МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ- ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г.ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Н.М. Удинцова, Н.А. Коптева

Временные ряды

Учебное пособие

Зерноград-2017

Об издании – 1, 2
Содержание

УДК 33

Издается по решению методической комиссии
по направлению подготовки 38.03.01 *«Экономика»*
Азово-Черноморского инженерного института-филиала
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный аграрный университет»
в г. Зернограде

Рецензенты:

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и механика» ***Середина М.Н.***
канд. сельскохозяйственных наук, доцент кафедры «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» ***Бурейко И.Г.***

Удинцова, Н.М. Временные ряды [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.М. Удинцова, Н.А. Коптева. – Электрон. дан. - Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2017. – 84с. Режим доступа: Локальная сеть Библиотеки Азово-Черноморского инженерного института ФГБОУ ВО Донской ГАУ.

Учебное пособие составлено в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 – «Экономика».

Учебное пособие содержит курс лекций и примеры по теме: временные ряды, а так же контрольные вопросы по изучаемым разделам и задания для самостоятельного выполнения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 – «Экономика».

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры высшей математики и механики.

Протокол № 2 от 23.10.2017 г.

Рассмотрено и одобрено методической комиссией по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» и специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность».

Протокол № 2 от 24.10.2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Материал, изложенный в учебном пособии, соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования дисциплины «Эконометрика», изучаемой студентами, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 – «Экономика».

Учебное пособие представляет собой курс лекций и содержит теоретические сведения и примеры решения задач по теме: временные ряды в эконометрических исследованиях, а так же контрольные вопросы по изучаемым разделам, помогающие усвоить и закрепить изучаемый материал и задания для самостоятельного выполнения.

Данное учебное пособие может быть полезно как преподавателям при проведении занятий со студентами заочного обучения по указанному направлению, так и студентам для самостоятельного изучения соответствующего материала и является базой для подготовки к зачету.

Пособие способствует формированию у студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 – «Экономика»:

− знаний основных эконометрических методов, способов и средств обработки экономических данных (ОПК-3); стандартных эконометрических моделей: парной регрессии и корреляции; множественной регрессии и корреляции; временных рядов (ПК-4); основных эконометрических методов и моделей (ПК-6);

− умений выбирать средства обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчётов и обосновывать полученные выводы (ОПК-3); на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-4); использовать основные эконометрические методы и модели для анализа социально-экономических показателей (ПК-6);

− владений навыками выбора средств обработки экономических данных, анализа результатов расчётов (ОПК-3); навыками использования стандартных теоретических и эконометрических моделей, анализа и интерпретирования полученных результатов (ПК-4); навыками применения основные эконометрические методов и моделей для анализа социально-экономических показателей (ПК-6).

Изучение эконометрики позволит студенту приобрести необходимые навыки, требуемые при его дальнейшем обучении; развить способность к общению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения, а также способность самостоятельно выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы.

Всё это понадобится для успешной работы и ориентации в будущей профессиональной деятельности.

1. Ряды динамики

Необходимость статистического анализа случайных процессов возникла в XIX веке: анализ метеорологических, экономических рядов, исследование циклических процессов (колебание цен, солнечных пятен). В настоящее время круг задач связанных со статистическим анализом случайных процессов, чрезвычайно широк. Например: статистический анализ шумов, вибраций, турбулентных явлений, морского волнения, кардиограмм, энцефалограмм и т.д. Теоретичекие аспекты проблемы выделения сигнала на фоне шума в значительной степени являются статистическими задачами теории случайных процессов.

Временной ряд – первоначально в статистической литературе *ряд наблюдений в различные моменты времени.* Например: экономические временные ряды, метеорологические, демографические и пр.

В советской экономической литературе наряду с термином временные ряды употребляется термин **ряды динамики, хронологические ряды.**

С середины 20-х годов XX века временной ряд часто означает наблюдённую реализацию анализируемого случайного процесса.

Пусть наблюдается отрезок x(t), $0 \le t \le T$, случайного процесса x(t), причём параметр t пробегает либо весь отрезок [0, T], либо целые числа этого отрезка. Обычно в статистической задаче о распределении p^T случайного процесса $\{x(t), 0 \le t \le T\}$ известно лишь, что оно принадлежит некоторому семейству $\{ p^T \}$ распределений. Это семейство всегда можно записать в параметрической форме.

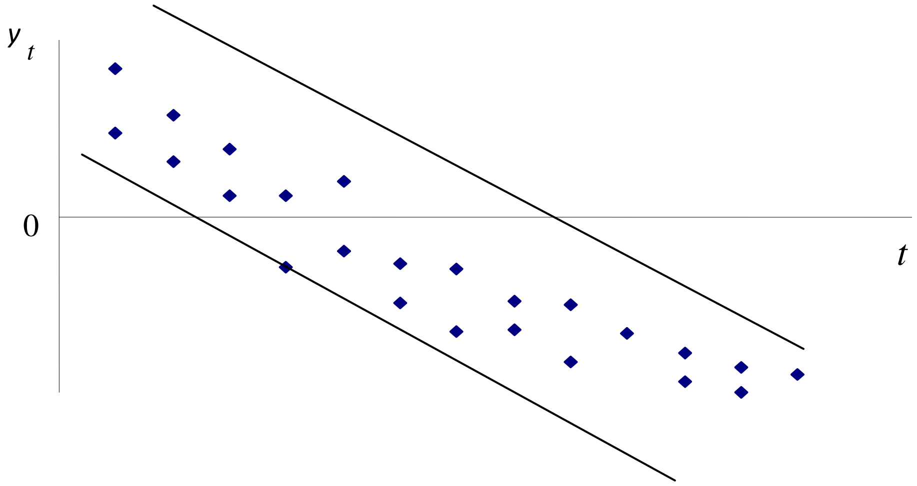
Для моделирования динамических процессов можно использовать два типа исходных данных:

