МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ

Кафедра высшей математики

Л.Н. Шаповалова, В.В. Серегина

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Зерноград – 2015

УДК 517.(075)

Печатается по решению методической комиссии
по направлению подготовки 110800.62 – Агроинженерия
Азово-Черноморского инженерного института
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный аграрный университет»
в г. Зернограде

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика»
Середина М.Н.,
канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные технологии
и управляющие системы» ***Емелин А.А.***

Шаповалова, Л.Н. Дискретная математика. Математическая логика: учебное пособие / Л.Н. Шаповалова, В.В. Серегина. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2015. – 69 с.

Учебное пособие содержит краткий теоретический и практический материал по математической логике. Может быть использовано для проведения лекционных и практических занятий по дисциплине «Математика».

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 110800.62 (35.03.06) – Агроинженерия, получающих степень бакалавра.

Учебное пособие поможет студентам освоить следующие компетенции:

− ОК-1 − владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

− ПК-1 − способность к использованию основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры высшей математики.
Протокол № 11а от 24.06.2015 г.

Рассмотрено и одобрено методическим советом
энергетического факультета.
Протокол № 10 от 30.06.2015 г.

Содержание

Предисловие

Дискретная математика включает в себя несколько самостоятельных разделов современной математики, условно объединенных тем, что в них отсутствует понятие предельного перехода. По этому признаку к дискретной математике можно отнести многие математические направления: теорию множеств, математическую логику, теорию чисел, векторную и матричную алгебры, теорию конечных групп, колец и полей, комбинаторику, теорию конечных автоматов и другие. С точки зрения «чистой» математики все перечисленные разделы важны в равной степени. Наиболее важными с практической точки зрения являются разделы: теория множеств, математическая логика, комбинаторика и теория графов. Эти теории создают фундамент не только для дальнейшего изучения других математических направлений, но также создают базу для изучения предметов, связанных с электроникой, информатикой, и автоматизированной техникой.

Данное учебное пособие содержит теоретический и практический материал только по математической логике. Оно состоит из двенадцати пунктов. В каждом пункте подробно излагается теория, приводятся примеры решения задач, а затем предлагаются упражнения для закрепления материала. В конце пособия приводятся ответы.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 110800.62 (35.03.06) – Агроинженерия. Оно может быть использовано преподавателями и студентами очной и заочной форм обучения для освоения следующих модулей рабочей программы дисциплины Б2.Б.1 «Математика», в соответствии с ФГОС ВПО:

1. Модуль № 2. Математический анализ.

2. Модуль № 6. Элементы дискретной математики. Теория вероятностей и математическая статистика.

В результате изучения материала учебного пособия студенты должны:

− знать определения основных понятий математической логики, операций над высказываниями; свойства операций (ОК-1); распознавать объекты и символику математической логики (ОК-2);

− уметь применять изученные формулы алгебры логики к решению задач по математической логике; проводить доказательства свойств алгебраических операций, строить верные рассуждения, используя аппарат математической логики; корректно выполнять действия с объектами алгебры логики (ОК-1); правильно использовать терминологию и символику при решении логических задач, аргументированно выбирать метод (ОК-2);

− владеть методами математической логики при решении задач теории релейно-контактных схем (ПК-1); графически иллюстрировать задачи (ОК-1); владеть способностью корректно записывать знания профессиональной области с использованием символики математической логики (ОК-2).

Введение

Математика является наукой, в которой все утверждения доказываются с использованием законов человеческого мышления. Изучение таких законов является предметом логики.

Как самостоятельная наука логика сформировалась в трудах греческого философа Аристотеля (384–322 гг. до н.э.). Все систематизированные и наработанные им знания впоследствии стали называть формальной или Аристотелевской логикой.

Формальная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий. Большой вклад в её дальнейшее развитие внес английский ученый Джордж Буль (1815–1864). Он создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания. Именно благодаря введению символов в логику была получена основа для создания нового направления – математической логики.

1. Понятие высказывания

Основным неопределенным понятием математической логики является понятие высказывания. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно истинно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими знаниями высказываний являются «истина» и «ложь». При этом истинность или ложность высказывания зависит обычно от дополнительных условий, определяемых контекстом. Например, высказывание «сегодня вторник» является истинным во вторник и ложным в среду. Высказывание «$2 \cdot 2 = 11$» является ложным в десятичной системе исчисления и истинным в троичной системе. В математической логике обычно предполагается, что все дополнительные условия определены настолько точно, что истинность или ложность рассматриваемых высказываний определяется однозначно и не меняется в процессе рассуждений [5].

Пример 1.1. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями.

1) Планета Земля вращается вокруг Солнца.

2) В сутках 25 часов.

3) Число 2 является решением уравнения $5x = 10$.

4) Сколько времени?

5) Мир, труд, май!

Решение.

Предложения 1), 2), 3) являются высказываниями, а 4), 5) не являются высказываниями, причем 1), 3) истинны, а 2) ложно.

Высказывание, которое представляет одно утверждение, принято называть *простым* или *элементарным*. В примере 1.1 все высказывания 1), 2), 3) являются простыми.

Высказывание, которое получается из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если …, то…», «тогда и только тогда» называются *сложными* или *составными*.

Пример 1.2. Рассмотрите сложные высказывания. Выделите из них простые, укажите грамматические связки.

1) Если ученик успешно сдаст выпускные экзамены, то он получит аттестат об окончании средней школы.
2) Число 10 кратно 2 и 5.

Решение.

Первое предложение является составным высказыванием. Оно образовано из двух «ученик успешно сдал выпускные экзамены», «ученик получит аттестат об окончании средней школы» с помощью грамматической связки «если…, то…».

Второе высказывание образовано из двух элементарных высказываний «число 10 кратно 2», «число 10 кратно 5», соединенных союзом «и».

Элементарные высказывания будем обозначать малыми латинскими буквами: a, b, c, …, x, y, z, … Если высказывание a истинно, то будем писать

$$a = 1,$$

если a ложно, то

$$a = 0.$$

В математической логике все высказывания рассматривают только с точки зрения их логического значения, не вникая в их житейское содержание.

Упражнения

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

а) Москва – столица России;

б) Луна является спутником Земли;

в) студент юридического факультета;

г) $\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$;

д) $3 > 0$.

2. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

а) кислород − газ;

б) я живу в городе Саратове;

в) снег белый;

г) белый снег;

д) $2 < 3$;

е) $(12+\sqrt[3]{5})^2$

ж) $x < 3$.

3. Является ли высказыванием следующее предложение: «Это предложение ложно»?

4. Приведите примеры предложений, которые…

а) являются высказываниями;

б) не являются высказываниями.

5. Установите, истинно или ложно высказывание:

а) $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2+1=0,\ x\in R\}$;

б) $-3\in\{x \mid \frac{x^3-1}{x^2+2}<-2,\ x\in R\}$;

в) $3\in\{\frac{2n+1}{3n-2}|\ n\in N\}$;

г) $\{1\}\in N$;

д) $\{1\}\in P(N)$, где $P(N)$ – множество всех подмножеств множества N;

е) $\varnothing\in\varnothing$;

ж) $\varnothing\in\{\varnothing\}$;

з) $\{1,-1, 2\}\subset\{x\ |x^3+x^2-x-1=0,\ x\in Z\}$;

и) $\{x\ |\ x^3+x^2-x-1=0,\ x\in Z\}\subset\{1, -1, 2\}$;

к) $\varnothing\subset N$;

л) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing\}$;

м) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

6. Среди следующих высказываний укажите простые и составные. В составных высказываниях выделите грамматические связки:

а) число 27 не делится на 3;

б) число 15 делится на 5 и на 3;

в) если число 126 делится на 9, то оно делится на 3;

г) число 7 является делителем числа 42;

д) число 1269 делится на 9 тогда и только тогда, когда 18 делится на 9.

2. Логические операции над высказываниями. Отрицание. Конъюнкция. Дизъюнкция

Определение 2.1. *Отрицанием* или *инверсией* высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\bar{x}$ и читается «не x» или «неверно, что x».

Логические значения высказывания $\bar{x}$ можно описать с помощью таблицы 1.

Таблица 1 – Отрицание (инверсия)

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Если x высказывание, то $\bar{x}$ также является высказыванием. Тогда можно построить отрицание высказывания $\bar{x}$, то есть $\bar{\bar{x}}$, которое называется двойным отрицаем x. Легко проверить, что логические значения высказываний x и $\bar{\bar{x}}$ совпадают.

Пример 2.1. Для высказывания «Река Дон впадает в Азовское море» постройте отрицание и двойное отрицание.

Решение.

Отрицанием исходного высказывания будет следующее: «Река Дон не впадает в Азовское море». Двойным отрицанием будет являться высказывание «Неверно, что река Дон не впадает в Азовское море».

Определение 2.2. *Конъюнкцией* или *логическим умножением* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x, y обозначается символом

$$x \wedge y \text{ или } x \cdot y.$$

Читается «x и y».

Логические значения операции $x \wedge y$ представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Конъюнкция

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример 2.2. Из двух высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на 3» составьте конъюнкцию. Найдите ее логическое значение.

Решение.

Логическим умножением двух исходных высказываний будет новое высказывание «Число 6 делится на 2 и на 3». Так как оба высказывания являются истинными, то по второй строке таблицы 2 получаем, что новое сложное высказывание является истинным.

Замечание 2.1. В обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далеких по содержанию. В алгебре логики рассматривается конъюнкция любых двух высказываний независимо от их смысла.

Из определений конъюнкции и отрицания следует, что высказывание $x \wedge \overline{x}$ всегда ложно, то есть

$$x \wedge \overline{x} = 0.$$

Определение 2.3. *Дизъюнкцией* или *логическим сложением* двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x, y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x, y обозначается символом

$x \vee y$ или

$$x + y.$$

Читается «x или y».

Логические значения дизъюнкции представлены следующей таблицей истинности:

Таблица 3 – Дизъюнкция

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример 2.3. Из двух высказываний «Число 9 делится на 3» и «Число 9 делится на 2» составьте дизъюнкцию. Найдите ее логическое значение.

Решение.

Логическим сложением двух исходных высказываний будет новое высказывание «Число 9 делится на 3 или число 9 делится на 2».

Первое из двух данных высказываний является истинным, второе – ложным. По второй строке таблицы 3 получаем, что образованное сложное высказывание является истинным.

Замечание 2.2. В повседневной речи союз «или» употребляется, как правило, в исключающем смысле. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определений операций дизъюнкции и отрицания следует, что высказывание $x \vee \bar{x}$ всегда истинно, то есть

$$x \vee \bar{x} = 1.$$

Замечание 2.3. Если сложное логическое выражение содержит в записи все три операции отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, то выполняются они в следующей очередности: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция. Изменить порядок выполнения операций можно с помощью расстановки скобок.

Пример 2.4. Определите логическое значение выражения $\overline{(x \vee y)} \wedge x \vee \bar{y}$ при следующих значениях простых высказываний $x = 1$, $y = 0$.

Решение.

Пользуясь таблицами 1, 2, 3, получаем:

$$\overline{(1 \vee 0)} \wedge 0 \vee \bar{0} = \bar{1} \wedge 1 \vee 1 = 0 \wedge 1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1.$$

Пример 2.5. Составьте таблицу истинности сложного высказывания

$$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y.$$

Решение.

Таблицу истинности сложного высказывания составим поэтапно, пользуясь таблицами 1, 2, 3:

x	y	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge y$	$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Таким образом, ответом является таблица:

x	y	$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Упражнения

7. Выясните, в каком случае указано неверное значение логической операции:

а) $a = 1$, $a \wedge b = 0$;

б) $a = 1$, $a \vee b = 0$;

в) $a = 1$, $a \wedge b = 1$;

г) $a = 1$, $a \vee b = 1$;

д) $a = 0$, $a \wedge b = 1$;

е) $a = 0$, $a \vee b = 1$;

ж) $a = 0$, $a \wedge b = 0$;

з) $a = 0$, $a \vee b = 0$.

8. Пусть x, y, z, t соответственно высказываниям «7 − простое число», «7 − составное число», «8 − простое число», «8 − составное число». Установите, какие из сложных высказываний истинные, а какие ложные (см. пример 2.4).

а) $x \wedge z$, $x \wedge t$, $y \wedge z$, $y \wedge t$;

б) $x \vee z$, $x \vee t$, $y \vee z$, $y \vee t$;

в) $\bar{x} \wedge \bar{z}$, $\bar{x} \wedge \bar{t}$, $\bar{y} \wedge \bar{z}$, $\bar{y} \wedge \bar{t}$;

г) $\bar{x} \vee \bar{z}$, $\bar{x} \vee \bar{t}$, $\bar{y} \vee \bar{z}$, $\bar{y} \vee \bar{t}$.

9. Определите логические значения сложных высказываний:

а) $(\overline{x \vee y}) \wedge x \vee \bar{y}$ при x=0, y=1;

б) $x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$ при x=1, y=1.

10. Составьте таблицы истинности логических высказываний:

а) $\overline{\bar{x} \vee y}$;

б) $(x \vee y) \wedge \bar{x}$;

в) $\overline{(x \vee \bar{y})} \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$;

г) $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$.

3. Логические операции над высказываниями. Импликация. Эквивалентность

В этом пункте рассмотрим еще две операции над высказываниями.

