменной x.

1. Полагаем $d(s) = 0$, $d(x) = \infty$ для любого $x \neq s$.Отмечаем вершину s символом “*” и полагаем $y = s$.
2. Для каждой неотмеченной вершины x пересчитываем величину $d(x)$ по формуле
$$d(x) = \min_y\{d(x), d(y) + l(y, x)\}.$$

- Если $d(x) = \infty$ для всех вершин x, то алгоритм заканчивают, поскольку в графе G отсутствуют дуги, ведущие из отмеченных вершин в неотмеченные, а значит нет пути из вершины s в вершину t.
- В противном случае отмечаем вершину x (меткой “*”), для которой величина $d(x)$ минимальна, и дугу (меткой “~”), ведущую в вершину x из отмеченной вершины. Затем полагаем $y = x$.

3. Если $y = t$, то кратчайший путь найден. Двигаясь в обратном порядке от вершины t по отмеченным дугам, получаем искомый путь. В противном случае переходим к п. 2.

Замечание. С помощью описанного алгоритма можно определить кратчайший путь из s во все вершины исходного графа. Для этого процедуру отмечивания нужно продолжить до тех пор, пока все вершины графа не будут отмечены. При этом для графа G будет построено покрывающее дерево с корнем в вершине s (если такое дерево существует). В вершину s не ведет ни одна дуга, и существует путь из s влюбую другую вершину графа (такая вершина называется корнем орграфа).

Пример 17. Найти кратчайший путь из вершины s в вершину t графа G, изображенного на рисунке 12. Длины дуг указаны на рисунке.

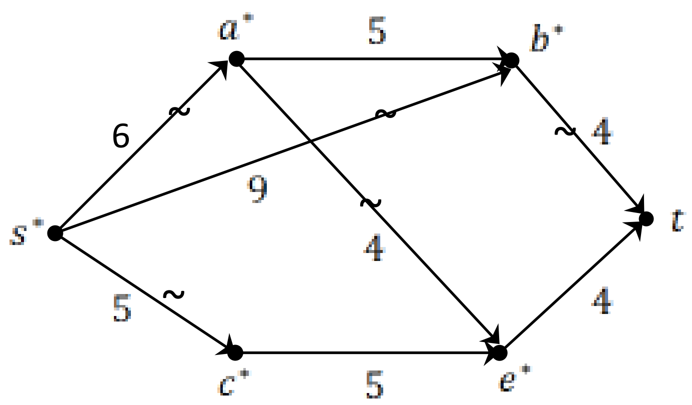


Рисунок 12. Нахождение кратчайшего пути

Решение.

1. $d(s) = 0, d(x) = \infty\ \forall x \neq s. y = s.$
2. $d(a) = \min\{d(a), d(s) + l(s,a)\} = \min\{\infty, 0 + 6\} = 6.$ Аналогично находим $d(b) = 9, d(c) = 5, d(e) = d(t) = \infty.$
3. $d(x)$ минимально в вершине c, отмечаем дугу (s,c) и вершину c, полагаем $y = c$.
4. $d(a) = 6, d(b) = 9, d(e) = \min\{d(e), d(c) + l(c,e)\} = \min\{\infty, 5 + 5\} =$ $= 10,\ d(t) = \infty.$
5. $d(x)$ минимально в вершине a, отмечаем дугу (s,a) и вершину a, полагаем $y = a$.
6. $d(b) = \min\{d(b), d(s) + l(s,b), d(a) + l(a,b)\} = \min\{\infty, 0 + 9{,}6 +$ $+5\} = 9.$ Аналогично $d(e) = 10, d(t) = \infty.$
7. $d(x)$ минимально в вершине b, отмечаем дугу (s,b) и вершину b, полагаем $y = b$.
8. $d(e) = 10, d(t) = 13.$
9. $d(x)$ минимально в вершине e, отмечаем дугу (a,e) и вершину e, полагаем $y = e$.
10. $d(t) = 13.$
11. Отмечаем дугу (b,t)и вершину t, полагаем $y = t$.
12. Кратчайшим является путь (s,b,t).

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что такое вес ребра и вес дерева?
2. Как определяется дивергенция потока в вершине?
3. В чем отличие между увеличивающей и уменьшающей дугами цепи?

2.5 Задания для самостоятельной работы

1. Найти минимальное покрывающее дерево графа, изображенного на
а) рисунке 13; б) рисунке 14.
Значения c полагать весами ребер.
2. Найти максимальный поток в сети, изображенной на

а) рисунке 13; б) рисунке 14.
3. Найти кратчайший путь между вершинами sи t графа на
а) рисунке 13; б) рисунке 14.
значения c полагать расстояниями.