- данные, характеризующие совокупность *различных объектов в определённый момент* (период) времени. Это **пространственные модели.**
- данные, характеризующие *один объект за ряд последовательных моментов* (периодов) времени. Это **модели временных рядов.**

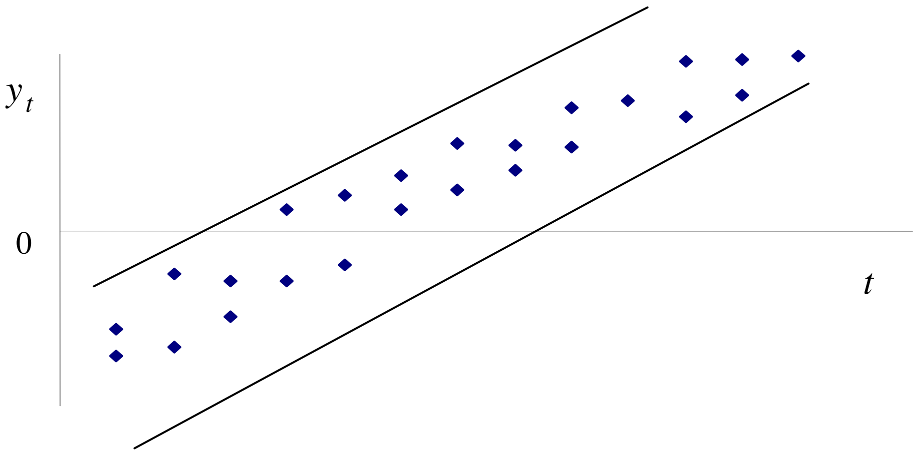
Определение. ***Временной ряд*** – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы:

- факторы, формирующие тенденцию ряда;
- факторы, формирующие циклические колебания ряда;
- случайные факторы.

При различных сочетаниях этих факторов зависимость уровней ряда может принимать разные формы.



а) убывающая тенденция



б) возрастающая тенденция

Рисунок 1. Основные компоненты временного ряда

Во-первых, большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию, характеризующую совокупное долговременное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя.

По всей видимости, эти факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Однако в совокупности они формируют его возрастающую или убывающую тенденцию (рис.1).

Во-вторых, изучаемый показатель может быть подвержен циклическим колебаниям. Эти колебания могут носить сезонный характер, поскольку деятельность ряда зависит от времени года.

Пример 1. Потребление газа возрастает в зимний период года по сравнению с летним периодом.

Пример 2. Интенсивность полевых работ резко сокращается в зимний период года.

Пример 3. Потребление газа возрастает в зимний период времени.

При наличии больших массивов данных за длительный промежуток времени можно выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой исследуемого процесса (рис.2).

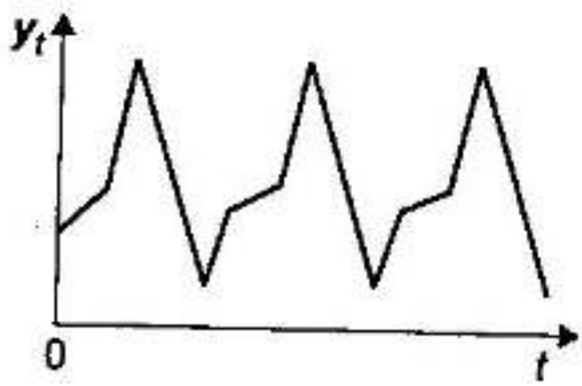


Рисунок 2. Ряд, содержащий только сезонную составляющую

Некоторые временные ряды не содержат тенденции и циклическую компоненту. Каждый следующий их уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты (рис.3).

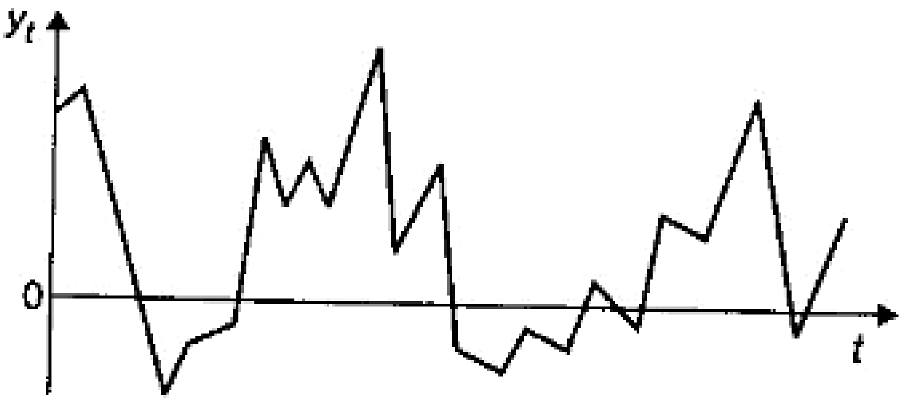


Рисунок 3. Ряд, содержащий только случайную компоненту

Замечание. Чаще всего ряды содержат все три компоненты с разной долей влияния.