Определение 3.1. *Импликацией* или *следованием* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x, y обозначается символом

$$x \rightarrow y \text{ или } x \Rightarrow y.$$

Читается «если x, то y» или «из x следует y».

Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y – следствием или заключением.

Логические значения операции следования представлены в следующей таблице истинности:

Таблица 4 − Импликация (следование)

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример 3.1. Из простых высказываний «Число 12 делится на 6», «Число 12 делится на 3» составьте импликацию. Истинным или ложным будет полученное сложное высказывание?

Решение.

Импликацию двух высказываний образует грамматическая связка «если …, то …». Соответственно сложным высказыванием будет «если число 12 делится на 6, то оно делится на 3». Это высказывание является истинным, так как истинна посылка «12 делится на 6» и истинно заключение «число 12 делится на 3» (таблица 4, первая строка).

Замечание 3.1. Употребление связки «если…, то…» в алгебре логики существенно отличается от ее употребления в обыденной речи. Так, строя предложение вида «если x, то y», мы всегда подразумеваем, что x по смыслу связанно с y. Более того, если высказывание x ложно, то высказывание «если x, то y» может вообще не иметь смысла. В алгебре логики рассматривают все значения посылки x и заключения y. Смысл высказываний при этом не учитывают.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в виде «если x, то y».

Если при этом x истинно, и доказательство верно, то есть импликация $x \to y$ истинна, то мы вправе сделать вывод об истинности заключения y (вторая строка таблицы 4).

Определение 3.2. *Эквивалентностью* или *эквиваленцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое истинно, если оба высказывания x, y либо одновременно истины, либо одновременно ложны, и ложны во всех остальных случаях.

Эквивалентность высказываний x, y обозначается

$$x \leftrightarrow y \text{ или } x \Leftrightarrow y.$$

Читается «x тогда и только тогда, когда y» или «для того чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y».

Логические значения операции эквивалентность представлены в следующей таблице истинности:

Таблица 5 – Эквивалентность (эквиваленция)

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример 3.2. Составьте эквиваленцию двух высказываний «число делится на 6», «число делится на 2 и на 3». Полученное высказывание истинно или ложно?

Решение.

Составим высказывание, используя грамматическую связку «x тогда и только тогда, когда y», получим «число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и 3». В зависимости от дополнительных условий первое высказывание может принимать логическое значение «истина» или «ложь». Если оно истинно, то второе высказывание также истинно. Эквиваленция в этом случае истинна (таблица 5, первая строка). Если первое высказывание ложно, тогда второе ложно (таблица 5, четвертая строка). В этом случае также эквиваленция истинна.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах, так как большое число теорем формулируется в виде «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y». В этом случае, зная об истинности или ложности одного высказывания и доказав истинность самой эквивалентности, мы приходим к заключению об истинности или ложности другого высказывания.

Таким образом, на множестве всех высказываний определяются следующие операции:

1) отрицание (инверсия);
2) конъюнкция (логическое умножение);
3) дизъюнкция (логическое сложение);
4) следование (импликация);
5) эквивалентность (эквиваленция).

Словесные формулировки этих операций могут быть различными, но равнозначными по смыслу. Например, выражение $x \to y$ читается также «x достаточно для y», «y необходимо для x» и т. д.

С каждым высказыванием, имеющим форму импликации $x \to y$, связаны три сопряженных высказывания:

$y \to x$ – обратное;

$\bar{x} \to \bar{y}$ − противоположное;

$\bar{y} \to \bar{x}$ − противоположное обратному.

Упражнения

11. Обозначьте простые высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью алгебры логики:

а) 45 кратно 3 и 42 кратно 6;

б) 42 кратно 3 и 12 не кратно 4;

в) $\sqrt{16} = 4$ или $\sqrt{16} = -4$;

г) $2 \leq 7$;

д) если число 112 делится на 2 и на 3, то оно делится и на 6;

е) число 112 − трехзначное число, и кратно 3 или 4.

12. Пусть p и q обозначают высказывания:

p – я учусь в школе;

q − я люблю математику.

Составьте высказывания, соответствующие следующим символическим выражениям:

а) $\bar{p}$;
б) $\bar{\bar{p}}$;
в) $p \vee q$;
г) $p \wedge \bar{q}$;
д) $\bar{p} \wedge q$;
е) $\bar{p} \wedge \bar{q}$;
ж) $\overline{p \wedge q}$;
з) $p \wedge q$;
и) $p \to q$;
к) $p \leftrightarrow q$.

13. Пусть p и q обозначают следующие высказывания, относящиеся к некоторому треугольнику:

p – этот треугольник равносторонний;

q – этот треугольник равнобедренный.

Прочтите следующие сложные высказывания, записанные символически:

а) $p \vee q$;
б) $p \vee \bar{q}$;
в) $\bar{p} \vee q$;
г) $\bar{p} \vee \bar{q}$;
д) $\overline{p \wedge q}$.

14. Следующие сложные высказывания разложите на простые и запишите символически, используя логические операции:

а) эта ночь темная и ветреная;

б) эта ночь темная, но не ветреная;

в) этот четырехугольник квадрат или ромб;

г) Коля и Наташа решили задачу;

д) автором этой книги является Петров или Степанов;

е) или эту книгу написал Петров, или я не знаю, кто ее автор;

ж) это ни необходимо, ни желательно.

15. Пусть p и q – два данных высказывания. С помощью операций отрицание и конъюнкция построить из p и q новое высказывание t такое, что:

а) t истинно тогда и только тогда, когда p и q оба истинны;

б) t истинно тогда и только тогда, когда p истинно, а q ложно;

в) t истинно тогда и только тогда, когда p и q оба ложны;

г) t ложно тогда и только тогда, когда p и q оба истинны.

16. Из простых высказываний x, y, z построить составное высказывание, которое было бы истинно тогда и только тогда, когда истинна только одна (безразлично какая) из компонент.

17. Какая операция алгебры логики соответствует союзу «или» в исключающем смысле?

18. В каком из двух сложных высказываниях связка «или» встречается в неисключающем смысле?

а) сегодня вечером я пойду в театр или на концерт;

б) если я заработаю много денег или выиграю в лотерее, я отправлюсь в длительное путешествие.

Введите обозначения для простых высказываний и запишите сложные символически.

19. Какие из следующих импликаций истинны?

а) если 2·2=4, то 2<3;

б) если 2·2=4, то 2>3;

в) если 2·2=5, то 2<3;

г) если 2·2=5, то 2>3.

д) если сегодня понедельник, то завтра вторник;

е) если сегодня понедельник, то завтра суббота.

20. Пусть p и q обозначают те же высказывания, что и в задаче № 13. Прочтите следующие символические выражения:

а) $(p \vee q) \leftrightarrow q$;

б) $\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow \overline{q}$;

в) $\overline{p} \rightarrow \overline{q}$.

Какие из этих высказываний истинны?

21. Следующие сложные высказывания разложите на простые и запишите символически с помощью логических операций:

а) если идет дождь, то дует ветер;

б) если дует ветер, то идет дождь;

в) ветер дует тогда и только тогда, когда идет дождь;

г) если дует ветер, то дождя нет;

д) неверно, что ветер дует тогда и только тогда, когда нет дождя.

22. Запишите с помощью логической символики следующие высказывания:

а) для того чтобы треугольник был равносторонним, достаточно, чтобы его углы были равны;

б) для того чтобы число делилось на 3, необходимо, чтобы оно делилось на 6.

23. Запишите с помощью логической символики следующие высказывания:

а) для того чтобы произведение чисел обращалось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы один из сомножителей был равен нулю;

б) сумма чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда все слагаемые делятся на 3;

в) если четырехугольник является квадратом, то все углы его прямые, и обратно.

Какие из этих высказываний истинны?

24. Дано высказывание: «Если четырехугольник является прямоугольником, то вокруг него можно описать окружность». Постройте три его сопряженных высказывания. Какие из них истинны?

25. Приведите примеры таких высказываний p и q, чтобы…

а) прямая и обратная импликация их были истинны;

б) прямая импликация была истинной, а обратная ложной;

в) прямая импликация была ложной, а обратная истинной.

26. Найдите логические значения x и y, при которых выполняются равенства:

а) $(1\to x)\to y = 0$;

б) $x\vee y = \bar{x}$.

27. Пусть $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Определите логические значения сложных высказываний:

а) $x\wedge(y\wedge z)$;

б) $(x\wedge y)\wedge y$;

в) $x\to(y\to z)$;

г) $(x\wedge y)\to z$;

д) $(x\wedge y)\leftrightarrow(z\vee\bar{y})$;

е) $((x\vee y)\wedge z)\leftrightarrow((x\wedge z)\vee(y\wedge z))$.

28. Известно, что:

а) импликация $x\to y$ истинна, а эквивалентность $x\leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y\to x$?

б) эквивалентность $y\leftrightarrow x$ истинна. Что можно сказать о значениях $\bar{x}\leftrightarrow y$ и $x\leftrightarrow\bar{y}$?

в) x имеет значение 1. Что можно сказать о значениях импликаций $\bar{x}\wedge y\to z$ и $\bar{x}\to(y\vee z)$?

г) $x\to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z\to(x\to y)$, $\overline{(x\to y)}\to y$ и $(x\to y)\to z$?

4. Формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями из конечного числа простых высказываний можно составлять сложные. Порядок выполнения операций, как правило, указывается круглыми скобками. Например, из трех высказываний x, y, z можно построить высказывание

$$x \to (y \wedge \overline{(x \vee z)}).$$

Определение 4.1. *Формулой алгебры логики* называется сложное высказывание, которое получено из простых высказываний с помощью логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции.

Элементарные высказывания, из которых получено сложное, называются *переменными* формулы.

Формулы алгебры обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, …

Замечание 4.1. Логическая формула содержит в записи переменные, знаки логических операций и скобки. По договоренности логические операции выполняются в следующей очередности:

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция;
4) импликация;
5) эквивалентность.

Изменить порядок выполнения можно с помощью расстановки скобок.

Замечание 4.2. В записи формул в некоторых случаях в силу замечания 4.1 можно сократить число круглых скобок [1]. Например, формулу

$$(x\vee y)\to(z\leftrightarrow(t\vee\overline{x})).$$

можно записать

$$x\vee y\to(z\leftrightarrow t\vee\overline{x}).$$

Формула

$$A = x \to \overline{(y \vee (x \wedge z))}$$

может быть записана в виде

$$A = x \to \overline{y \vee x \wedge z}.$$

Логические значения формул алгебры логики полностью определяются логическими значениями входящих в них элементарных высказываний. Все возможные значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, удобно записывать в виде таблицы, которую называют таблицей истинности. Если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений. Соответственно её таблица истинности содержит 2^n строк.

Пример 4.1. Составьте таблицу истинности формулы

$$A = x \to \overline{y \vee x \wedge z}.$$

Решение.

Формула содержит три элементарных высказывания, следовательно, A будет принимать 2^3 значений. Таблица истинности будет содержать 8 строк. Первые три столбца заполним соответственно значениями переменных x, y, z. Следующие − последовательно значениями операций $x \wedge z$, $y \vee x \wedge z$, $\overline{y \vee x \wedge z}$. Последний столбец является значениями импликации A:

x	y	z	$x \wedge z$	$y \vee x \wedge z$	$\overline{y \vee x \wedge z}$	$x \to \overline{y \vee x \wedge z}$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Последний столбец этой таблицы дает нам значения формулы A при всех возможных значениях входящих в нее элементарных высказываний.

Определение 4.2. Формула A называется *тождественно истинной* (или *тавтологией*), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее элементарных высказываний.

В этом случае пишут

$$A \equiv 1.$$

Например, тождественно истинна формула

$$x \vee \bar{x}.$$

Определение 4.3. Формула A называется *тождественно ложной*, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее элементарных высказываний.

В этом случае пишут

$$A \equiv 0.$$

Например, тождественно ложна формула

$$x \wedge \bar{x}.$$

Пример 4.2. Покажите, что высказывание является тавтологией

$$x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Решение.

Составим таблицу истинности:

x	y	$x \wedge y$	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge y$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1

Итак, формула принимает значение 1 при всех значениях переменных x и y. Значит, она является тавтологией.

Упражнения

29. Покажите, что формулы являются тавтологиями:

а) $\bar{x} \vee x \vee y$;

б) $x \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x}$;

в) $\bar{x} \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x$;

г) $x \wedge x \vee \bar{x} \wedge \bar{x}$.

30. Установите, не составляя таблицу истинности, является ли формула тождественно истинной или тождественно ложной:

а) $p \to p$;

б) $p \vee \bar{p}$;

з) $\overline{p \wedge (p \to \bar{p})}$;

и) $(p \to p) \vee \bar{p}$;

в) $\overline{p \wedge \bar{p}}$;

г) $p \leftrightarrow \bar{p}$;

д) $\bar{p} \to p$;

е) $p \leftrightarrow p$;

ж) $(p \vee p) \to p$;

к) $p \leftrightarrow p \wedge (\bar{p} \to p \wedge p)$;

л) $p \vee (p \leftrightarrow \bar{p})$;

м) $\overline{p \to \bar{p}}$;

н) $\overline{p \leftrightarrow \bar{p}}$;

о) $(p \vee p) \to (p \wedge p)$.