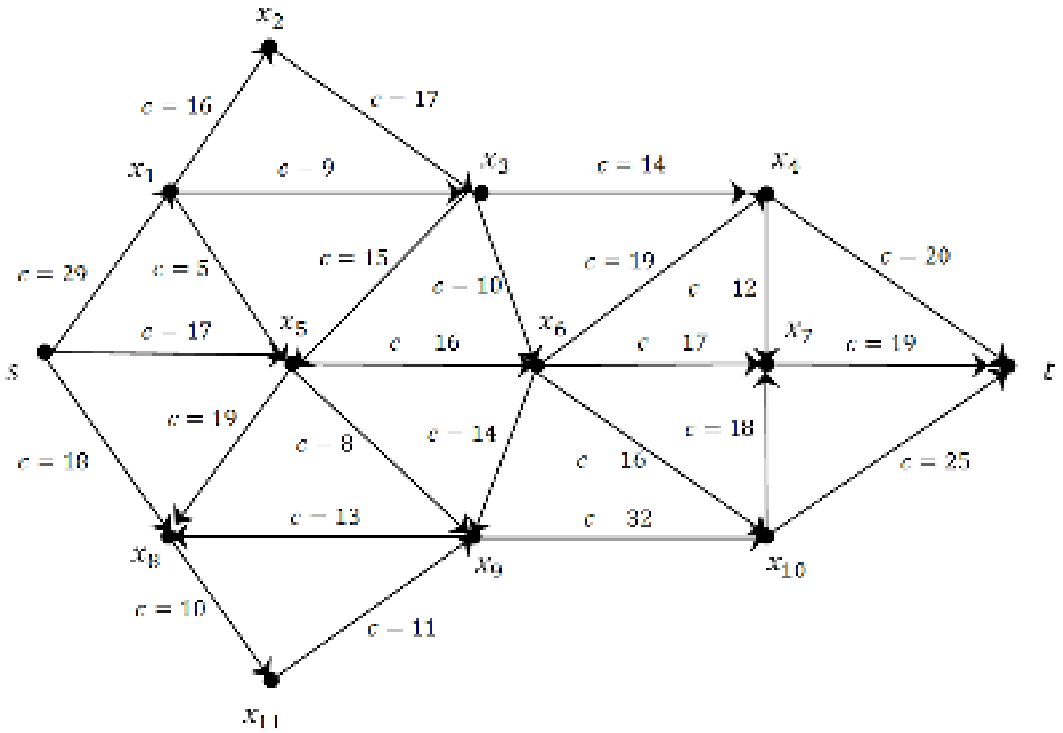


Рисунок 13

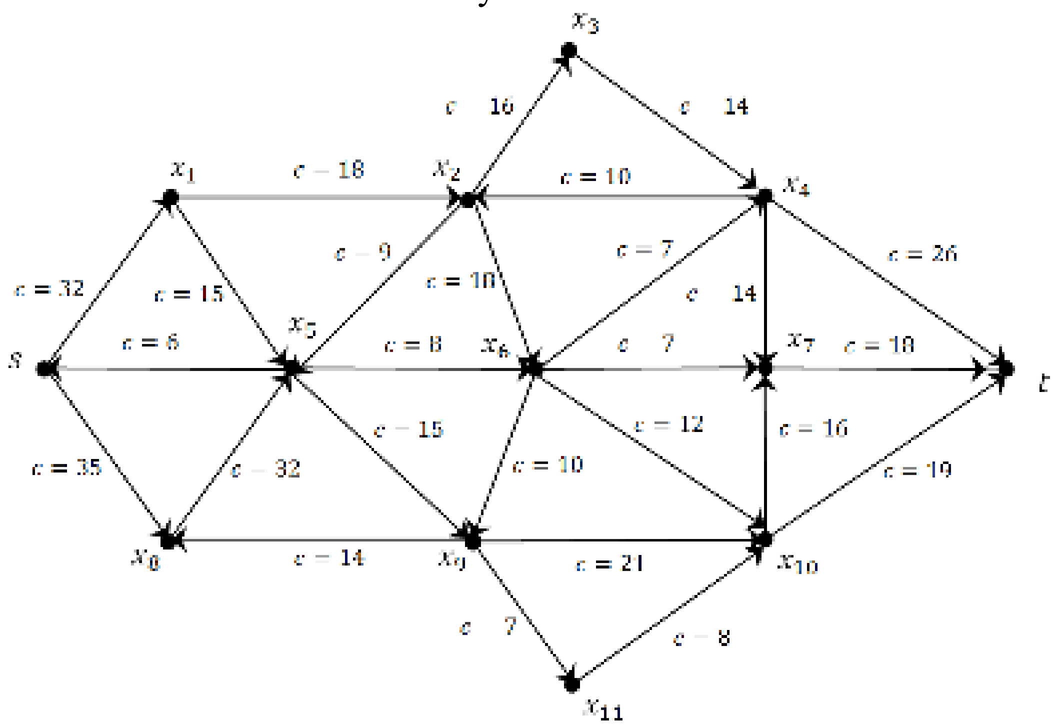


Рисунок 14

3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3.1 Основные понятия математической логики

Основным (неопределяемым) понятием математической логики является понятие *высказывания.*

Под высказыванием понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Замечание. Не являются высказываниями восклицательное, вопросительное предложения, а также просьбы.

Логическими значениями высказываний являются «*истина*» и «*ложь*». Все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от житейского содержания отвлекаются.

Замечание. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Приведем примеры *высказываний*:

1. Москва – столица России.
2. 5 – простое число.
3. Число 192 делится на 3.
4. Число 7 меньше числа 2.
5. Диагонали ромба перпендикулярны.
6. Река Дон находится в Австралии.
7. Карась – не рыба.

Высказывания 1, 2, 3, 5 *истинны*, а высказывания 4, 6, 7 *ложны*.