Определение. Модель, в которой временной ряд представлен как *сумма* перечисленных компонент, называется *аддитивной моделью* временного ряда.

Определение. Модель, в которой временной ряд представлен как *произведение* перечисленных компонент, называется *мультипликативной моделью* временного ряда.

Вывод. Основная задача исследования отдельного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из компонент, с тем чтобы использовать полученную информацию *для прогнозирования будущих значений ряда или построении моделей взаимосвязи двух и более временных рядов.*

Контрольные вопросы

1. Как описывается случайный процесс?
2. Определение временного ряда.
3. Что описывает пространственная модель временного ряда?
4. Факторы, формирующие временной ряд.
5. Определения аддитивной и мультипликативной моделей временных рядов.
6. Для чего необходимы модели рядов динамики?

2. Моделирование временных рядов

Одним из наиболее распространённых способов моделирования тенденций временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени или тренда.

Определение. Построение аналитической функции, характеризующей зависимость ряда от времени, или тренда называется *аналитическим выравниванием временного ряда*.

Поскольку зависимость от времени может принимать разные формы, для её формализации можно использовать различные виды функций. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

- линейный тренд;
- гиперболический тренд;
- экспоненциальный тренд;
- тренд в форме степенной функции;
- парабола второго и более высоких порядков.

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить методом наименьших квадратов, используя в качестве переменной фактические уровни временного ряда y_t.

Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру их линеаризации.

Известно несколько способов определения типа тенденции, к наиболее распространённым относится качественный анализ изучаемого процесса, построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени, расчёт некоторых основных показателей динамики.

В этих же целях можно использовать и коэффициенты автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путём сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда.

Если временной ряд имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни y_t и y_{t-1} тесно коррелируют. В этом случае коэффициент автокорреляции первого порядка уровней исходного ряда должен быть высоким.

Если временной ряд содержит нелинейную тенденцию, например, в форме экспоненты, то коэффициент автокорреляции первого порядка по логарифмам уровней исходного ряда будет выше, чем соответствующий коэффициент, рассчитанный по уровням ряда. Чем сильнее выражена нелинейная тенденция в изучаемом временном ряде, тем в большей степени будет различаться значения указанных коэффициентов.

Выбор наилучшего уравнения в случае, если ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путём переноса основных форм тренда, расчёта по каждому уровню скорректированного коэффициента детерминации и выбора уравнения тренда с максимальным значением скорректированного коэффициента детерминации. Реализация этого метода относительно проста при компьютерной обработке данных.

Пример 4. Имеются данные о потреблении электроэнергии жителями региона за 15 кварталов (Таблица 1).

Таблица 1 - Потреблении электроэнергии жителями региона, млн кВт·ч

t	y_t
1	6,0
2	4,4
3	5,0
4	9,0
5	7,2
6	4,8
7	6,0
8	10,0
9	8,0
10	5,6
11	6,4
12	11,0
13	9,0
14	6,6
15	7,0

Получить модель временного ряда потребления электроэнергии, используя линейный тренд. Построить график полученной зависимости.

Решение. Модель временного ряда потребления электроэнергии будем искать в виде

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t. \tag{1}$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 линейной регрессии применим метод наименьших квадратов, который сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_{t\,i} \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i y_{t\,i} \end{cases}. \tag{2}$$

Для решения указанной системы (2) используем формулы Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}, \tag{3}$$

где Δ - определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

Δa_0 и Δa_1 - определители, получаемые из Δ заменой 1-го и 2-го столбца соответственно на столбец свободных членов (правых частей уравнений системы):

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_{t\,i} & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i y_{t\,i} & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_{t\,i} \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i y_{t\,i} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Для определения коэффициентов линейной регрессии необходимо рассчитать таблицу следующего вида (Таблица 2):

Таблица 2 - Данные для определения коэффициентов линейного тренда временного ряда

№	***t***	y_t	t^2	$t \cdot y_t$	$\hat{y}_t$
1	1	6	1	6	
2	2	4,4	4	8,8	
3	3	5	9	15	
4	4	9	16	36	
5	5	7,2	25	36	
6	6	4,8	36	28,8	
7	7	6	49	42	
8	8	10	64	80	
9	9	8	81	72	
10	10	5,6	100	56	
11	11	6,4	121	70,4	
12	12	11	144	132	
13	13	9	169	117	
14	14	6,6	196	92,4	
15	15	7	225	105	
Σ	120	106	1240	897,4	

Последнюю колонку таблицы заполним после того, как получим уравнение линейной регрессии.