31. Покажите, что формулы

а) $\bar{b} \to \bar{a}$;

б) $a \wedge \bar{b} \to \bar{a}$;

в) $a \wedge \bar{b} \to b$;

г) $a \wedge \bar{b} \to 0$

имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \to b$.

32. Составьте таблицы истинности для формул

а) $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$;

б) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$;

в) $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$;

г) $x \to (y \to x)$;

д) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$;

е) $(x_1 \to \overline{x_2}) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \overline{x_3})$;

ж) $(\bar{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x))$;

з) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to x_n) \ldots)$;

и) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

33. Установите, какие из следующих формул являются тождественно истинными, а какие тождественно ложными:

а) $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}$;

б) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

в) $p \to q \leftrightarrow \bar{q} \to \bar{p}$.

г) $\overline{p_1 \to (p_1 \to p_1)}$;

д) $\overline{p_1} \to (p_1 \to p_2)$;

е) $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$;

ё) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;

ж) $\overline{(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))}$;

з) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \vee p) \rightarrow (p_2 \vee p))$;

и) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$;

к) $\overline{(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \wedge p) \rightarrow (p_2 \wedge p))}$.

5. Равносильные формулы

Рассмотрим две формулы A и B алгебры логики.

Определение 5.1. Две формулы A и B называются *равносильными*, если они принимают одно логическое значение при определенном наборе значений входящих в эти формулы элементарных высказываний.

Тот факт, что формулы A и B равносильны, будем обозначать

$$A=B.$$

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ − тавтология, и обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ – тавтология, то формулы A и B равносильны.

Пример 5.1. Доказать, что

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y.$$

Решение.

Составим таблицы истинности формул $x \rightarrow y$, $\bar{x} \vee y$, используя таблицы 3–4:

Таблица 6

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица 7

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x}\vee y$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Из таблиц 6, 7 видно, что при одних значениях переменных x и y формулы $x\to y$ и $\overline{x}\vee y$ принимают одни логические значения. Следовательно, формулы $x\to y$ и $\overline{x}\vee y$ равносильны.

Среди всех равносильных формул выделяют три важные группы:

1.Основные равносильности.

1. $x\wedge x = x$. (5.1)

2. $x\vee x = x$. (5.2)

3. $x\wedge 1 = x$. (5.3)

4. $x\vee 1 = 1$. (5.4)

5. $x\wedge 0 = 0$. (5.5)

6. $x\vee 0 = x$. (5.6)

7. $x\wedge\overline{x} = 0$ – закон противоречия. (5.7)

8. $x\vee\overline{x} = 1$ – закон исключения третьего. (5.8)

9. $\overline{\overline{x}} = x$ – закон снятия двойного отрицания. (5.9)

10. $x\wedge(x\vee y) = x$ – первый закон поглощения. (5.10)

11. $x\vee(x\wedge y) = x$ – второй закон поглощения. (5.11)

Докажем, например, равносильность (5.10)

$$x\wedge(x\vee y) = x.$$

Составим таблицу истинности:

x	y	$x\vee y$	$x\wedge(x\vee y)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

Значения первого и последнего столбцов равны в каждой строке таблицы. Это доказывает первый закон поглощения.

2. Равносильности, которые выражают одни логические операции через другие.

1. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$. (5.12)

2. $x \to y = \overline{x} \vee y$. (5.13)

3. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. (5.14)

4. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$. (5.15)

законы де Моргана

5. $x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$. (5.16)

6. $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$. (5.17)

Докажем, например, равносильность (5.12):

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x).$$

Составим для удобства одну таблицу истинности для двух формул

$$A = x \leftrightarrow y,$$

$$B = (x \to y) \wedge (y \to x),$$

в которой предпоследний столбец будет заполняться значениями формулы *B*, последний – значениями формулы *A*:

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

В каждой строке таблицы, соответствующей определенному набору значений переменных, формулы *A* и *B* принимают одинаковые значения. Следовательно, *A*=*B*.

Вторая группа равносильностей позволяет сделать следующий вывод: всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только логические операции – конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1. $x\wedge y = y\wedge x$ – коммутативность конъюнкции. (5.18)

2. $x\vee y = y\vee x$ – коммутативность дизъюнкции. (5.19)

3. $x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$ – ассоциативность конъюнкции. (5.20)

4. $x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$ – ассоциативность дизъюнкции. (5.21)

5. $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции. (5.22)

6. $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. (5.23)

Докажем, например, равносильность (5.22). Составим две таблицы, в которых найдем значения формул

$$A=x\wedge(y\vee z) \text{ и } B=(x\wedge y)\vee(x\wedge z),$$

используя таблицы 2, 3:

x	y	z	$y\vee z$	$x\wedge(y\vee z)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

x	y	z	$x\wedge y$	$x\wedge z$	$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Последние столбцы совпадают, что доказывает равносильность (5.22).

6. Преобразования формул

Все перечисленные в пункте 5 равносильности дают возможность любую формулу или её часть заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называют равносильными. Равносильные преобразования используют для упрощения формул или для приведения формул к необходимому виду.

Будем считать в дальнейшем, что формула *A* проще равносильной ей формулы *B*, если она содержит меньше логических операций и меньше букв. Как правило, в таких преобразованиях операции эквивалентность и импликация заменяют операциями конъюнкция и дизъюнкция.

Рассмотрим несколько примеров на упрощение формул.

Пример 6.1. Докажите равносильность аналитически:

$$(x\vee y)\wedge(x\vee\overline{y}) = x.$$

Решение.

Используя равносильности (5.1), (5.2), (5.3), (5.6), (5.7), (5.8), имеем:

$$x\wedge x\vee x\wedge\overline{y}\vee x\wedge y\vee y\wedge\overline{y} = x\vee x\wedge\overline{y}\vee x\wedge y\vee 0 = x\vee x\wedge(y\vee\overline{y})\vee 0 = x\vee x\wedge 1\vee 0 = x\vee 0 = x.$$

Пример 6.2. Упростите формулу:

$$\overline{x\wedge y\vee\overline{y}\wedge x}.$$

Решение.

По формулам (5.15), (5.14), (5.9), (5.11) имеем:

$$\overline{x\wedge y\vee\overline{y}\wedge x} = \overline{x\wedge y}\wedge\overline{\overline{y}\wedge x} = \overline{x}\vee\overline{y}\wedge\overline{\overline{y}}\vee\overline{x} = \overline{x}\vee\overline{x}\wedge y\vee\overline{x} = \overline{x}\vee(\overline{x}\wedge y) = \overline{x}.$$

Пример 6.3. Найдите логические значения высказываний x и y, если формула $(1\to x)\to y$ тождественно ложная.

Решение.

По условию имеем равенство:

$$(1\to x)\to y = 0. \tag{6.1}$$

Упростим левую часть. По формуле (5.13) предыдущего пункта можно записать:

$$(1\to x)\to y = (\overline{1}\vee x)\to y = (0\vee x)\to y = \overline{(0\vee x)}\vee y.$$

Далее преобразуем по формуле (5.6):

$$\overline{(0\vee x)}\vee y = \bar{x}\vee y.$$

Запишем равенство (6.1) в виде:

$$\bar{x}\vee y = 0.$$

Поскольку операция конъюнкция принимает нулевое значение, когда каждое высказывание ложное, то имеем:

$$\bar{x} = 0,\ y = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$x = 1,\ y = 0.$$

Упражнения

34. Упростите выражения:

а) $(x\vee y)\wedge(t\vee z)$;

б) $(x\wedge y)\vee(t\wedge z)$;

в) $(x\vee z)\wedge(y\vee z)\wedge (t\vee z)$;

г) $\overline{x \rightarrow x}$;

д) $\overline{x \leftrightarrow x}$;

е) $\overline{(x \vee \bar{y})}\wedge(\bar{x}\wedge\bar{y})$;

ж) $(\bar{x}\vee y)\wedge(x\vee\bar{y})$;

з) $(\bar{x}\wedge y)\vee(x\wedge\bar{y})$;

и) $(x\wedge y)\vee x$;

к) $(x\wedge\bar{y})\vee(\bar{x}\wedge z)\vee(\bar{y}\wedge z)$;

л) $p\rightarrow q\leftrightarrow\bar{q}\rightarrow\bar{p}$.

35. Доказать равносильности:

а) $(x\vee y\vee z)\wedge t = x\wedge t\vee y\wedge t\vee z\wedge t$;

б) $\overline{(x \vee y \vee z)} = \bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}$;

в) $\overline{x \wedge y \wedge z} = \bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}$;

г) $\overline{x \rightarrow y} = x\wedge\bar{y}$;

д) $\overline{(x \vee y) \wedge z} = \bar{x}\wedge\bar{y}\vee\bar{z}$;

е) $(x\rightarrow y)\rightarrow x = x$.

36. Найдите логические значения высказываний x и y из равносильностей:

а) $x\vee y = \bar{x}$;

б) $(1\vee x)\rightarrow y = 0$;

в) $x\wedge y\vee\bar{x}\wedge y = 1$.

7. Алгебра Буля

Равносильности (5.18)-(5.23) дают основание утверждать, что введенные операции над высказываниями конъюнкция и дизъюнкция подчиняются коммутативным, ассоциативным законам и дистрибутивному закону конъюнкции относительно дизъюнкции, которые имеют место в алгебре чисел.

Поэтому над формулами логики можно проводить те же преобразования, которые выполняются в алгебре чисел. Но над высказываниями можно проводить и другие преобразования, которые основаны на равносильностях (5.1)–(5.17). Эта особенность позволила прийти к важному обобщению.

Пусть М – непустое множество элементов любой природы $\{x, y, z\ldots\}$. На этом множестве введем три операции: сложение «+», умножение «·», отрицание «–» и одно отношение «=», которые удовлетворяют 7 группам аксиом.

I. Коммутативные законы:

1. $x+y = y+x$;

2. $x \cdot y = y \cdot x$.

II. Ассоциативные законы:

3. $x+(y+z) = (x+y)+z$;

4. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

III. Дистрибутивные законы:

5. $x \cdot (y+z) = x \cdot y+x \cdot z$;

6. $x+(y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$.

IV. Законы идемпотентности:

7. $x+x = x$;

8. $x \cdot x = x$.

V. Закон снятия двойного отрицания:

9. $\bar{\bar{x}} = x$.

VI. Законы де Моргана:

10. $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$;

11. $\overline{x \cdot y} = \bar{x}+\bar{y}$.

VII. Законы поглощения:

12. $x+(x \cdot y) = x$;

13. $x \cdot (x+y)=x$.

Определение 7.1. Множество М с введёнными операциями сложения, умножения, отрицания и отношением равенства, удовлетворяющим аксиомам 1–13, называется *булевой алгеброй* или *алгеброй Буля*.
Рассмотрим два примера алгебры Буля.

1. Пусть М − множество всех высказываний. Под операцией сложения, умножения, отрицания будем понимать соответственно дизъюнкцию, конъюнкцию, отрицание высказывания, а знак равенства рассматривать как знак равносильности. Тогда в силу формул (5.18)–(5.23) все аксиомы булевой алгебры выполняются. Значит, множество всех высказываний с введенными операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание и отношение равносильности является моделью (интерпретацией) булевой алгебры. По этой причине в математической литературе вместо термина «математическая логика» часто используются термины «булева алгебра логики», «алгебра логики» или «алгебра высказываний».

2. Пусть М – множество всех множеств. Под операциями сложения, умножения, отрицания будем понимать соответственно объединение, пересечение и дополнение, а знак равенства рассматривать как знак равенства множеств. Нетрудно убедиться [4], что в алгебре множеств все аксиомы алгебры Буля выполняются.

Ниже будет рассмотрена модель алгебры Буля технического характера. Как будет показано, она играет важную роль в современной автоматике.
Замечание 7.1. В силу вышесказанного в математической литературе часто обозначают дизъюнкцию символом «+», конъюнкцию «·».

8. Применение математической логики к решению логических задач

Алгебру логики можно применять к решению логических задач [2]. Для этого условие конкретной задачи нужно записать в виде формулы алгебры логики. Затем упростить её с помощью равносильных преобразований. Простейший вид формулы позволяет, как правило, дать ответы на все поставленные вопросы в задаче.

Рассмотрим методику решения задач на конкретных примерах.

Пример 8.1. Четыре студентки – Мария, Нина, Ольга и Полина – участвовали в соревновании и заняли четыре призовых места. Когда стали узнавать, как распределились места, получили три разных ответа:

1) Ольга первая, Нина вторая;

2) Ольга вторая, Полина третья;

3) Мария вторая, Полина четвертая.

Известно, что в каждом ответе по крайней мере одна часть верна. Определите правильное распределение мест.

Решение.

Для удобства обозначим высказывание большими латинскими буквами с индексом внизу, где буква является первой буквой имени участника, индекс – номер места, которое он занял в соревновании. Рассмотрим шесть элементарных высказываний:

1) O_1 − Ольга первая;

2) N_2 − Нина вторая;

3) O_2 − Ольга вторая;

4) P_3 − Полина третья;

5) M_2 − Мария вторая;

6) P_4 − Полина четвертая.