Приведем примеры предложений, которые *не являются* высказываниями:

1. «Да здравствует лето!»
2. Который час?
3. Подайте, пожалуйста, соль.

Высказывания будем обозначать малыми латинскими буквами: a, b, c, x, y, z и др.

Логическое значение «**истина**» обозначается «**1**», а «**ложь**» –«**0**», то есть, если высказывание a истинно, то будем писать $a = 1$, если ложно, то $a = 0$.

3.2 Логические операции над высказываниями

В обычной речи и в математике мы часто используем *логические связки* «не», «и», «или», «следует», «если…, то», «тогда и только тогда», «эквивалентно».

По отношению к высказываниям они выступают как *логические операции*, с помощью которых на одних высказываниях образуются другие.

Определение. Высказывание, представляющее собой одно утверждение, называют простым или элементарным.

Определение. Высказывания, полученные из элементарных с помощью логических связок «не», «и», «или», «следует», «если…, то», «тогда и только тогда», «эквивалентно», называют сложными или составными.

Истинность или ложность высказываний, полученных в результате *логических операций* над другими высказываниями, зависит от истинности или ложности исходных высказываний и от характера производимых логических операций. Над высказываниями определены следующие логические операции: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.*

1. Отрицание. Первой из простейших логических операций является *отрицание*, выражаемое словесно частицей *«не»*.

Определение. Отрицанием некоторого высказывания a называется высказывание $\overline{a}$ (читается «не a»), которое является истинным, если высказывание a ложно, и ложным, высказывание a истинно.

По аналогии с арифметической таблицей умножения, в алгебре высказывание существуют *таблицы истинности* логических операций, упрощающие понимание и удобные для доказательств.

Определение отрицания может быть выражено *таблицей истинности*:

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Например: 1. Высказывание a – «число 6 делится на два»– истинно, а высказывание $\overline{a}$ – «число 6 не делится на 2» – ложно.

2. Если высказывание a – «на улице идет дождь» – ложно, то высказывание $\overline{a}$ – «на улице не идет дождь» – истинно.

Познакомимся с простейшими *законами логики высказываний*.

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{a}} = a \cdot$$

Например: Пусть дано высказывание a – «я вчера ходил в кино», тогда отрицание этого высказывания $\overline{a}$ –«я вчера не ходил в кино», а отрицание отрицания (двойное отрицание) –$\overline{\overline{a}}$ –«я вчера не мог не пойти в кино», что и означает: «я вчера ходил в кино».

2. Конъюнкция (логическое умножение). Другой логической операцией является *конъюнкция*, выражаемая словесным союзом «*и*» и обозначаемая символом $\wedge$.

Например: Возьмем высказывание «противоположные стороны любого прямоугольника равны *и* параллельны».

Разобьём его на 2 более простых высказывания:

a – «противоположные стороны прямоугольника равны»,

b–«противоположные стороны прямоугольника параллельны»,

тогда исходное высказывание и будет конъюнкцией $a \wedge b$.

Определение. Конъюнкцией двух высказываний a,b называется новое высказывание $a \wedge в$ (читается «a и b»), которое является истинным, если оба высказывания a,b истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Определение конъюнкции может быть выражено таблицей истинности:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Законы конъюнкции:

Исходя из определения конъюнкции, имеем следующие законы:

1. $a \wedge \bar{a} = 0$, то есть ложно (закон противоречия);
2. $a \wedge a = a$;
3. $a \wedge b = b \wedge a$.

Например: a – «число 15 делится на 3»– истинно;

b – «число15 делится на 5»– истинно;

$a \wedge b$ – «число 15 делится на 3 и на 5»– истинно;

$b \wedge a$ – «число 15 делится на 5 и на 3»– истинно.

3. Дизъюнкция (логическое сложение). Следующей логической операцией является *дизъюнкция*, выражаемая словесным союзом «*или*» и обозначаемая символом $\vee$.

В обычной речи союз «или» используется в двух различных смыслах: разделительном и соединительном.

Например: 1. Я работаю *или* отдыхаю – обе возможности исключают друг друга.

1. Если я заболею *или* пойдёт дождь, то встреча не состоится – обе возможности объединяются в качестве некоторой причины.

В первом случае говорят о *двоичном* «*или*»: или я работаю, или отдыхаю. Во втором – о простом *или*: решение будет принято, если осуществится любая из возможностей, либо обе вместе.

Простое «или» используется для обозначения логической операции «дизъюнкция».

Определение. Дизъюнкцией двух высказываний a, b называется новое высказывание $a \vee b$ (читается «a или b»), которое является истинным, если хотя бы одно из высказываний a, b истинно, и ложно, если они оба ложны.

Определение дизъюнкции может быть выражено следующей таблицей истинности:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1

0	1	1
0	0	0

Например: a – «число 15 делится на 3»– истинно;
b– «число 15 делится на 2»– ложно;
$a \vee b$ – «число 15 делится на 3 или на 2»– истинно.

Законы дизъюнкции:

Исходя из определения дизъюнкции, имеем следующие законы:

1. $a \vee \overline{a} = 1$,то есть истинно (закон исключенного третьего);
2. $a \vee a = a$,
3. $a \vee b = b \vee a$.

4. Импликация. Еще одной логической операцией является *импликация*, выражаемая, обозначаемая символом «→».