Вычислим определители (4) - (6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 120 \\ 120 & 1240 \end{vmatrix} = 4200;$$

1.

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_{t\,i} & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i\, y_{t\,i} & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 106 & 120 \\ 897,4 & 1240 \end{vmatrix} = 23752;$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} y_{t\,i} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i\, y_{t\,i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 106 \\ 120 & 897{,}4 \end{vmatrix} = 741.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты линейного тренда временного ряда по формулам (3)

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{23752}{4200} = 5{,}655;$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{741}{4200} = 0{,}176.$$

Полученные значения a_0 и a_1, подставим в уравнение (1), тогда линейный тренд временного ряда будет иметь вид

$$\hat{y}_t = 5{,}655 + 0{,}176 \cdot t\,.$$

Чтобы построить график найденной зависимости, заполним последнюю колонку таблицы 2, получим таблицу 3

Таблица 3 – Вычисление значений $\hat{y}_t$

№	***t***	$\boldsymbol{y_t}$	$\boldsymbol{t^2}$	$\boldsymbol{t \cdot y_t}$	$\hat{y}_t$
1	1	6	1	6	5,832
2	2	4,4	4	8,8	6,008
3	3	5	9	15	6,185
4	4	9	16	36	6,361
5	5	7,2	25	36	6,537
6	6	4,8	36	28,8	6,714
7	7	6	49	42	6,890
8	8	10	64	80	7,067
9	9	8	81	72	7,243
10	10	5,6	100	56	7,420
11	11	6,4	121	70,4	7,596
12	12	11	144	132	7,772
13	13	9	169	117	7,949
14	14	6,6	196	92,4	8,125
15	15	7	225	105	8,302
$\boldsymbol{\Sigma}$	120	106	1240	897,4	106

Построим график линейного тренда полученного временного ряда (рис.4).

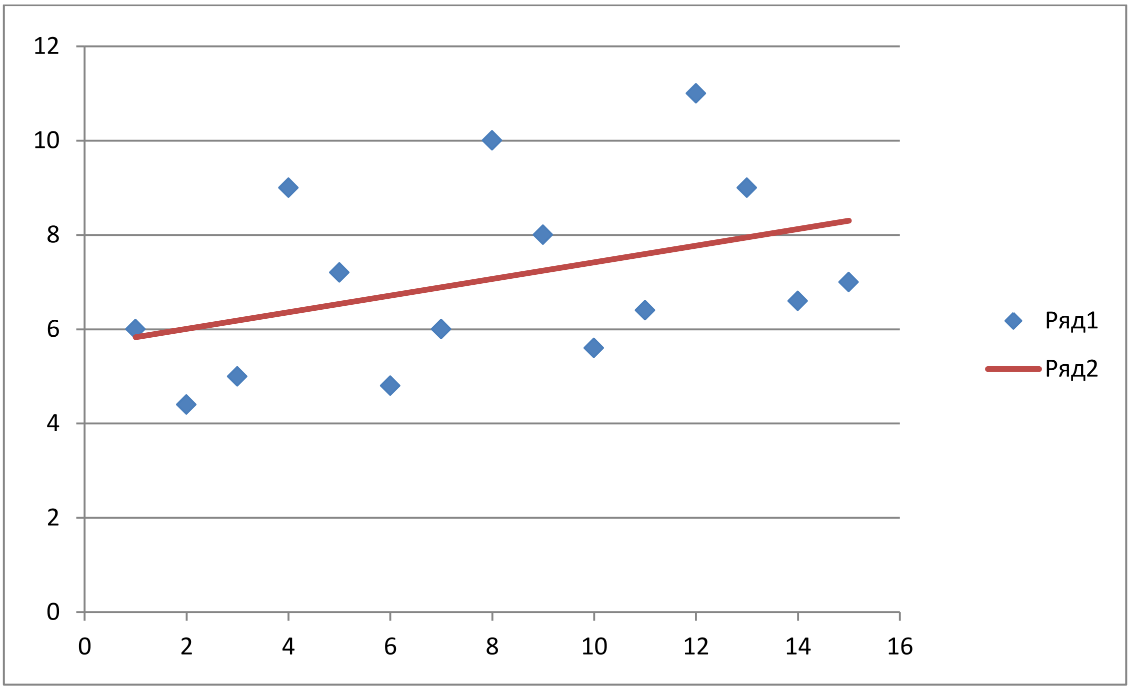


Рисунок 4. Динамика потребления электроэнергии жителями региона

На рисунке 4 - Ряд 1 – фактические уровни ряда; Ряд 2 – уровни ряда, рассчитанные по линейному тренду.

Линейный тренд характеризует возрастающую тенденцию потребления электроэнергии жителями региона.

Контрольные вопросы

1. Что означает выравнивание ряда динамики?
2. Какие функции используются для описания динамических процессов?

3. Моделирование сезонных колебаний

Известно несколько подходов к анализу структуры временных рядов, содержащих сезонные или циклические колебания.

Простейший подход – расчёт значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда.

Определение. Общий вид *аддитивной* модели:

$$Y = T + S + E.$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как *сумма* трендовой T, сезонной S и случайной E компоненты.