Связаны они между собой по условию задачи утверждением, что у каждой пары высказываний (O_1, N_2), (O_2, P_3), (M_2, P_4) хотя бы одно является истинным. Значит, справедливы равносильности:

$$O_1 \vee N_2 = 1,\ O_2 \vee P_3 = 1,\ M_2 \vee P_4 = 1.$$

Тогда конъюнкция трех сложных высказываний будет истинна:

$$(O_1 \vee N_2) \wedge (O_2 \vee P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) = 1. \qquad (8.1)$$

Упростим левую часть равенства (8.1). Для этого раскроем первые и вторые скобки (см. упражнение 34а):

$$(O_1 \wedge O_2 \vee O_1 \wedge P_3 \vee N_2 \wedge O_2 \vee N_2 \wedge P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) = 1.$$

Так как по смыслу задачи

$$O_1 \wedge O_2 = 0,\ N_2 \wedge O_2 = 0,$$

то можно записать:

$$(0 \vee O_1 \wedge P_3 \vee 0 \vee N_2 \wedge P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) = 1,$$

или, в силу формулы (5.6),

$$(O_1 \wedge P_3 \vee N_2 \wedge P_3) \wedge (M_2 \vee P_4) = 1.$$

Далее по формуле (5.22) имеем:

$$O_1 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee O_1 \wedge P_3 \wedge P_4 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge P_4 = 1. \tag{8.2}$$

Среди конъюнкций

$$O_1 \wedge P_3 \wedge M_2,\ O_1 \wedge P_3 \wedge P_4,\ N_2 \wedge P_3 \wedge M_2,\ N_2 \wedge P_3 \wedge P_4$$

вторая и четвертая тождественно ложные, так как

$$P_3 \wedge P_4 = 0,$$

и, следовательно,

$$O_1 \wedge P_3 \wedge P_4 = O_1 \wedge 0 = 0,$$

$$N_2 \wedge P_3 \wedge P_4 = N_2 \wedge 0 = 0.$$

Тогда равенство (8.2) принимает вид:

$$O_1 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee 0 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee 0 = 1,$$

или, в силу (5.6),

$$O_1 \wedge P_3 \wedge M_2 \vee N_2 \wedge P_3 \wedge M_2 = 1. \tag{8.3}$$

Вынесем $P_3 \wedge M_2$ за скобки по формуле (5.22):

$$P_3 \wedge M_2 \wedge (O_1 \vee N_2) = 1.$$

Конъюнкция истинна, если

$$P_3 = 1,\ M_2 = 1,\ O_1 \vee N_2 = 1.$$

Отсюда делаем вывод:

$$P_3 = 1,\ M_2 = 1,\ N_2 = 0,\ O_1 = 1,$$

то есть Полина третья, Мария вторая, Оля первая. Значит, Нина четвертая.

Ответ: Оля, Мария, Полина, Нина заняли соответственно первое, второе, третье и четвертое место.

Решение логических задач можно проводить, используя таблицу истинности формулы, которая будет составлена по условию. Эта таблица поможет ответить на поставленные вопросы.

Пример 8.2. По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом ложь. Вот, что они утверждали:

Браун: “Я совершил это. Джон не виноват”.

Джон: “Браун не виноват. Преступление совершил Смит”.

Смит: “Я не виноват, виновен Браун”.

Определите имя старика, мошенника и чиновника. Установите, кто из них виноват, если известно, что преступник один.

Решение.

Обозначим высказывания:

B – виноват Браун;

D – виноват Джон;

C – виноват Смит.

Сразу отметим, что из этих трех высказываний только одно принимает истинное значение. Значит,

$$B\wedge D=0,\ B\wedge C=0,\ D\wedge C=0. \tag{8.4}$$

По утверждениям задержанных составим три сложных высказывания:

$$B\wedge\overline{D}, \tag{8.5}$$

$$\overline{B}\wedge C, \tag{8.6}$$

$$\overline{C}\wedge B. \tag{8.7}$$

Из условия задачи известно, что у этих трех конъюнкций одна истинна, а две ложны. Составим формулу

$$A = B\wedge\overline{D}\vee\overline{B}\wedge C\vee\overline{C}\wedge B.$$

Таблица истинности этой формулы имеет вид:

B	D	C	$\overline{B}$	$\overline{D}$	$\overline{C}$	$B \wedge \overline{D}$	$\overline{B} \wedge C$	$\overline{C} \wedge B$	A
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Из последнего столбца видно, что формула A принимает истинное значение в пяти случаях: во второй, третьей, четвертой, пятой и седьмой строках. Так как только одна из трех конъюнкций (8.5, 8.6, 8.7) истинна по условию задачи, то пятую строку следует исключить из рассмотрения. Все остальные строки, кроме седьмой, не удовлетворяют равенствам (8.4). Остается только седьмая строка. Значит,

$$B = 0,\ D = 0,\ C = 1.$$

Следовательно, Смит – преступник. Его оба высказывания ложны. Рассмотрим значения высказываний Брауна и Джона соответственно:

$$B \wedge \overline{D} = 0 \wedge \overline{0} = 0 \wedge 1,\ \overline{B} \wedge C = \overline{0} \wedge 1 = 1 \wedge 1.$$

Анализируя правые части равносильностей, делаем вывод, что Джон – уважаемый в городе старик, а Браун – малоизвестный чиновник.

Упражнения

37. В школе четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы. При проверке оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили следующее:

1) Андреев: «Я убирал 9-й класс, а Савельев – 7-й».
2) Костин: «Я убирал 9-й класс, а Андреев – 8-й».
3) Савельев: «Я убирал 8-й класс, а Костин – 10-й».

Давыдов уже ушел домой. Какой класс убирал каждый ученик, если в одном из двух своих высказываний говорил правду, а во втором ложь?

38. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

9. Булевы функции от *n* аргументов

Значение формулы алгебры логики зависит от значений, входящих в эту формулу высказываний. Значит, каждому набору значений переменных из нулей и единиц формула алгебры логики ставит в соответствие нуль или единицу. Поэтому формулу алгебры логики можно мыслить функцией входящих в нее элементарных высказываний.

Определение 9.1. *Функцией алгебры логики n* переменных (или *функцией Буля*) называется функция n переменных, которая каждому упорядоченному набору чисел $(x_1, x_2, \dots , x_n)$, $x_i \in \{0;1\}$, $i = 1,\dots, n$, ставит в соответствие число $y \in \{0;1\}$.

Булева функция f от n аргументов $x_1, x_2, \dots , x_n$ обозначается

$$f\,(x_1, x_2, \dots , x_n) .$$

Переменные $x_1, x_2,\dots, x_{\text{n}}$ часто называют булевыми переменными.

Определение 9.2. Две булевы функции от n аргументов $f\,(x_1, x_2, \dots , x_n)$ и $g(t_1, t_2,\dots, t_n)$ называются *равными*, если для всех наборов $(x_1, x_2, \dots , x_n)$ и $(t_1, t_2,\dots, t_n)$, таких что $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, … , $x_n = t_n$, выполняется равенство

$$f\,(x_1, x_2,\dots, x_n) = g\,(x_1, x_2,\dots, x_n).$$

Пример 9.1.

Рассмотрим две функции трех переменных:

$$f\,(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3),$$

$$g\,(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3).$$

Формулы алгебры логики, определяющие функции f и g, равносильны. Следовательно, по определению 5.1

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3).$$

Для булевых функций справедлива теорема.

Теорема 9.1. (о представлении булевых функций через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание). *Всякая булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *может быть представлена формулой алгебры логики, в которой используются только операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, причем знак отрицания стоит только непосредственно над переменной.*

Каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная булева функция, а каждой булевой функции соответствует формула алгебры высказываний. Неоднозначность такого обратного соответствия связана с тем, что булева функция может иметь множество различных формульных выражений (см. **пример 9.1**).

Замечание 9.1. В литературе по математической логике часто при задании булевой функции формулой символы логических операций $-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ заменяют соответственно на символы $'$, $\cdot$, $+$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Мы в дальнейшем будем пользоваться только введенными ранее символами.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана таблицей истинности, то соответствующая ей формула алгебры логики может быть получена следующим образом: для каждого набора значений переменных, на котором функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, запишем конъюнкцию элементарных высказываний, взяв за член конъюнкции x_k, если значение x_k на указанном наборе значений переменных есть 1, и отрицание x_k, если значение x_k есть 0, k=1, 2, …, n. Дизъюнкция всех записанных конъюнкций будет искомой формулой. Существование такой формулы следует из теоремы 9.1.

Пример 9.2. Пусть функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Найдите аналитическое задание этой функции.

Решение.

Для наборов значений переменных (1,1,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,0,0), на которых функция $f(x_1, x_2, x_3)$ принимает значение 1, запишем конъюнкции:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3};\ \ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3;\ \ \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3};\ \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}.$$

Тогда искомая функция может быть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}.$$

10. Применение булевой алгебры в технике

Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т.д.), при исследовании некоторых электрических цепей, которые называют релейно-контактными схемами.

Под *релейно-контактной схемой* понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К реле может быть подключено несколько замыкающих и размыкающих контактов.

Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находятся соответствующие контакты. Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает находящиеся при нем замыкающие контакты или размыкает находящиеся при нем размыкающие контакты. При обесточивании обмоток реле (то есть когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие – замыкаются.

Катушки реле и контакторов в дальнейшем будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C…, замыкающие контакты реле, кнопок − малыми латинскими буквами x, y, z,…, размыкающие контакты − $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$,…

На чертеже все замыкающие контакты, подключённые к одному реле X, обозначаются символом x (рисунок 1).

Рисунок 1

Размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются символом логической операции отрицания − $\bar{x}$ (рисунок 2).

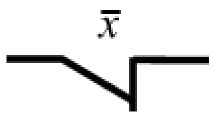


Рисунок 2

При срабатывании реле X все его замыкающие контакты x проводят ток, и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты $\bar{x}$ не проводят электрический ток, и им сопоставляется значение 0. При отключении реле X создаётся противоположная ситуация: все замыкающие контакты x разомкнуты, в этот момент им сопоставляется значение 0, все его размыкающие контакты $\bar{x}$ замкнуты, в этот момент им сопоставляется значение 1.

Работу всей релейно-контактной схемы можно описать с помощью булевой функции f, зависящей от n переменных x_1, x_2, …, x_n. Каждой переменной x_i, i=1, 2, …, n, соответствует реле или кнопка. Если при данном наборе состояний реле с соответствующими контактами x_1, x_2, …, x_n (некоторые из этих реле находятся в рабочем состоянии под током, некоторые отключены) вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то функция f принимает значение 1. Если же при некотором наборе состояний реле схема не проводит электрический ток, то считается, что функция f принимает значение 0.

Каждый набор состояний реле характеризуется упорядоченным набором из n нулей и единиц. Тогда данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому упорядоченному набору из n нулей и единиц можно поставить в соответствие 0 либо 1. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой задействовано n независимых реле или кнопок (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую функцию f от n аргументов. Эта функция f принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов $x_1, x_2,\dots, x_n$, соответствующих состояниям реле, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция $f = f\,(x_1, x_2,\dots, x_n)$ называется *функцией проводимости* данной релейно-контактной схемы.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и составим для каждой из них функцию проводимости.

Пример 10.1. Схема состоит из двух последовательно соединенных контактов x, y (рисунок 3), связанных с двумя реле, каждое из которых срабатывает независимо от другого. Найдите функцию проводимости.

Рисунок 3 − $x \wedge y$

Решение.

Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда при независимом срабатывании двух реле оба разомкнутых контакта замкнутся. В этом случае обе переменные x и y примут значение 1. Булева функция двух переменных, удовлетворяющая такому условию, имеет вид:

$$f\,(x, y) = x \wedge y.$$

Пример 10.2. Схема состоит их двух параллельно соединенных контактов x и y двух реле (рисунок 4), каждое из которых срабатывает независимо от другого. Найдите функцию проводимости.

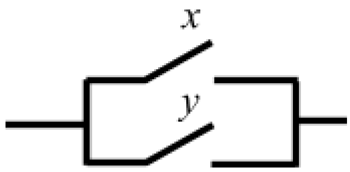


Рисунок 4 − $x \vee y$

Решение.

Схема проводит электрический ток в том случае, когда при срабатывании хотя бы одного реле замкнется соответствующий замыкающий контакт. В этом случае хотя бы одна из двух переменных x, y принимает значение 1. Булева функция двух переменных, удовлетворяющая такому условию, имеет вид:

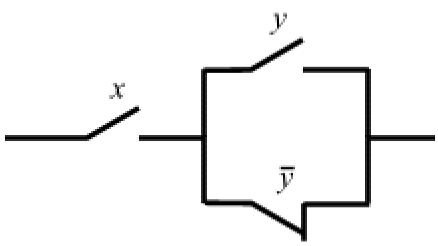
$$f(x, y) = x \vee y.$$

Определение 10.1. Наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из нулей и единиц, при которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, называются условиями работы электрической цепи.

Пример 10.3. Составить схему, состоящую из двух реле, контакты которых соединены последовательно. Цепь должна замыкаться при срабатывании только первого реле, независимо от того, сработало или не сработало второе.

Решение.