В различных предложениях (в том числе математических) мы используем союз-связку «если…, то…» (особенно часто используется в формулировках теорем). В этом случае выражение, стоящее после слова «если» до слова «то», называют *условием* (посылкой), а выражение, следующее за словом «то», называют *заключением* (следствием).

Существует немало синонимов для союза «если…, то…», например:
– из a следует b,
– a влечёт за собой b,
–как только a, то b.

Например: 1. Если на улице идет дождь, то асфальт мокрый, здесь
a– на улице идёт дождь,
b – асфальт мокрый.
2. Если ΔABC равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C$.
3. Если $x = 5$, то $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Опеределение. <u>Импликацией</u> двух высказываний a, b называется новое высказывание $a \rightarrow b$ (читается «если a, то b»), которое является ложным, если a истинно, а b–ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Определение импликации выражается в следующей таблице истинности:

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Например: a – «число 12 делится на 6» – истинно;
b – «число12 делится на 3» – истинно;

$a \to b$ – «если число 12 делится на 6, то оно делится на 3» – истинно.

5. Эквиваленция (двойная импликация). Еще одна логическая операция *эквиваленция* (или *эквивалентность*) при помощи связок: «те и только те», «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно» и обозначается символом «↔».

Например: 1. Для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

То есть, если параллелограмм – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. И наоборот: если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то такой параллелограмм является ромбом.

2. Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

То есть, если два вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны. И наоборот: если соответствующие координаты векторов пропорциональны, то такие векторы коллинеарны.

Определение. Эквиваленцией (или эквивалентностью) двух высказываний a, b называется новое высказывание а ↔ в, которое является истинным, если оба высказывания a, b либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Читается: «a тогда и только тогда, когда b».

Определение эквиваленции выражается в следующей таблице истинности:

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Законы эквиваленции:

Если сравнить определение эквиваленции и импликации, очевиден следующий логический закон их связи:

$$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a).$$

3.3 Формулы алгебры логики

Определение. Всякое сложное высказывание, полученное из элементарных посредством применения выше определенных логических операций, называется формулой алгебры логики (или формулой логики) высказываний.

Порядок выполнения операций в формуле указывается скобками.

Формулы алгебры логики будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C и др.

Например: $A = (\bar{x} \wedge y) \vee x$.

3.3.1 Равносильные формулы алгебры логики

Определение. Две формулы алгебры логики A и B называются равносильными, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний.

Равносильность формул будем обозначать знаком ≡, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Определение. Формула A логики высказываний называется тождественно истинной (или тавтологией), если она обращается в истинное высказывания при всех наборах значений входящих в нее переменных (записывается $A \equiv 1$).

Определение. Формула B называется тождественно ложной (или противоречием), если она обращается в ложное высказывание при всех наборах значений входящих в нее переменных (записывается $B \equiv 0$).

Определение. Если формула не является ни тождественно истинной, ни тождественно ложной, она называется выполнимой.

Пример 18. С помощью таблиц истинности выяснить, является ли формула $A=x\to(y\to x)$ тавтологией, противоречием или выполнимой формулой.

Решение. Составим таблицу истинности

x	y	$y\to x$	$A=x\to(y\to x)$
1	1	1	**1**
1	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	0	1	**1**

Таким образом, при любых значениях x и y $A\equiv 1$, то есть формула является тавтологией.

Ниже приведем **важнейшие равносильности** алгебры логики:

1. $\bar{\bar{a}} \equiv a$ – закон двойного отрицания;

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ a \wedge a \equiv a \\ 3.\ a \vee a \equiv a \end{array}\right\} \text{– законы идемпотентности;}$$

4. $a \wedge 1 \equiv a$;
5. $a \vee 1 \equiv 1$;

6. $a \wedge 0 \equiv 0$;
7. $a \vee 0 \equiv a$;
8. $a \wedge \overline{a} \equiv 0$ – закон противоречия;
9. $a \vee \overline{a} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;

$$\left.\begin{array}{ll} 10. & a \wedge b \equiv b \wedge a \\ 11. & a \vee b \equiv b \vee a \end{array}\right\} \text{–коммутативность;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 12. & (a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c) \\ 13. & (a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c) \end{array}\right\} \text{–ассоциативность;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 14. & (a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ 15. & (a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \end{array}\right\} \text{– дистрибутивность;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 16. & a \wedge (a \vee b) \equiv a \\ 17. & a \vee (a \wedge b) \equiv a \end{array}\right\} \text{– законы поглощения;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 18. & \overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \\ 19. & \overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b} \end{array}\right\} \text{– законы де Моргана;}$$

20. $a \to b \equiv \overline{a} \vee b$;
21. $a \leftrightarrow b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$.

Пример 19. С помощью таблиц истинности доказать равносильность:

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b.$$

Решение. Составим таблицу истинности для формул $A = a \to b$ и $B = \overline{a} \vee b$

a	b	$\overline{a}$	$A = a \to b$	$B = \overline{a} \vee b$
1	1	0	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**0**
0	1	1	**1**	**1**
0	0	1	**1**	**1**

При всех значениях a и b значения формул $A = a \to b$ и $B = \overline{a} \vee b$ совпадают. Следовательно, формулы $A = a \to b$ и $B = \overline{a} \vee b$ равносильны и $a \to b \equiv \overline{a} \vee b$.