Определение. Общий вид *мультипликативной* модели следующий:

$$Y = T \cdot S \cdot E.$$

Данная модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как *произведение* трендовой T, сезонной S и случайной E компоненты.

Выбор одной из двух моделей проводится на основе анализа структуры сезонных колебаний.

Если амплитуда сезонных колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов.

Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводятся к расчету значений T, S и E для каждого уровня ряда.

4. Алгоритм моделирования сезонных и циклических колебаний

Моделирование циклических колебаний в целом осуществляется аналогично моделированию сезонных колебаний.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчёту значений T, S, E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги:

Шаг 1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.

Шаг 2. Расчёт значений сезонной (циклической) компоненты S.

Шаг 3. Устранение сезонной (циклической) компоненты из исходных уравнений ряда и получение выровненных данных (T + E) в аддитивной или (T·E) в мультипликативной модели.

Шаг 4. Аналитическое выравнивание уровней (T + E) или (T·E) и расчёт значений T с использованием полученного уравнения тренда.

Шаг 5. Расчёт полученных по модели значений (T + E) или (T·E).

Шаг 6. Расчёт абсолютных и (или) относительных ошибок.

Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок E для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Пример 5. Пусть имеются данные о потреблении электроэнергии жителями региона за последние четыре года, то есть за 16 кварталов (Таблица 4).

Таблица 4 - Потреблении электроэнергии жителями региона за четыре года, млн кВт·ч

t	y_t
1	6,0
2	4,4
3	5,0
4	9,0
5	7,2
6	4,8
7	6,0
8	10,0
9	8,0
10	5,6
11	6,4
12	11,0
13	9,0
14	6,6
15	7,0
16	10,8

Построить модель временного ряда потребления электроэнергии с учетом сезонной компоненты.

Решение. Чтобы определить, какую из моделей строить (аддитивную или мультипликативную), нанесем значения y_t на график (рис.5).

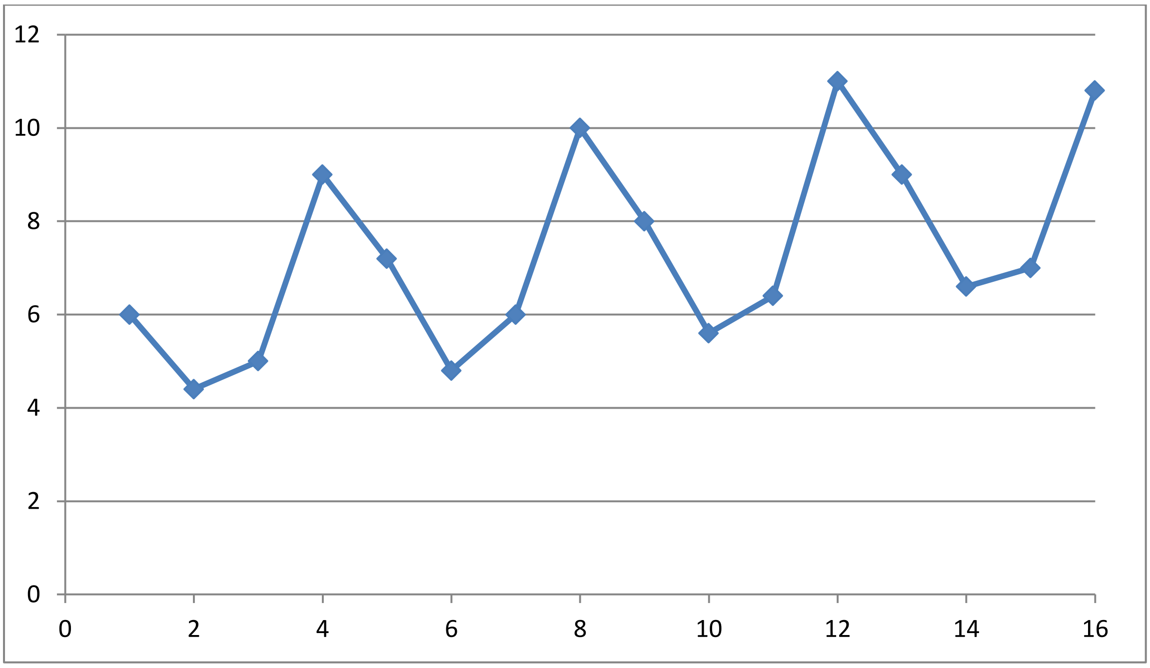


Рисунок 5. Потребления электроэнергии жителями региона за 16 кварталов

Из рисунка 5 видно, что данный временной ряд содержит сезонные колебания. Объемы потребления электроэнергии в осенне-зимний период времени (1 и 4 кварталы) выше, чем весной и летом (2 и 3 кварталы).

При этом по графику можно установить наличие приблизительно равной амплитуды колебаний.

Это свидетельствует о соответствии этого ряда *аддитивной* модели.

В соответствии с приведенным в пункте 4 (стр.16-17) алгоритмом, рассчитаем компоненты аддитивной модели.