По условию схема проводит электрический ток, если при срабатывании первого реле контакт x будет замкнут, и хотя бы один из двух контактов второго реле также замкнут. Обозначим контакт второго реле y. Тогда схема, удовлетворяющая условию, имеет вид:



Булева функция двух переменных x, y, которая является функцией проводимости этой релейно-контактной схемы, может быть записана формулой

$$f(x,y) = x \wedge (y \vee \bar{y}). \qquad (10.1)$$

Действительно, при срабатывании первого реле

$$x = 1.$$

Конъюнкция

$$y \vee \bar{y} = 1,$$

так как

$$y = 1, \bar{y} = 0$$

при срабатывании второго реле, и

$$y = 0, \ \bar{y} = 1,$$

когда второе реле отключено.

Значит, при срабатывании первого реле

$$f(x,y) = x \wedge (y \vee \bar{y}) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Замечание 10.1. В технической литературе [6] для обозначения логических операций вместо символов $\wedge$, $\vee$, $\bar{\ }$ используют соответственно символы $\cdot$, $+$, $\bar{\ }$ (или $\cdot$, $+$, $'$). Тогда функция (10.1) может быть записана в виде

$$f(x,y) = x \cdot (y + \bar{y}).$$

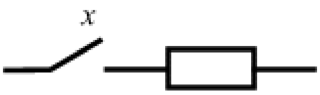
По теореме п. 9 всякая булева функция может быть представлена формулой алгебры логики, в которой используются только операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание (знак отрицания стоит только над переменной). Из этого следует, что всякая булева функция может быть реализована с помощью релейно-контактной схемы (то есть может быть построена такая схема, для которой данная функция будет функцией проводимости) и, обратно, для любой схемы может быть найдена формула алгебры логики, описывающая её работу.

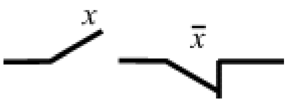
Составление схем с заданными условиями работы является первой важной задачей теории релейно-контактных схем. Эта теория позволяет не только составлять, но и проводить анализ электрических схем, используя аппарат алгебры логики.

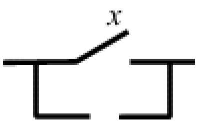
Упражнения

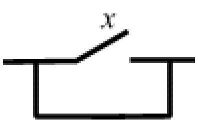
39. Найдите функцию проводимости следующих схем:

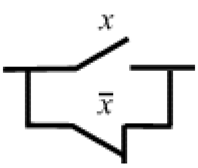
а) 

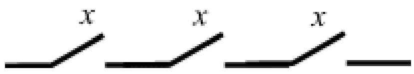
б) 

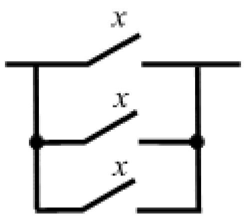
в) 

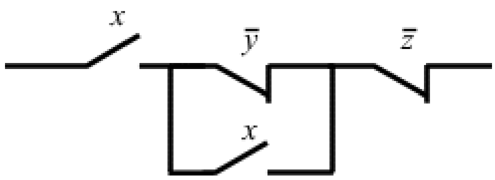
г) 

д) 

е) 

ж) 

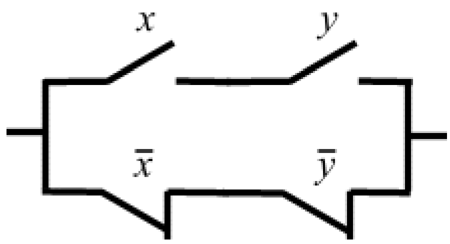
з) 

и) 

11. Составление и анализ релейно-контактных схем

Обычно при составлении релейно-контактной схемы приходится комбинировать элементы электрической цепи (контакты, катушки и др.) так, чтобы выполнялась заданная операция. Поставленная задача может быть решена различными способами. При этом не всегда найденное решение является оптимальным [6]. Поэтому анализ и упрощение релейно-контактных схем является второй важной задачей теории релейно-контактных схем.

Пример 11.1. Для данной схемы найдите функцию проводимости и условия работы.



Решение.

Используя примеры 10.1, 10.2, находим функцию:

$$f(x,y) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Условия работы

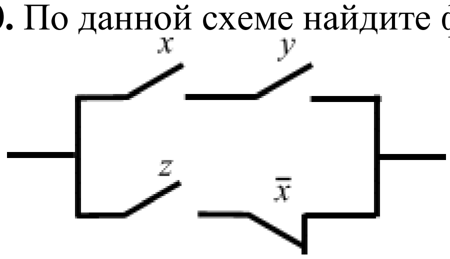
$$f(1,1) = f(0,0) = 1.$$

Определение 11.1. Две схемы, составленные из одних и тех же реле, называются *равносильными*, если их функции проводимости равны.

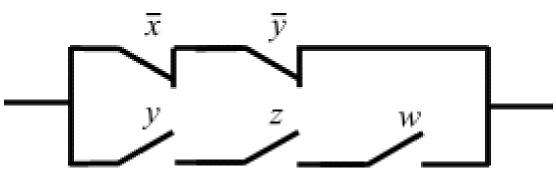
Другими словами, две схемы, составленные из одних и тех же реле, равносильны, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток.

Упражнения

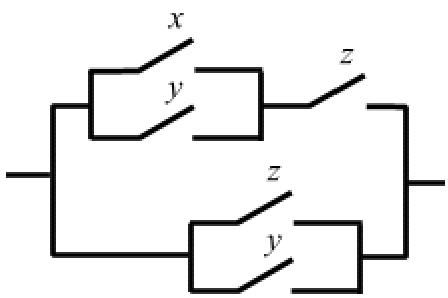
40. По данной схеме найдите функцию проводимости и условия работы.



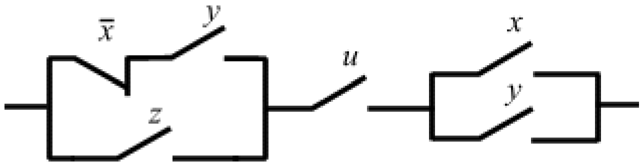
а)



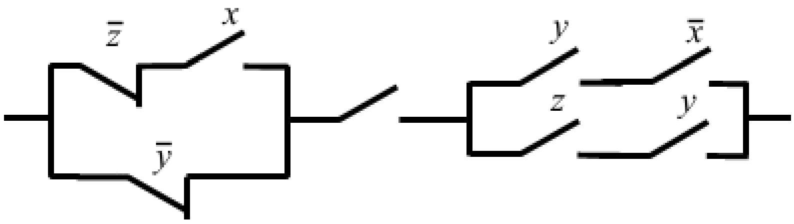
б)



в)

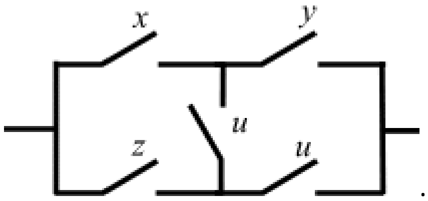


г)



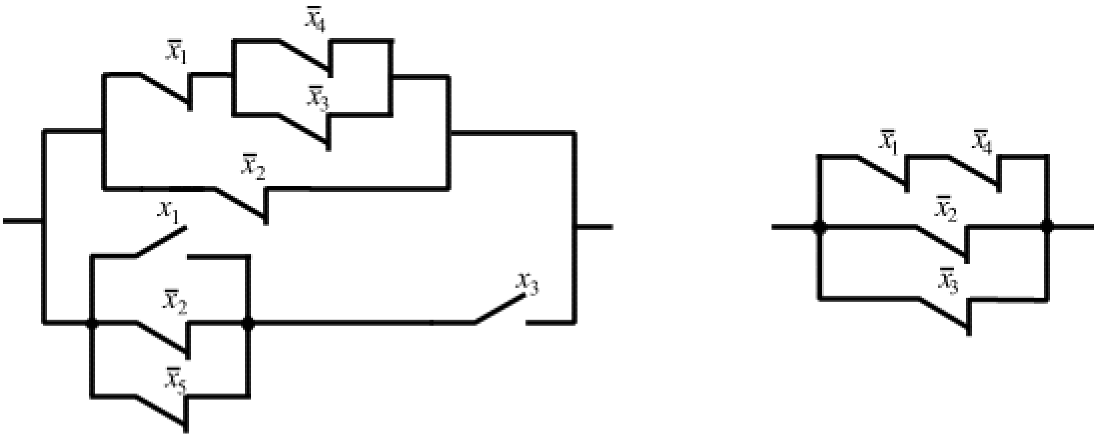
д)

41. Найдите функцию проводимости и условия работы следующей схемы. Чем эта схема отличается от схем предыдущей задачи?

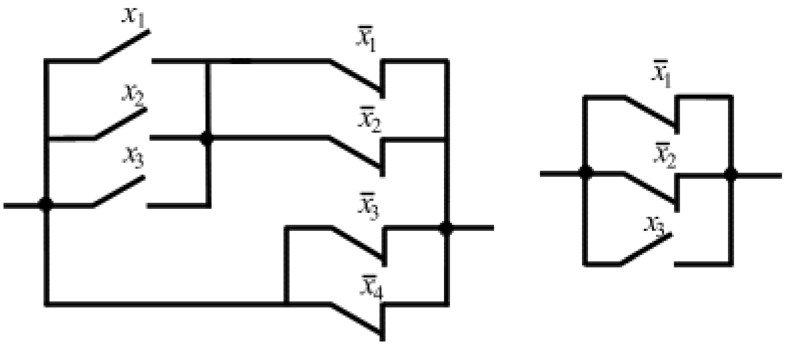


42. Проверьте равносильность схем

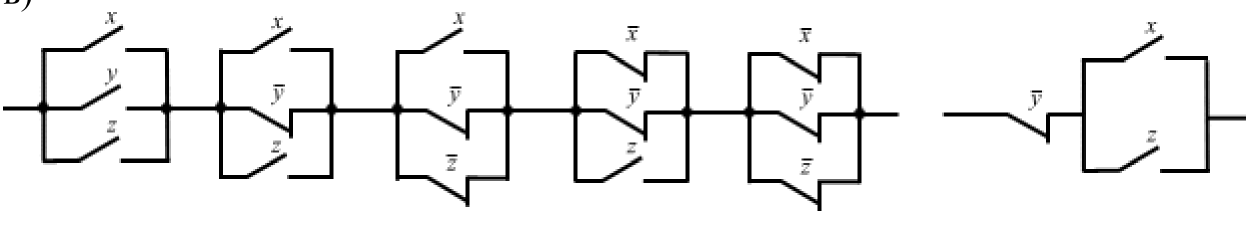
а)



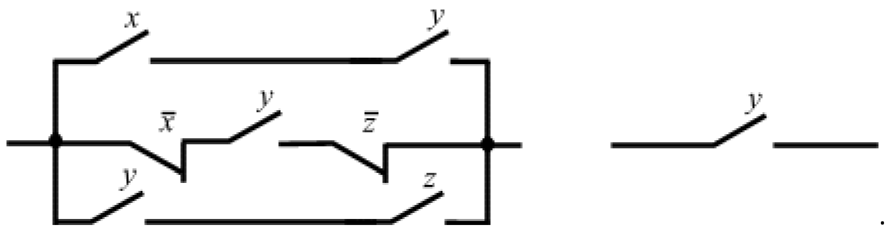
б)



в)



г)



43. Постройте схемы по заданным функциям проводимости:

а) $x\wedge(\bar{y}\wedge z\vee x\vee y)$;

б) $x\wedge y\vee z$;

в) $(\bar{x}\vee y)\wedge(z\wedge y\vee x)\vee u$;

г) $x\wedge y\wedge z\vee\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}\vee\bar{x}\wedge y$;

д) $x\wedge(y\wedge z\vee\bar{y}\wedge\bar{z})\vee\bar{x}\wedge(\bar{y}\wedge z\vee y\wedge\bar{z})$;

е) $(x\vee y)\wedge\bar{z}\vee\bar{x}\wedge z\vee y$.

44. Постройте схемы, реализующие следующие операции алгебры логики:

а) импликацию $x\rightarrow y$;

б) эквивалентность $x\leftrightarrow y$.

45. Постройте схемы по заданным условиям работы:

а) $f(0, 1, 0) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$;

б) $f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = 1$;

в) $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$;

г) $f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$;

д) $f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 1$;

е) $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = 1$.

12. Упрощение схем

Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов. Задача упрощения релейно-контактной схемы заключается в нахождении схемы более простой, равносильной данной. Эту задачу решают аналитически, используя аппарат алгебры логики.

Сначала для данной релейно-контактной схемы находят функцию проводимости. Затем эту функцию упрощают, используя равносильности (5.1)–(5.23). В конце строят релейно-контактную схему, которая соответствует преобразованной функции.

Пример 12.1. Составьте схему, состоящую их трех приемлемых реле *A*, *B*, *C* и одного исполнительного элемента *X*. Цепь исполнительного элемента должна замыкаться при срабатывании любого одного или двух реле и не должна замыкаться при срабатывании всех трех реле.

Решение.