Определение. Используя равносильности (1-21) всякую формулу алгебры логики или ее часть можно заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются равносильными.

Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Пример 20. С помощью равносильных преобразований выяснить, является ли формула $A = x \to (y \to x)$ тавтологией, противоречием или выполнимой формулой.

Решение. В примере 18 мы решили аналогичную задачу с помощью таблиц истинности.

В этом примере проверим, является ли формула $A = x \to (y \to x)$ тавтологией, противоречием или выполнимой формулой с помощью равносильных преобразований.

Применим дважды формулу (20), получим

$$A = x \to (y \to x) \equiv x \to (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x).$$

Продолжим цепочку преобразований, применив формулы (13) и (11)

$$A = x \to (y \to x) \equiv x \to (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv (\bar{x} \vee x) \vee \bar{y}.$$

Применяя теперь формулы (9) и (5), получим

$$A = x \to (y \to x) \equiv x \to (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv (\bar{x} \vee x) \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \bar{y} \equiv 1.$$

Таким образом, при любых значениях x и y $A \equiv 1$, то есть формула является тавтологией.

Пример 21. Доказать равносильность $x \leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$ двумя способами:

а) с помощью таблиц истинности,

б) с помощью равносильных преобразований формул.

Решение. а) Составим таблицу истинности для формул $x \leftrightarrow y$ и $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A = x \leftrightarrow y$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \wedge y$	$B = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$
1	1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	0	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**1**	1	0	**1**

При всех значениях x и yзначения формул $A = x \leftrightarrow y$ и $B = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$ совпадают. Следовательно, формулы равносильны и $x \leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$.

б) Докажем теперь равносильность $x \leftrightarrow y \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$ с помощью равносильных преобразований формул.

Применим формулу (21) для эквиваленции и формулу (20) для импликации

$$A = x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x).$$

К полученной формуле применим теперь формулу (15) и продолжим цепочку преобразований:

$$A = x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge x) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge x).$$

По формуле (8)

$$(\bar{x} \wedge x) \equiv 0$$

$$(y \wedge \bar{y}) \equiv 0,$$

тогда

$$A = x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee 0 \vee 0 \vee (y \wedge x).$$

И, наконец, используя формулы (7) и (10), получаем:

$$A = x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee 0 \vee 0 \vee (y \wedge x) \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y).$$

3.4 Решение логических задач методами алгебры логики

Суть применения методов алгебры логики к решению логических задач состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, записывают их в виде формулы алгебры логики. Затем путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу. Простейший вид формулы приводит к ответу на вопрос задачи.

Покажем на примерах, как использовать возможности алгебры логики для решения логических задач.

Пример 22. На вопрос, кто из трех студентов сдал зачет по математике, был получен правильный ответ: «если сдал первый, то сдал и второй», но неверно, что «если сдал третий, то сдал и второй». Кто из студентов сдал зачет по математике?

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 высказывания, состоящие соответственно в том, что первый, второй, третий студенты сдали зачет, то есть:

x_1 – «первый студент сдал зачет»,
x_2– «второй студент сдал зачет»,
x_3– «третий студент сдал зачет».

Тогда

$\bar{x}_1$ – «первый студент не сдал зачет»,
$\bar{x}_2$ – «второй студент не сдал зачет»,
$\bar{x}_3$ – «третий студент не сдал зачет».

Из условия задачи следует истинность формулы:

$$A = (x_1 \to x_2) \wedge \overline{(x_3 \to x_2)} \equiv 1.$$

Упростим полученную формулу с помощью равносильных преобразований. Вначале дважды применим формулу (2) для импликаций:

$$(x_1 \to x_2) \wedge \overline{(x_3 \to x_2)} \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge \overline{(\bar{x}_3 \wedge x_2)}.$$

Ко второй части полученной формулы применим закон де Моргана (формула (18)) и закон двойного отрицания (формула (1)):

$$(x_1 \to x_2) \wedge (\overline{x_3 \to x_2}) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\overline{\bar{x}_3 \vee x_2}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{\bar{x}}_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \wedge \bar{x}_2).$$

Применим формулу (15) и получим:

$$(x_1 \to x_2) \wedge (\overline{x_3 \to x_2}) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\overline{\bar{x}_3 \vee x_2}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{\bar{x}}_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2).$$

Вторая скобка преобразованной формулы содержит конъюнкцию высказывания x_2 и его отрицания $\bar{x}_2$, которая по формуле(8) равна 0:

$$x_2 \wedge \bar{x}_2 \equiv 0.$$

Тогда получаем:

$$(x_1 \to x_2) \wedge (\overline{x_3 \to x_2}) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\overline{\bar{x}_3 \vee x_2}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{\bar{x}}_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge 0).$$

Применяя формулы (6) и (7), получаем окончательный ответ:

$$(x_1 \to x_2) \wedge (\overline{x_3 \to x_2}) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\overline{\bar{x}_3 \vee x_2}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{\bar{x}}_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \equiv (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge 0) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2) \vee 0 \equiv \bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2.$$

Таким образом

$$A = \bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \equiv 1.$$

В соответствии с введенными нами обозначениями, данный ответ означает, что истинно утверждение: «первый студент не сдал зачет», «третий студент сдал зачет», «второй студент не сдал зачет».