Шаг 1. Выравнивание исходного ряда проведем методом скользящей средней. Для этого:

1) Последовательно просуммируем уровни ряда за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени и определим условные годовые объемы потребления электроэнергии (Таблица 5, колонка 3);
2) Разделим полученные суммы на 4, найдем скользящие средние (Таблица 5, колонка 4). Полученные таким образом выравненные значения уже не содержат сезонной компоненты;
3) Приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для этого найдем средние значения из двух последовательных скользящих средних – центрированные скользящие средние (Таблица 5, колонка 5).

Таблица 5 – Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели

Номер квартала t	*Потребление электро-энергии y_t*	*Итого за четыре квартала*	*Скользящая средняя за четыре квартала*	*Центриро-ванная скользящая средняя*	*Оценка сезонной компоненты*
1	6	-	-	-	-
2	4,4	24,4	6,1	-	-
3	5	25,6	6,4	6,25	-1,25
4	9	26	6,5	6,45	2,55
5	7,2	27	6,75	6,625	0,575
6	4,8	28	7	6,875	-2,075
7	6	28,8	7,2	7,1	-1,1
8	10	29,6	7,4	7,3	2,7
9	8	30	7,5	7,45	0,55
10	5,6	31	7,75	7,625	-2,025
11	6,4	32	8	7,875	-1,475
12	11	33	8,25	8,125	2,875
13	9	33,6	8,4	8,325	0,675
14	6,6	33,4	8,35	8,375	-1,775
15	7	-	-	-	-
16	10,8	-	-	-	-

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними (Таблица 5, колонка 6).

Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S (Таблица 6). Для этого найдем средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты Si.

Таблица 6 – Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

Показатель	***Год***	***Номер квартала, i***			
		I	II	III	IV
	1	-	-	-1,25	2,55
	2	0,575	-2,075	-1,1	2,7
	3	0,55	-2,025	-1,475	2,875
	4	0,675	-1,775	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)		1,800	-5,875	-3,825	8,125
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, $\overline{S_i}$		0,600	-1,958	-1,275	2,708
Скорректированная сезонная компонента, S_i		0,581	-1,977	-1,294	2,690

В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются.

В аддитивной модели это выражается тем, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю.

Для данной модели имеем:

$$\sum_{i=1}^{4} \overline{S_i} = 0{,}600 - 1{,}958 - 1{,}275 + 2{,}708 = 0{,}075.$$

Найдем корректирующий коэффициент:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{S_i}}{n} = \frac{0{,}075}{4} = 0{,}01875. \qquad (7)$$

Рассчитаем скорректированные значения сезонной компоненты как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом *k*

$$S_i = \overline{S_i} - k, \qquad (8)$$

где i=1, 2, 3, 4 (Таблица 6, последняя строка).

Проверим выполнение равенства нулю суммы значений сезонной компоненты:

$$\sum_{i=1}^{4} S_i = 0{,}581 - 1{,}977 - 1{,}294 + 2{,}690 = 0$$

Таким образом нами найдены следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 0{,}581$;

II квартал: $S_2 = -1{,}977$;

III квартал: $S_3 = -1{,}294$;

IV квартал: $S_4 = 2{,}690$.

Занесем полученные значения сезонной компоненты S_i в таблицу для соответствующих кварталов каждого года (Таблица 7, колонка 3).

Шаг 3. Устраним значение сезонной компоненты, вычитая ее значение из каждого уровня исходного временного ряда.

Получим (Таблица 7, колонка 4)

$$T + E = y_t - S_i .$$

Эти значения рассчитываются для каждого момента времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 7 – Расчет выравненных значений *T* и ошибок *E* в аддитивной модели

t	y_t	S_i	$T+E=$ $=y_t-S_i$	T	$T+S$	$E=y_t-$ $-(T+S)$	E^2
1	6	0,581	5,419				
2	4,4	-1,977	6,377				
3	5	-1,294	6,294				
4	9	2,690	6,310				
5	7,2	0,581	6,619				
6	4,8	-1,977	6,777				
7	6	-1,294	7,294				
8	10	2,690	7,310				
9	8	0,581	7,419				
10	5,6	-1,977	7,577				
11	6,4	-1,294	7,694				
12	11	2,690	8,310				
13	9	0,581	8,419				
14	6,6	-1,977	8,577				
15	7	-1,294	8,294				
16	10,8	2,690	8,110				

Шаг 4. Вычислим компоненту *T* данной модели. Для этого проведем аналитическое выравнивание ряда (T + E) с использованием линейного тренда

$$T = a_0 + a_1 \cdot t\,. \tag{9}$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 применим метод наименьших квадратов, который сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (T+E)_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T+E)_i \end{cases}. \tag{10}$$

Для решения указанной системы (10) используем формулы Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta}, \; a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}, \tag{11}$$

где Δ - определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

Δa_0 и Δa_1 - определители, получаемые из Δ заменой 1-го и 2-го столбца соответственно на столбец свободных членов (правых частей уравнений системы):

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} (T+E)_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T+E)_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} (T+E)_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T+E)_i \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Для определения коэффициентов линейной регрессии необходимо рассчитать таблицу следующего вида (Таблица 8):

Таблица 8 - Данные для определения коэффициентов линейного тренда временного ряда

№	***t***	***T+E***	***t^2***	***t · (T+E)***	***T***
1	1	5,419	1	5,419	
2	2	6,377	4	12,754	
3	3	6,294	9	18,881	
4	4	6,310	16	25,242	
5	5	6,619	25	33,094	
6	6	6,777	36	40,663	
7	7	7,294	49	51,056	
8	8	7,310	64	58,483	
9	9	7,419	81	66,769	
10	10	7,577	100	75,771	
11	11	7,694	121	84,631	
12	12	8,310	144	99,725	
13	13	8,419	169	109,444	
14	14	8,577	196	120,079	
15	15	8,294	225	124,406	
16	16	8,110	256	129,767	
Σ	136	116,800	1496	1056,183	

Последнюю колонку таблицы заполним после того, как получим уравнение линейной регрессии.