Запишем условия замыкания цепи при срабатывании любого одного реле (контакты реле *A*, *B*, *C* соответственно будем обозначать *a*, *b*, *c*):

$$a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c},\ \bar{a}\wedge b\wedge\bar{c},\ \bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c. \qquad (12.1)$$

Условия замыкания цепи при срабатывании любых двух реле:

$$a\wedge b\wedge\bar{c},\ a\wedge\bar{b}\wedge c,\ \bar{a}\wedge b\wedge c. \qquad (12.2)$$

Общая структурная формула, описывающая работу цепи, представляет собой дизъюнкцию условий замыкания (12.1) и (12.2). Тогда функция проводимости цепи имеет вид:

$$f\,(a, b, c) = a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c} \vee \bar{a}\wedge b\wedge\bar{c} \vee \bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c \vee a\wedge b\wedge\bar{c} \vee a\wedge\bar{b}\wedge c \vee \bar{a}\wedge b\wedge c.$$

Преобразуем функцию, используя равносильности (5.22), (5.8), (5.3):

$$f\,(a, b, c) = (a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c} \vee a\wedge b\wedge\bar{c} \vee a\wedge\bar{b}\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c} \vee \bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c \vee \bar{a}\wedge b\wedge c) =$$

$$= a\wedge(\bar{b}\wedge\bar{c} \vee b\wedge\bar{c} \vee \bar{b}\wedge c)\vee \bar{a}\wedge(b\wedge\bar{c} \vee \bar{b}\wedge c \vee b\wedge c) =$$

$$= a\wedge(\bar{c}\wedge(\bar{b}\vee b)\vee\bar{b}\wedge c)\vee\bar{a}\wedge(b\wedge\bar{c}\vee(\bar{b}\vee b)\wedge c) =$$

$$= a\wedge(\bar{c}\vee\bar{b}\wedge c)\vee\bar{a}\wedge(b\wedge\bar{c}\vee c).$$

По формулам (5.23) и (5.3) имеем:

$$\bar{c}\vee\bar{b}\wedge c = \bar{c}\vee\bar{b}\wedge\bar{c}\vee c = \bar{c}\vee\bar{b},$$

$$c\vee b\wedge\bar{c} = c\vee b\wedge c\vee\bar{c} = c\vee b.$$

Следовательно,

$$f\,(a, b, c)= a\wedge(\bar{c}\vee\bar{b})\vee\bar{a}\wedge(c\vee b).$$

Пример 12.2. Упростите схему, изображенную на рисунке 5.

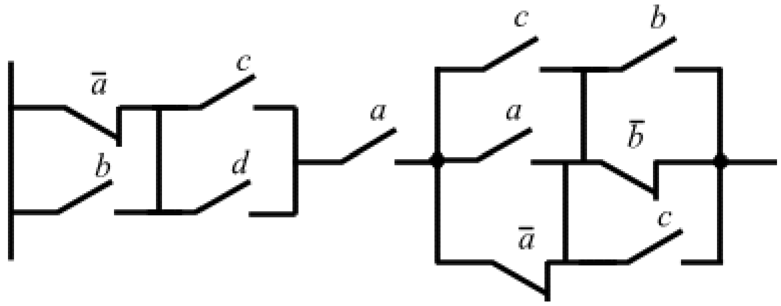


Рисунок 5

Решение.

Сначала найдем функцию проводимости. Запишем структурную формулу, которая описывает работу исходной цепи:

$$f\,(a,\,b,\,c) = (\bar{a}\vee b)\wedge(c\vee d)\wedge a\wedge(c\wedge(b\vee\bar{b})\vee(a\vee\bar{a})\wedge\text{c}). \qquad (12.3)$$

По формуле (5.8)

$$a\vee\bar{a}=1,\ \text{и}$$

$$b\vee\bar{b} = 1.$$

В силу (5.3), (5.2) имеем:

$$c\wedge 1 = c,$$

$$c\vee c = c,$$

и тогда

$$f\,(a,\,b,\,c) = (\bar{a}\vee b)\wedge(c\vee d)\wedge a\wedge(c\vee\text{c}) = (\bar{a}\vee b)\wedge(c\vee d)\wedge a\wedge c = (\bar{a}\vee b)\wedge a\wedge(c\vee d)\wedge c.$$

По формуле (5.10)

$$(c\vee d)\wedge c = c,$$

далее по (5.7) и (5.6)

$$f\,(a,\,b,\,c) = (\bar{a}\vee b)\wedge a\wedge c = \bar{a}\wedge a\vee b\wedge a\wedge c = b\wedge a\wedge c, \qquad (12.4)$$

и контакт d является лишним.

Упрощенная схема, соответствующая формуле (12.4), изображена на рисунок 6.

Рисунок 6

Сравнивая функцию (12.3) исходной схемы и функцию (12.4) схемы, полученной в результате упрощения, можно убедиться, что они проводят ток только при одновременном замыкании контактов a, b, c. Следовательно, схемы равносильны.

Пример 12.3. Для схемы на рисунке 7 составьте функцию проводимости. Упростите схему.

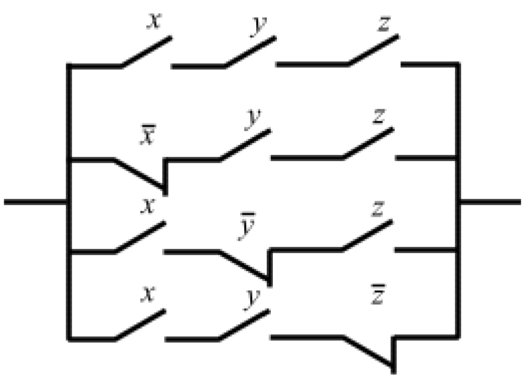


Рисунок 7

Решение.

Сначала запишем функцию проводимости исходной цепи:

$$f\,(x, y, z) = (x\wedge y\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge \bar{z})\vee(x\wedge \bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge \bar{z}). \qquad (12.5)$$

Упростим эту формулу с использованием равносильностей пункта 5 двумя способами.

Первый способ:

$$f\,(x, y, z) = (x\wedge y\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge \bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge \bar{z}) =$$

$$= ((y\wedge z)\wedge(x\vee \bar{x}))\vee(x\wedge((\bar{y}\wedge z)\vee(y\wedge \bar{z}))) =$$

$$= (y\wedge z)\vee(x\wedge(\bar{y}\vee y\wedge \bar{y}\vee \bar{z}\wedge z\vee y\wedge z\vee \bar{z})) =$$

$$= (y\wedge z)\vee(x\wedge(\bar{y}\vee \bar{z}\wedge z\vee y))=(y\wedge z)\vee(x\wedge \overline{y\wedge z}\wedge z\vee y) =$$

$$=((y\wedge z)\vee x)\wedge((y\wedge z)\vee \overline{y\wedge z})\wedge((y\wedge z)\vee(y\vee z)) =$$

$$= ((y\wedge z)\vee x)\wedge((y\wedge z)\vee(y\vee z)) =$$

$$= (y\wedge z)\vee(x\wedge(y\vee z)). \qquad (12.6)$$

Второй способ:

$$f(x, y, z) = (x{\wedge}y{\wedge}z){\vee}(\bar{x}{\wedge}y{\wedge}z){\vee}(x{\wedge}\bar{y}{\wedge}z){\vee}(x{\wedge}y{\wedge}\bar{z}) =$$

$$= ((x{\wedge}y{\wedge}z) \vee(x{\wedge}y{\wedge}\bar{z})){\vee}((\bar{x}{\wedge}y{\wedge}z){\vee}(x{\wedge}\bar{y}{\wedge}z)) =$$

$$= ((x{\wedge}y){\wedge}(z{\vee}\bar{z})){\vee}(((\bar{x}{\wedge}y){\vee}(x{\wedge}\bar{y})){\wedge}z) = (x{\wedge}y){\vee}(((\bar{x}{\vee}x){\wedge}(\bar{x}{\vee}\bar{y}){\wedge}(x{\wedge}y){\wedge}(y{\wedge}\bar{y})){\wedge}z) =$$

$$= (x{\wedge}y){\vee}(((\bar{x}{\vee}\bar{y}){\wedge}(x{\vee}y)){\wedge}z) = (x{\wedge}y){\vee}(\overline{x \wedge y}{\wedge}(x{\vee}y){\wedge}z) =$$

$$= ((x{\wedge}y){\vee}(\overline{x \wedge y})){\wedge}((x{\wedge}y){\vee}(x{\vee}y)){\wedge}((x{\wedge}y){\vee}z) = (x{\wedge}y){\vee}((x{\vee}y){\wedge}z). \qquad (12.7)$$

Схема, соответствующая формуле (12.6), имеет вид:

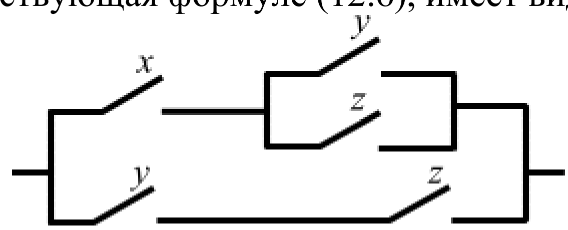


Рисунок 8

Схема, соответствующая формуле (12.7), имеет вид:

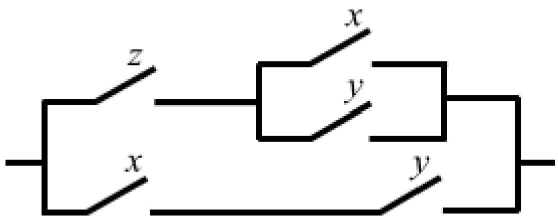


Рисунок 9

Найдем условия работы исходной схемы (рисунок 7):

$$f(1, 1, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = 1. \qquad (12.8)$$

Условия (12.8) также являются условиями работы схем, изображенных на рисунках 8 и 9. Значит, эти схемы равносильны исходной.

Пример 12.4. Построить схему для оценки результатов спортивного соревнования тремя судьями при следующих условиях: судья, засчитывающий результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, должна загореться лампочка (положительное решение судей принимается простым большинством голосов).

Решение.

Обозначим следующие высказывания:

x – судья x голосует «за»;

y – судья y голосует «за»;

z – судья z голосует «за».

Для функции проводимости схемы $f\,(x, y, z)$ по условию задачи справедлива таблица истинности:

x	y	z	$f\,(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Найдем аналитическое задание функции $f\,(x, y, z)$ (см. пример 9.1):

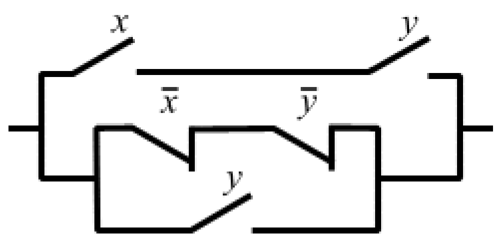
$$f\,(x, y, z) = (x\wedge y\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\bar{z}). \qquad (12.9)$$

Функции проводимости (12.9) соответствует схема, изображенная на рисунке 7. Эта схема содержит двенадцать переключателей. Но как было показано (см. пример 12.3), в результате равносильных преобразований формула (12.9) может быть приведена к виду (12.6) или (12.7), которым соответствуют схемы, изображенные на рисунках 8 и 9, содержащие пять переключателей.

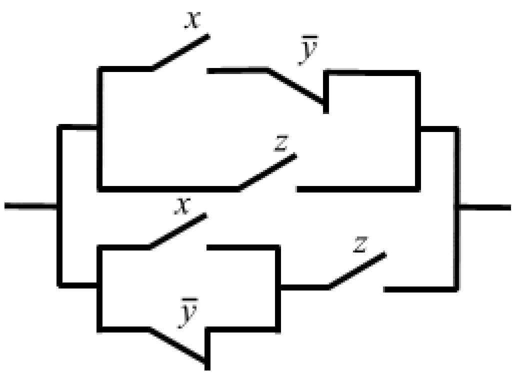
Упражнения

46. Упростите данные схемы:

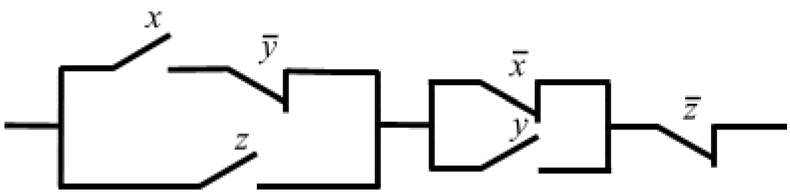
а)



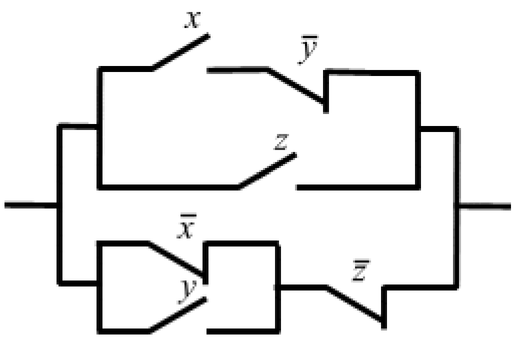
б)


x
$\bar{y}$
z
x
z
$\bar{y}$

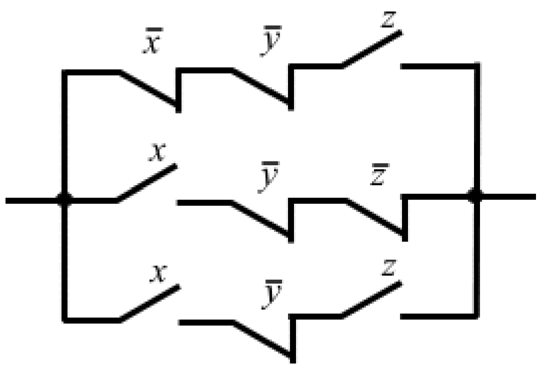
в)


x
$\bar{y}$
z
$\bar{x}$
y
$\bar{z}$

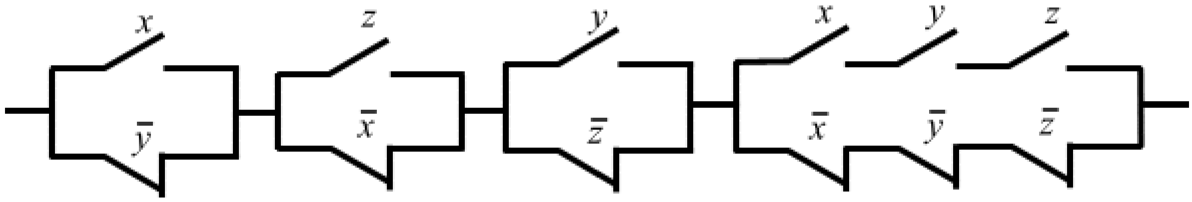
г)


x
$\bar{y}$
z
$\bar{x}$
y
$\bar{z}$

д)


$\bar{x}$
$\bar{y}$
z
x
$\bar{y}$
$\bar{z}$
x
$\bar{y}$
z

е)


x
$\bar{y}$
z
$\bar{x}$
y
$\bar{z}$
x
y
z
$\bar{x}$
$\bar{y}$
$\bar{z}$

47. Имеется одна лампа в лестничном пролёте двухэтажного здания. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы гасить и зажигать лампу, независимо от положения другого выключателя.