Таким образом, из трех студентов зачет сдал только *третий* студент.

Пример 23. В школе четырем старшеклассникам – Андрееву, Савельеву, Костину, Давыдову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й, 10-й классы.

Проверка показала, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили:

1) Андреев – «я убирал 9-й класс, Савельев – 7-й».
2) Костин – «я убирал 9-й класс, Андреев – 8-й».
3) Савельев – «я убирал 8-й класс, Костин – 10-й».

Давыдов к тому времени ушёл домой. В дальнейшем было установлено, что каждый ученик в одном случае говорил правду, а в другом – ложь. Выяснить, какой класс убрал каждый из учеников?

Решение. В этом примере удобно обозначить рассматриваемые высказывания через первую букву фамилий учеников и номер класса, который он убирал, то есть:

a_9 – «Андреев убирал 9-ый класс»,
c_7– «Савельев убирал 7-ой класс»,
k_9– «Костин убирал 9-ый класс»,
a_8 – «Андреев убирал 8-ой класс»,
c_8 – «Савельев убирал 8-ой класс»,
k_{10} – «Костин убирал 10-ый класс».

Поскольку каждый ученик в в одном случае говорил правду, а в другом ложь, то в каждой паре высказываний одно истинно, а другое ложно. Поэтому будут истинны дизъюнкции:

$$a_9 \vee c_7 \equiv 1,$$
$$k_9 \vee a_8 \equiv 1,$$
$$c_8 \vee k_{10} \equiv 1.$$

Тогда условие задачи можно записать в виде истинной формулы:

$$A = (a_9 \vee c_7) \wedge (k_9 \vee a_8) \wedge (c_8 \vee k_{10}) \equiv 1.$$

Применим формулу (15) вначале к первым двум скобкам, получим:

$$A = ((a_9 \wedge k_9) \vee (a_9 \wedge a_8) \vee (c_7 \wedge k_9) \vee (c_7 \wedge a_8)) \wedge (c_8 \vee k_{10}).$$

По условию задачи каждый ученик убирал один класс. В первой же скобке получилось высказывание: «9-ый класс убирали и Андреев и Костин», а во второй скобке «Андреев убирал и 8-ой и 9-ый классы». Поэтому первая и вторая скобка ложны, то есть равны 0.

По формуле (7) $a \vee 0 \equiv a$, то есть скобки, равные нулю, отбрасываем:

$$A = ((c_7 \wedge k_9) \vee (c_7 \wedge a_8)) \wedge (c_8 \vee k_{10}).$$

Применим формулу (15) еще раз

$$A = ((c_7 \wedge k_9) \vee (c_7 \wedge a_8)) \wedge (c_8 \vee k_{10}) \equiv$$

$$\equiv (c_7 \wedge k_9 \wedge c_8) \vee (c_7 \wedge k_9 \wedge k_{10}) \vee (c_7 \wedge a_8 \wedge c_8) \vee (c_7 \wedge a_8 \wedge k_{10}).$$

Высказывания в первой и третьей скобках ложны, так как Савельев не мог убирать одновременно и 7-ой и 8-ой классы. Высказывание во второй скобке ложно, так как Костин не мог убирать одновременно и 9-ый и 10-ый классы. Следовательно, остается истинным только высказывание в четвертой скобке:

$$A = 0 \vee 0 \vee 0 \vee (c_7 \wedge a_8 \wedge k_{10}) \equiv 1,$$
$$A = (c_7 \wedge a_8 \wedge k_{10}) \equiv 1.$$

Таким образом, истинным является утверждение: «Савельев убирал 7-ой класс, Андреев – 8-ой класс, Костин – 10-ый класс», методом исключения определяем, что Давыдов убирал 9-ый класс.

3.5 Задания для самостоятельной работы

1. Пусть даны высказывания:

a – «студент Иванов подготовился к экзамену по математике»;

b – «студент Иванов сдал экзамен по математике».

Сформулировать следующие высказывания: $\bar{a}$, $a \wedge b$, $\bar{a} \vee \bar{b}$, $a \wedge \bar{b}$, $a \rightarrow b$, $b \leftrightarrow a$.

2. С помощью таблиц истинности доказать равносильности:

а) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

б) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

в) $x \vee (x \wedge y) \equiv x$,

г) $x \wedge (x \vee y) \equiv x$,

3. Доказать двумя способами (с помощью таблиц истинности и помощью равносильных преобразований) следующие равносильности:

а) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv (x \wedge y) \rightarrow z$,

б) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \equiv x \rightarrow y$,

в) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$,

г) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((\bar{x} \wedge y) \vee \bar{y}) \equiv \overline{x \wedge y}$.

4. Доказать двумя способами (с помощью таблиц истинности и помощью равносильных преобразований) тождественную истинность или тождественную ложность формул:

а) $x \rightarrow (x \vee y)$,

б) $(x \vee \bar{x}) \rightarrow (y \wedge \bar{y})$,

в) $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$,

г) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow z)$.

5.Определите, кто из 4 студентов изучал логику, если истины следующие высказывания:

–если изучал первый, то изучал и второй,

–если изучал второй, то изучал третий или не изучал первый,

– если не изучал четвертый, то изучал первый и не изучал третий,

– если изучал четвертый, то изучал и первый.

6. Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали следующие ответы:

– Роман занял первое место, а Сергей второе,

– Юрий занял второе место, а Виктор четвертое,

– Виктор занял третье место, а Роман второе.

Как на самом деле распределились места, если в каждом из ответов только одно утверждение истинно?

7. При составлении расписания уроков на один день учителя истории, математики и литературы высказали следующие пожелания:

– математик: «первый или второй урок»,

– историк: «первый или третий урок»,

– литератор: «второй или третий урок».

Можно ли составить расписание так, чтобы удовлетворить пожелания учителей?

4 КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой *комбинаторной конфигурацией* (или проще, *комбинацией*).

Простейшими примерами комбинаторных конфигураций (комбинаций) являются перестановки, размещения и сочетания.

4.1 Комбинации без повторений

4.1.1 Перестановки

Определение. Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок вычисляется по формуле:

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Величина $n!$ называется *факториалом* числа n.

Причем

$$0! = 1;$$

тогда

$$1! = 1;$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 6;$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24;$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 120;$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 720$$

и т.д.

Пример 24. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в число только один раз.

Решение. Количество трехзначных чисел, составленных из трех различных цифр – это число перестановок из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 25. Сколькими способами можно расставить 7 разных автомобилей на 7 свободных парковочных местах.

Решение. *Число автомобилей равно числу парковочных мест*, поэтому количество возможных способов расстановки − это число перестановок из семи элементов:

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

4.1.2 Размещения

Определение. Размещениями называют комбинации из k элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений вычисляется по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 26. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в число только один раз.

Решение. Здесь n=3, k= 2. Из двух любых цифр можно составить 2 разных числа, например, из цифр 1 и 2 можно составит числа 12 и 21. То есть *важен порядок элементов*, а не только их состав. Поэтому количество двузначных чисел, которые можно составить из трех цифр − это число размещений из 3 элементов по 2 элемента:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} = 6.$$

Пример 27. Студенты второго курса экономического факультета изучают во втором семестре 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на один день недели, если в этот день должно быть 4 различных пары?

Решение. Расписание занятий может отличаться составом предметов и их порядком. Поэтому количество возможных способов составления расписания – это число размещений из 9 элементов по 4 элемента, то есть

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024.$$

4.1.3 Сочетания

Определение. Сочетаниями называют неупорядоченные наборы из k элементов множества, содержащего n различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов).

Число всех возможных сочетаний вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Пример 28. Для дежурства по классу необходимо выбрать 2 человека. Сколькими способами можно это сделать, если в классе 20 человек?

Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь пары будут отличаться только составом, порядок расположения не имеет значения (Иванов и Петров или Петров и Иванов – одна и та же пара). Следовательно, количество способов отбора – это число сочетаний из 20 элементов по 2 элемента:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{18!\cdot 19\cdot 20}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 190.$$

Пример 29. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

Решение. В этом примере, как и в предыдущем, важен только состав. Следовательно, количество возможных комиссий – это число сочетаний из 14 элементов по 7 элементов:

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7!\cdot(14-7)!} = \frac{14!}{7!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 3432.$$

При решении задач комбинаторики используют следующие **правила**:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $n+m$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $n\cdot m$ способами.

Пример 30. В группе 16 студентов, из которых 10девушек, остальные – юноши. Сколькими способами можно отобрать из группы 3 девушки и 2 юноши?

Решение. Количество способов, которыми можно отобрать девушек равно числу сочетание из 10 элементов по 3 элемента:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Количество способов, которыми можно отобрать юношей равно числу сочетание из оставшихся 6 элементов (юношей 16–10=6) по 2 элемента:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 1\cdot 2} = 15.$$

По правилу произведения общее число способов отбора равно:

$$C_{10}^3 \cdot C_6^2 = 120\cdot 15 = 1800.$$

Пример 31. На первой из двух параллельных прямых отмечено 10 точек, на второй – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Треугольники могут быть двух видов. У треугольников первого вида одна вершина на первой прямой, две вершины – на второй прямой.

Вершину на первой прямой можно выбрать 10 способами, две вершины на второй прямой можно выбрать C_{20}^2 способами.

Всего, следовательно, существует $10\cdot C_{20}^2$ треугольников первого вида.

У треугольников второго вида одна вершина находится на второй прямой, а две другие вершины – на первой. Число таких треугольников подсчитывается аналогично. Оно равно $20\cdot C_{10}^2$. Таким образом, искомое число всех треугольников равно

$$10\cdot C_{20}^2 + 20\cdot C_{10}^2 = 10\cdot\frac{20!}{2!\cdot 18!} + 20\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!} =$$

$$= 10\cdot\frac{18!\cdot 19\cdot 20}{18!\cdot 1\cdot 2} + 20\cdot\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!\cdot 1\cdot 2} =$$

$$= 10\cdot 190 + 20\cdot 45 = 2800.$$

4.2 Комбинации с повторениями

В вышеприведенных формулах предполагалось, что все n элементов *различны*.

Если же элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам.

4.2.1 Перестановки с повторениями

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и так далее, то *число перестановок с повторениями* вычисляется по формуле:

$$P_n(\textit{с повторениями}) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

Пример 32. Сколько различных «слов» можно составить из букв слова «колокол»?

Решение. В слове «колокол» содержится две буквы «к», три буквы «о» и 2 буквы «л». То есть,n_1=2, n_2=3, n_3=2.

Всего в слове «колокол» $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 2 = 7$ букв.

Количество различных «слов», которые можно составить из букв слова «колокол» вычисляется по формуле:

$$P_7(\textit{с повторениями}) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210.$$

4.2.2 Размещения с повторениями

Пусть среди k элементов может содержаться неограниченное количество одинаковых элементов. Тогда *число размещений с повторениями* вычисляется по формуле:

$$A_n^k(\textit{с повторениями}) = n^k.$$

Пример 33.Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3.

Решение. Похожую задачу мы рассматривали в примере 26. Однако в примере 26 было уточнение: «каждая цифра входит в число только один раз», то есть не может повторяться.

В нашем же примере такого уточнения нет, значит цифры, входящие в число, могут повторяться, например: 11, 22, 33. Поэтому количество двузначных чисел, которые можно составить из трех цифр − это число размещений из 3 элементов по 2 элемента с повторениями:

$$A_3^2(\textit{с повторениями}) = 3^2 = 9.$$

4.2.3 Сочетания с повторениями

Пусть имеются предметы n видов и из них составляются наборы, содержащие k элементов, отличающиеся только составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называют *сочетаниями с повторениями*, а их общее число определяется формулой:

$$C_n^k\left(с\ повторениями\right)=C_{n+k-1}^k=\frac{\left(n+k-1\right)!}{k!\cdot\left(n-1\right)!}.$$

Пример 34. Сколькими способами можно выбрать 6 новогодних открыток в магазине, если в продаже имеются 4 разных вида новогодних открыток (количество открыток каждого вида считать неограниченным)?

Решение. Количество способов выбора 6 новогодних открыток – это число сочетаний из 4 элементов по 6 элементов с повторениями:

$$C_4^6(с\,повторениями)=C_{4+6-1}^6=C_9^6=\frac{9!}{6!\cdot 3!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=84.$$

4.3 Задания для самостоятельной работы

1. Руководством риэлтерской фирмы принято решение о необходимости рекламы нового вида услуг. По расчётам отдела рекламы, выделенных средств хватит для того, чтобы поместить объявления только в 7 из 12 городских газет. Сколько существует способов отбора газет для размещения рекламы?

2. Расписание одного дня занятий на II курсе состоит из трёх пар. В течении семестра студенты изучают 12 дисциплин. Сколько существует вариантов составления расписания занятий на один из дней недели, если в течении дня проводится занятия по разным дисциплинам?

3. Администрация города объявила тендер на строительство медицинского центра. В конкурсную комиссию поступило 8 запечатанных пакетов со сметами от различных строительных фирм. Сколько существует способов очерёдности вскрытия пакетов, если они вскрываются конкурсной комиссией в случайном порядке после окончания срока подачи заявок?

4. В финале конкурса телевизионных программ по трём номинациям представлены 9 региональных телерадиокомпаний. Сколько существует вариантов распределения призов, если каждая телерадиокомпания может получить призы по нескольким номинациям, и по каждой номинации установлены: а) одинаковые призы? б) различные призы?

5. Издательство планирует выпустить в текущем году 6 различных учебников по дискретной математике. Каким количеством способов можно выбрать 30 экземпляров, если в библиотеке университета должны быть представлены все виды изданных учебников по дискретной математике?
6. Код банковского сейфа состоит из 8 цифр. Сколько можно составить различных кодовых комбинаций, если: а) цифры не повторяются? б) цифры повторяются?

7. Фирма планирует приобрести путёвки для отдыха 25 сотрудников. Сколько существует вариантов приобретения путёвок, если: а) контракт будет заключён с четырьмя пансионатами? б) с двумя пансионатами?

8. В парфюмерном магазине имеется 5 различных косметических наборов. Фирме необходимо приобрести 18 подарков к празднику. Сколько в таком случае существует вариантов выбора подарка?

9. Четыре автора должны написать книгу, причем первый и третий должны написать по 4 главы, второй – 3, а четвертый 2 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

10. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и стал набирать их наудачу. Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы набрать нужный номер?

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев, И.А. Дискретная математика: учебное пособие для вузов / И.А. Мальцев. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 304 с.
2. Судоплатов, С.В. Дискретная математика: учебник для вузов / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – 2-е изд., переработ. – Москва: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.– 256 с.

3. Лихтарников, Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: учебное пособие для вузов / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 288 с.
4. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера: учебник для вузов / О.П. Кузнецов. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 400 с.
5. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы: учебник для вузов / О.Е. Акимов. – 2-е изд., доп. – Москва: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 376 с.
6. Грес, П.В. Математика для гуманитариев: учебное пособие для вузов / П.В. Грес. – Москва: Логос, 2003. – 120 с.
7. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие для вузов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – 5-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

Степовой Дмитрий Владимирович

канд. физ.-матем. наук, доцент кафедры
«Высшая математика»

Удинцова Надежда Михайловна
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика»

Белоконов Сергей Анатольевич
канд. техн. наук, доцент кафедры
«Высшая математика»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Издана в авторской редакции

Подписано в печать 07.11.2014.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 3,0. Тираж 50 экз. Заказ № 362.

РО и ОП Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВПО «Донской государственный аграрный университет»

347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15