48. В большом зале свет должен включаться и выключаться при помощи любого из четырех выключателей, расположенных на четырех стенах. Постройте схему.

49. По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба делают одно и то же, то выигрывает игрок A, в противном случае – игрок B. Построить такую схему, чтобы при выигрыше игрока A зажигалась лампочка.

50. Комитет состоит из трех человек. Решение выносится большинством голосов. Построить такую схему, при использовании которой голосующий нажимал бы на кнопку, причем в случае принятия решения загоралась бы сигнальная лампочка.

51. Комитет состоит из пяти человек. Решение выносится большинством голосов. Если председатель голосует против, то решение не принимается. Построить такую схему, чтобы, голосуя, каждый из пяти человек нажимал на кнопку, и в случае принятия решения зажигалась бы сигнальная лампочка.

52. Группа студентов держит экзамен: отвечая на три вопроса, каждый из них должен установить, какие из трех утверждений истинны и какие ложны. Построить такую схему, чтобы при утвердительном ответе экзаменующийся нажимал кнопку и чтобы схема показывала число правильных ответов.

Ответы, решения

1. Высказываниями являются **а)**, **б)**, **д)**.
2. Выражения **г)**, **е)**, **ж)** не являются высказываниями. Остальные выражения – высказывания, но их логическое значение можно определить только при дополнительных условиях. Например, кислород не всегда является газом.
3. Нет.

5. Высказывания **а)**, **г)**, **е)**, **з)** являются ложными, остальные – истинными.

6. Высказывания **а)**, **б)**, **в)**, **д)** являются составными.

7. Значение логической операции указано неверно в случаях **б)**, **д)**.

8. а) 0,1,0, 0;

б) 1, 1, 0, 1;

в) 0, 0, 1, 0;

г) 1, 0, 1, 1.

9. а) 0;

б) 0.

10. а)

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$\overline{\bar{x} \vee y}$
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

б)

x	y	$\bar{x}$	$x \vee y$	$\overline{\bar{x} \vee y}$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

в)

x	y	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$x\vee\bar{y}$	$\overline{x\vee\bar{y}}$	$\bar{x}\vee\bar{y}$	$\overline{(x\vee\bar{y})}\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})$
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0

г)

x	y	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{x}\vee y$	$x\vee\bar{y}$	$(\bar{x}\vee y)\wedge(x\vee\bar{y})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

12. а) я не учусь в школе;

б) неверно, что я не учусь в школе;

в) я учусь в школе, или я люблю математику;

г) я учусь в школе и не люблю математику;

д) я не учусь в школе и люблю математику;

е) я не учусь в школе и не люблю математику;

ж) неверно, что я учусь в школе и люблю математику;

з) я учусь в школе и люблю математику;

и) если я учусь в школе, то я люблю математику;

к) я учусь в школе тогда и только тогда, когда люблю математику.

13. а) этот треугольник равносторонний или равнобедренный;

б) этот треугольник равносторонний или не равнобедренный;

в) этот треугольник не равносторонний или равнобедренный;

г) этот треугольник не равносторонний или не равнобедренный;

д) неверно, что этот треугольник равносторонний и равнобедренный.

14. Введите обозначения:

p − эта ночь темная;

q − эта ночь ветреная.

Тогда первые два высказывания запишутся в виде:

а) $p \wedge q$;

б) $p \wedge \overline{q}$.

Аналогично записываются и другие высказывания.

15. а) $t = p \wedge q$;

б) $t = p \wedge \overline{q}$;

в) $t = \overline{p} \wedge \overline{q}$;

г) $t = \overline{p \wedge q}$.

16. $(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$.

17. Над высказываниями x и y можно ввести операцию, которая называется *альтернативой* (исключающей дизъюнкцией). Обозначается эта операция так:

$$x \oplus y\,.$$

Альтернативу можно выразить через логические операции следующим образом:

$$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}\,.$$

Составьте таблицы логических значений $x \oplus y$ и $\overline{x \leftrightarrow y}$ и сравните последние столбцы:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	y	$x \leftrightarrow y$	$\overline{x \leftrightarrow y}$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

18. а) «или» в исключающем смысле;

б) «или» в не исключающем смысле.

19. а), **в)**, **г)**, **д)** – импликации истинные;

б) – импликация ложная;

е) – импликация истинна в любой день, кроме понедельника.

20. p – этот треугольник равносторонний;

q –этот треугольник равнобедренный.

а) треугольник является равносторонним или равнобедренным тогда и только тогда, когда он равнобедренный;

б) треугольник не является равносторонним и равнобедренным тогда и только тогда, когда он не равнобедренный;

в) если треугольник не равносторонний, то он не равнобедренный.

Установите истинность каждого сложного высказывания с помощью таблицы истинности.

а) $p \vee q \leftrightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \leftrightarrow q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

Высказывание **а)** истинно (вторая строка не рассматривается в силу того, что равносторонний треугольник является равнобедренным).

б) $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{q}$

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{q}$	$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{q}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1

в) $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

21. Введите обозначения:

p – идет дождь;

q – дует ветер.

Тогда высказывания можно записать в виде:

а) $p \to q$;

б) $q \to p$;

в) $q \leftrightarrow p$;

г) $q \to \bar{p}$;

д) $\overline{q \leftrightarrow \bar{p}}$.

22. а) введите обозначения:

p – треугольник равносторонний;

q – все углы треугольника равны.

Тогда высказывание можно записать в виде:

$q \to p$.

б) введите обозначения:

x – число делится на 3;

y – число делится на 6.

Тогда высказывание можно записать в виде:

$x \to y$.

23. а) введите обозначения:

p – произведение чисел равно нулю;

q – один из сомножителей равен нулю.

Тогда высказывание можно записать в виде:

$$p \leftrightarrow q.$$

Высказывание истинное.

б) введите обозначения:

x – сумма чисел делится на 3;

y – все слагаемые делятся на 6.

Тогда высказывание можно записать в виде:

$$x \leftrightarrow y.$$

в) введите обозначения:

x – четырехугольник является квадратом;

y – все углы четырехугольника прямые.

Тогда высказывание можно записать в виде:

$$(x \to y) \wedge (y \to x).$$

24. Введите обозначения:

p – четырехугольник является прямоугольником;

q – вокруг четырехугольника можно описать окружность.

Тогда исходное высказывание имеет вид:

$$p \to q.$$

1. Обратное высказывание

$$q \to p.$$

2. Противоположное высказывание

$$\bar{p} \to \bar{q}.$$

3. Обратное противоположному

$$\bar{q} \to \bar{p}.$$

Высказывания $p \to q$ и $\bar{q} \to \bar{p}$ истинны.

25. Например, следующие высказывания:

а) если число делится на 15, то оно делится на 3 и на 5;

б) если число делится на 12, то оно делится на 2 и на 6;

в) если сумма двух чисел есть четное число, то каждое слагаемое – четное число.

26. **а)** $x = 1$, $y = 0$;

б) $x = 0$, $y = 1$.

27. **а)** 0;

б) 0;

в) 1;

г) 1;

д) 0;

е) 1.

28. а) импликация равна 0;

б) эквиваленции равны 0;

в) импликации равны 1;

г) первая и вторая импликации равны 1, третья – зависит от значения z.

30. Формулы **а)**, **б)**, **в)**, **е)**, **ж)**, **з)**, **и)**, **к)**, **н)**, **о)** тождественно истинные, **г)** тождественно ложная.

33. Формулы **а)**, **г)**, **ж)**, **к)** тождественно ложные, остальные − тождественно истинные.

34. а) $x \wedge t \vee x \wedge z \vee y \wedge t \vee y \wedge z$;

б) $(x \vee t) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee t) \wedge (y \vee z)$;

в) $z \vee (x \wedge y \wedge t)$;

г) 0;

д) 0;

е) 0;

ж) $\bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge y$;

з) $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y)$;

и) x;

к) $(x \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}))$.

36. а) $x = 0$, $y = 1$;

б) $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 0$;

в) $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 1$.

37. Андреев убирал 8-й класс.

Давыдов убирал 9-й класс.

Савельев убирал 7-й класс.

Костин убирал 10-й класс.

38. Математическую логику изучал второй студент.

39. **а)** $f(x) = x \wedge 0 = 0$;

б) $f(x) = x \wedge 1 = 1$;

в) $f(x) = x \wedge \bar{x} = 0$;

г) $f(x) = x \vee 0 = x$;

д) $f(x) = x \vee 1 = 1$;

е) $f(x) = x \vee \bar{x} = 1$;

ж) $f(x) = x \wedge x \wedge x = x$;

з) $f(x) = x \vee x \vee x = x$;

и) $f(x) = x \wedge (\bar{y} \vee x) \wedge \bar{z}$.

40. **а)** $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z)$;

Условия работы:

$$f(1, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 0, 1) = 1;$$

б) $f(x, y, z, w) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z \wedge w)$;

Условия работы:

$$f(0, 0, 1, 1) = f(0, 0, 1, 0) = f(0, 0, 0, 1) = f(0, 0, 0, 0) = f(1, 1, 1, 1) =$$
$$= f\,0, 1, 1, 1) = 1;$$

в) $f(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \vee (z \vee y)$;

Условия работы:

$$f(1, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) =$$
$$= f(0, 0, 1) = 1;$$

г) $f(x, y, z, u) = ((\bar{x} \wedge y) \vee z) \wedge u \wedge (x \vee y)$;

Условия работы:

$$f(1, 1, 1, 1) = f(1, 0, 1, 1) = f(0, 1, 1, 1) = f(0, 1, 0, 1) = 1;$$

д) $f(x, y, z, u) = ((x \wedge \bar{z}) \vee \bar{y}) \wedge u \wedge ((\bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge z)$;

Условия работы: $f(x, y, z, u) = 0$ при всех значениях переменных x, y, z, u.

41. $f(x, y, z, u) = x \wedge (y \vee u \wedge u) \vee z \wedge (u \vee u \wedge y) = x \wedge (y \vee u) \vee z \wedge u =$

$= x \wedge y \vee x \wedge u \vee z \wedge u$;

Условия работы:

$$f(1, 1, 1, 1) = f(1, 1, 0, 1) = f(1, 0, 1, 1) = f(0, 1, 1, 1) =$$
$$f(1, 0, 0, 1) = f(0, 0, 1, 1) = f(1, 1, 1, 0) = f(1, 1, 0, 0) = 1.$$

42. а) схемы не равносильны;

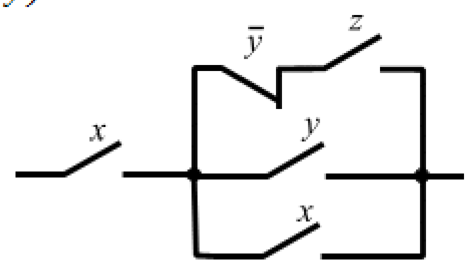
б) схемы не равносильны;

в) схемы равносильны;

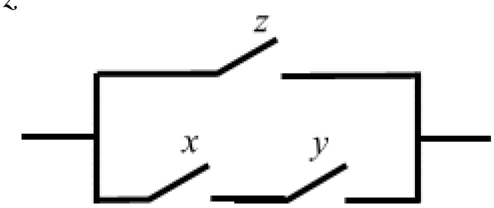
г) схемы равносильны.

43. Постройте схемы по заданным функциям проводимости:

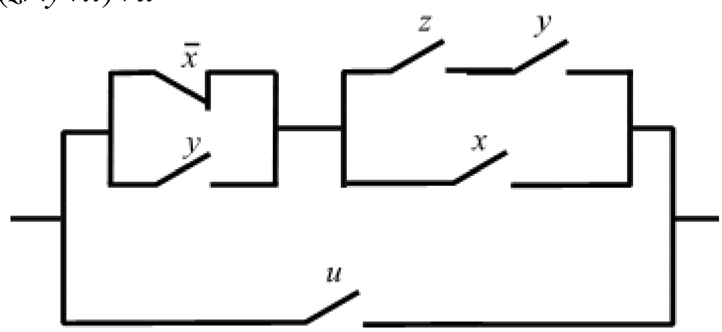
а) $x \wedge (\bar{y} \wedge z \vee x \vee y)$



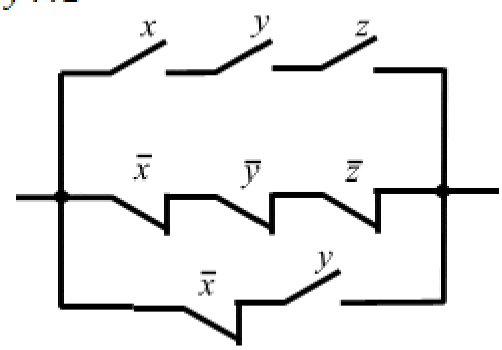
б) $x \wedge y \vee z = (x \wedge y) \vee z$



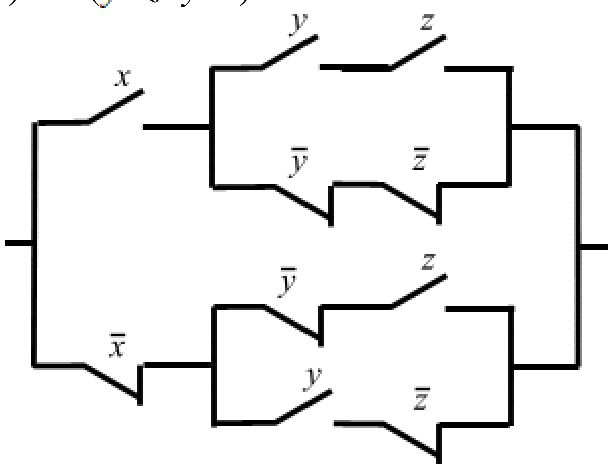
в) $(\bar{x} \vee y) \wedge (z \wedge y \vee x) \vee u$



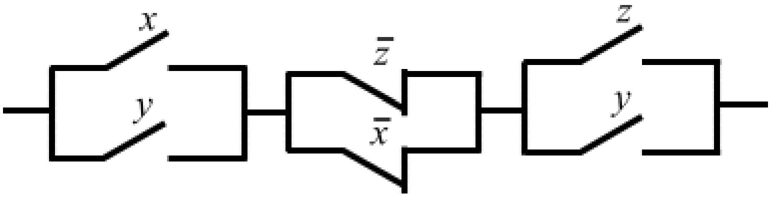
г) $x \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$



д) $x\wedge(y\wedge z\vee\bar{y}\wedge\bar{z})\vee\bar{x}\wedge(\bar{y}\wedge z\vee y\wedge\bar{z})$



е) $(x\vee y)\wedge\bar{z}\vee\bar{x}\wedge z\vee y$



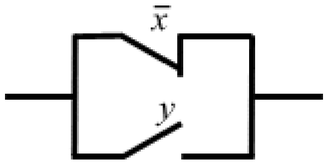
44. Постройте схемы, реализующие следующие операции логики:

а) $x\to y$.

По формуле (5.13)

$$x\to y=\bar{x}\vee y.$$

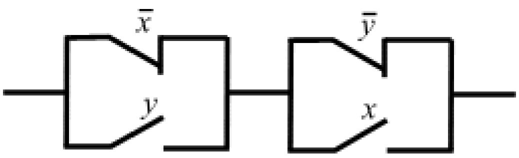
Значит, схема имеет вид:



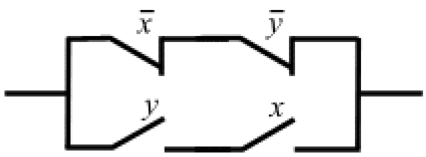
б) $x\leftrightarrow y$.

По формулам (5.12), (5.13) имеем:

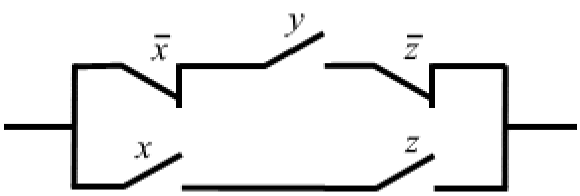
$$x\leftrightarrow y=(x\to y)\wedge(y\to x)=(\bar{x}\vee y)\wedge(\bar{y}\vee x)=\bar{x}\wedge\bar{y}\vee\underbrace{\bar{x}\wedge x}_{0}\vee\underbrace{y\wedge\bar{y}}_{0}\vee x\wedge y=\bar{x}\wedge\bar{y}\vee x\wedge y.$$



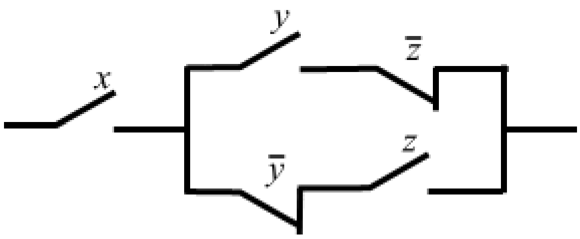
равносильная



45. **а)**



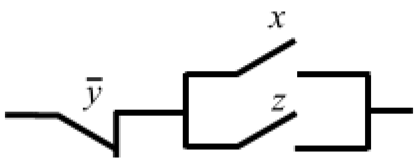
б)



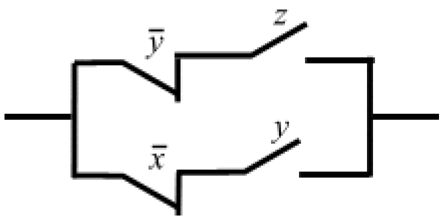
в)

г)

д)

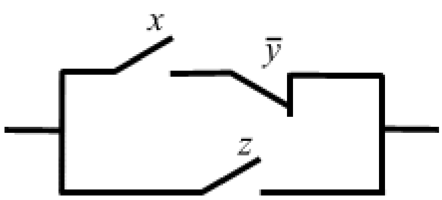


е)



46. а)

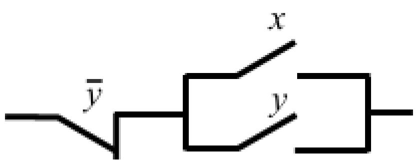
б)



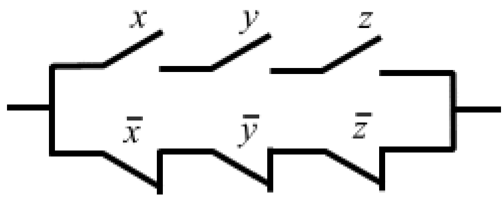
в)

г)

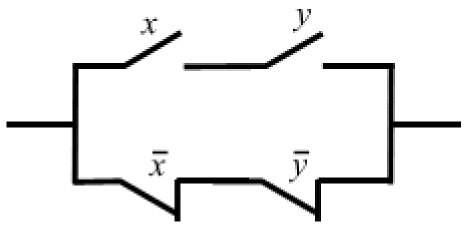
д)



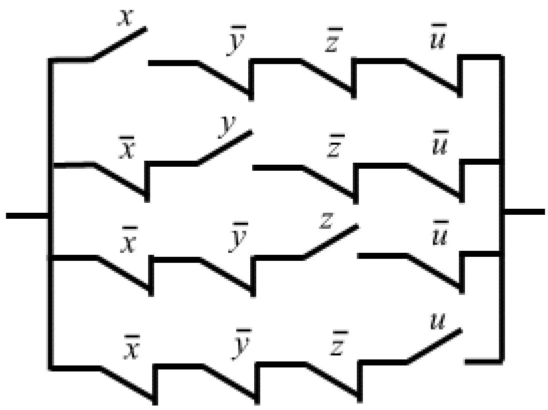
e)



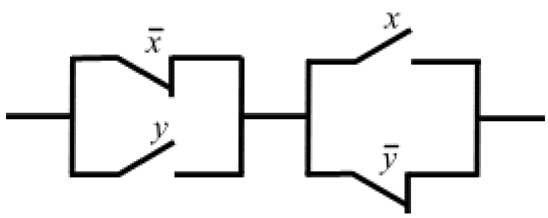
47.



48.

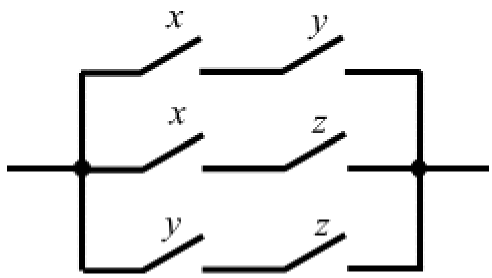


49.

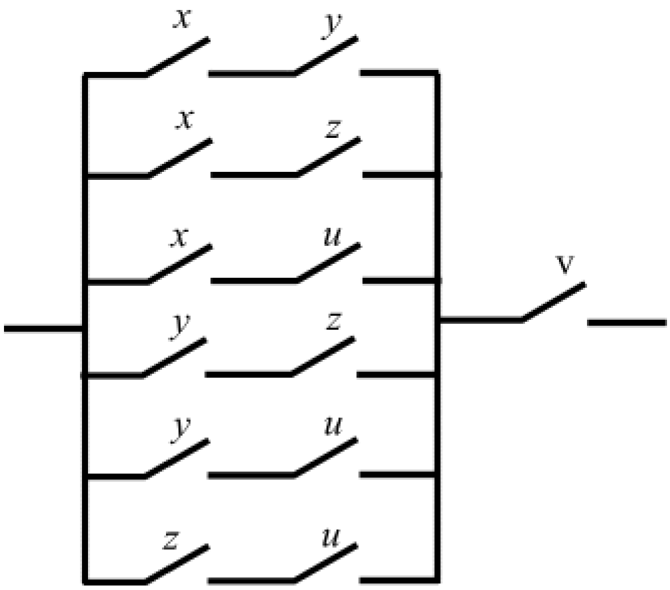


x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	$\bar{y} \vee x$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

50.

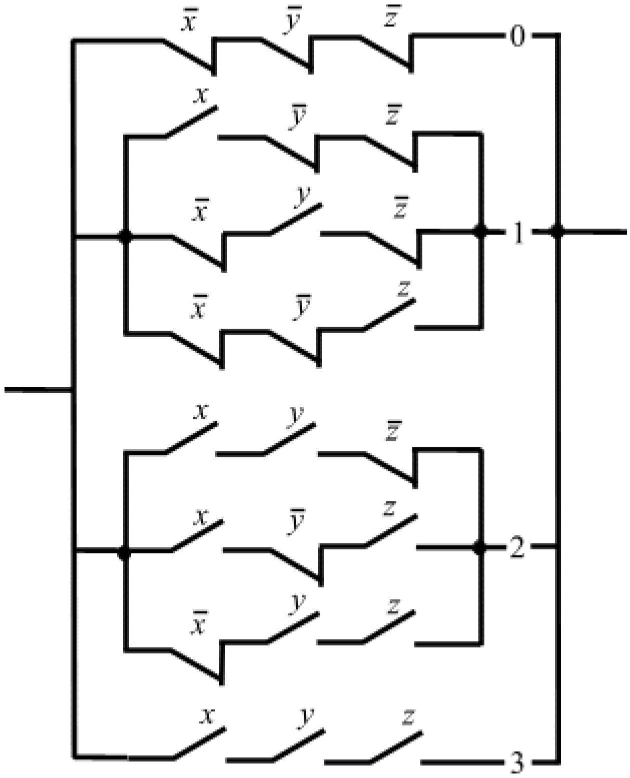


51.



где v – кнопка председателя.

52. Взять четыре лампочки:
0 – нет правильных ответов;
1 – один правильный ответ;
2 – два правильных ответа;
3 – три правильных ответа.



Литература

1. Стол Роберт, Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Стол Роббер. − Москва: Просвещение, 1968. − 230 с.

2. Лихтарников, Л. М. Математическая логика: учебное пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. − Санкт-Петербург: Лань, 2009 − 276 с.

3. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика: учебное пособие / Ю.П. Шевелев. − Санкт-Петербург: Лань, 2008. − 592 с.

4. Шаповалова, Л.Н. Дискретная математика. Элементы теории множеств: учебное пособие / Л.Н. Шаповалова, В.В. Серегина. − Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВПО ДГАУ, 2014. − 43 с.

5. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств / А.В. Гохман, М.А. Спивак, В.В. Розен, В.Н. Салий, Г.И. Житомирский, А.Г. Рыжков, О.В. Шимельфениг. − Издательство Саратовского университета, 1969. − 90 с.

6. Гольдгоф, Б.Г. Электрооборудование промышленных предприятий и установок. Ч.1: Общее электрооборудование / Б.Г. Гольдгоф, Б.А. Соколов, Д.В. Соколов. − Москва, 1965. − 323 с.

Шаповалова Лариса Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент

Серегина Виктория Викторовна
кандидат социологических наук, доцент

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Редактор Лучинкина Н.П.

Верстка Кудрявцева Г.С.

Дизайн обложки Вдовикина С.П.

Подписано в печать 28.10.2015 г.
Формат 60×84/16. Усл. п. л. 4,0. Тираж 30 экз. Заказ № 362.

РИО Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВО Донской ГАУ

347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15.