Вычислим определители (12) - (14):

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 136 \\ 136 & 1496 \end{vmatrix} = 5440;$$

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} (T+E)_i & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i (T+E)_i & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 116,800 & 136 \\ 1056,183 & 1496 \end{vmatrix} = 31091,867;$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} (T+E)_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i (T+E)_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 116,800 \\ 136 & 1056,183 \end{vmatrix} = 1014,133.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты линейного тренда временного ряда по формулам (11)

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{31091,867}{5440} = 5,715;$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{1014,133}{5440} = 0,186.$$

Полученные значения a_0 и a_1, подставим в уравнение (9), тогда линейный тренд временного ряда будет иметь вид

$$T = 5,715 + 0,186 \cdot t. \qquad (15)$$

Подставляя в уравнение (15) значения t = 1,…16, найдем уровни T для каждого момента времени (Таблица 9, 6 колонка).

Таблица 9- Вычисление значений *T*

№	***t***	***T+E***	***t²***	***t · (T+E)***	***T***
1	1	5,419	1	5,419	5,902
2	2	6,377	4	12,754	6,088
3	3	6,294	9	18,881	6,275
4	4	6,310	16	25,242	6,461
5	5	6,619	25	33,094	6,648
6	6	6,777	36	40,663	6,834
7	7	7,294	49	51,056	7,020
8	8	7,310	64	58,483	7,207
9	9	7,419	81	66,769	7,393
10	10	7,577	100	75,771	7,580
11	11	7,694	121	84,631	7,766
12	12	8,310	144	99,725	7,952
13	13	8,419	169	109,444	8,139
14	14	8,577	196	120,079	8,325
15	15	8,294	225	124,406	8,512
16	16	8,110	256	129,767	8,698
Σ	136	116,800	1496	1056,183	116,800

Вернемся к Таблице 7 и заполним ее 5 колонку полученными значениями *T* (Таблица 10)

Таблица 10 – Продолжение расчета выравненных значений *T* и ошибок *E* в аддитивной модели

t	y_t	S_i	$T + E = y_t - S_i$	*T*	*T+S*	$E = y_t - (T + S)$	E^2
1	6	0,581	5,419	5,902	6,483	-0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,377	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004
4	9	2,690	6,310	6,461	9,151	-0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	-0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	-0,057	0,0032
7	6	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10	2,690	7,310	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,580	5,603	-0,003	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	7,766	6,472	-0,072	0,0052
12	11	2,690	8,310	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9	0,581	8,419	8,139	8,720	0,280	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7	-1,294	8,294	8,512	7,218	-0,218	0,0475
16	10,8	2,690	8,110	8,698	11,388	-0,588	0,3457

Шаг 5. Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавим к уровням T значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов $(T+S)$ – Таблица 9, колонка 6.

На рисунке 6 приведены графики фактических значений y_t, тренда T и значений $(T+S)$:

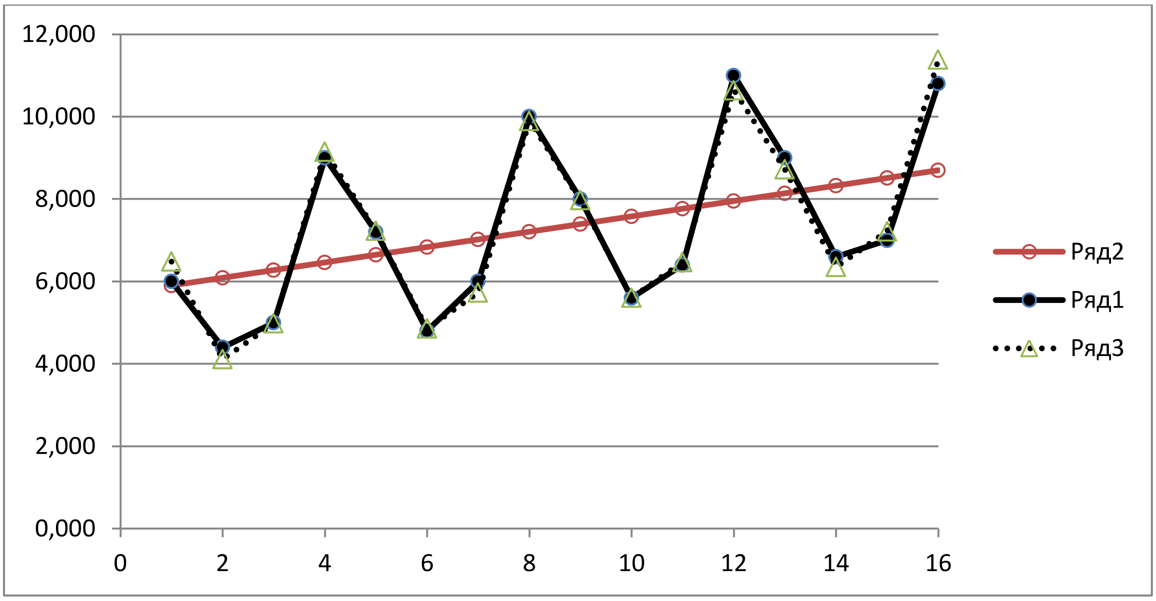


Рисунок 6. Потребление электроэнергии жителями региона

Здесь Ряд 1 - график фактических значений y_t, Ряд 2 – график тренда T, Ряд 3 – график значений $(T+S)$.

Шаг 6. Расчёт ошибки в аддитивной модели проводится по формуле

$$E = y_t - (T + S). \tag{16}$$

Это абсолютная ошибка. Значения абсолютных ошибок рассчитаны в Таблице 10, колонка 7.

Для оценки качества построенной модели можно использовать так же сумму квадратов абсолютных ошибок (Таблица 10, колонка 8).

Рассмотрим теперь методику построения *мультипликативной* модели временного ряда на следующем примере.

Пример 6. Пусть имеются данные о прибыли компании за последние четыре года по кварталам (Таблица 11).

Таблица 11 – Прибыль компании за четыре года, тыс. долл.

Номер квартала, t	***Прибыль компании, y_t***
1	72
2	100
3	90
4	64
5	70
6	92
7	80
8	58
9	62
10	80
11	68
12	48
13	52
14	60
15	50
16	30

Построить модель временного ряда прибыли компании с учетом сезонной компоненты.

Решение. Нанесем значения y_t на график (рис.7).

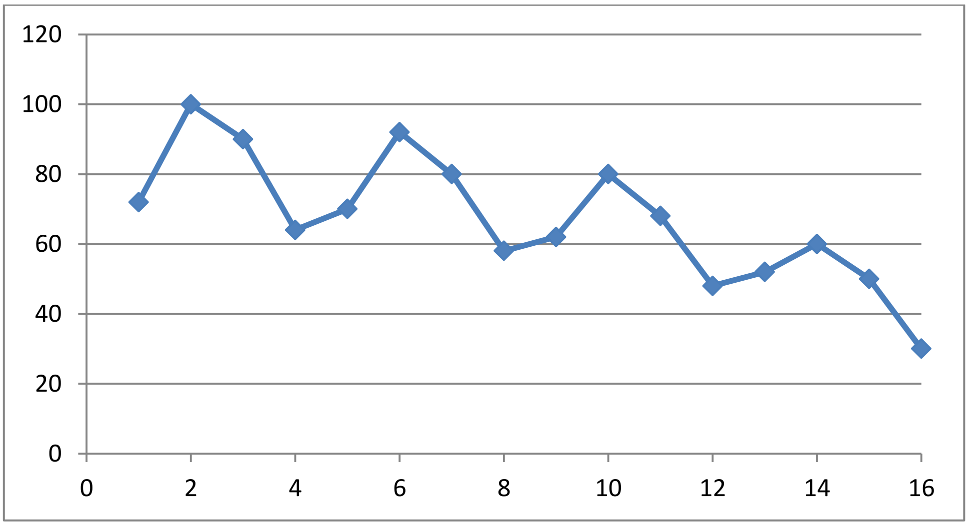


Рисунок 7. Прибыль компании за четыре года (16 кварталов)

Из рисунка 7 видно, что данный временной ряд содержит сезонные колебания (период колебаний равен четырем).

Так же график свидетельствует об общей убывающей тенденции уровней ряда.

Прибыль компании в весенне-летний период времени (2 и 3 кварталы) выше, чем в осенне-зимний период (1 и 4 кварталы).

Поскольку амплитуда сезонных колебаний уменьшается, можно предположить наличие мультипликативной модели. Определим ее компоненты.

Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней методом скользящей средней. Методика, применяемая на этом шаге, полностью совпадает с методикой аддитивной модели (см. пример 4).

Результаты расчётов оценок сезонной компоненты представлены в таблице 12.

Приведем последовательность заполнения таблицы 12:

1) Последовательно просуммируем уровни ряда за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени и определим условные годовые объемы прибыли (Таблица 12, колонка 3);
2) Разделим полученные суммы на 4, найдем скользящие средние (Таблица 12, колонка 4). Полученные таким образом выравненные значения уже не содержат сезонной компоненты;
3) Приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для этого найдем средние значения из двух последовательных скользящих средних – центрированные скользящие средние (Таблица 12, колонка 5).

Шаг 2. Найдём оценки сезонной компоненты как частное от деления фактических уровней ряда на центрированные скользящие средние (Таблица 12, колонка 6).

Таблица 12 – Расчет оценок сезонной компоненты в мультипликативной модели

Номер квартала t	***Прибыль компании y_t***	***Итого за четыре квартала***	***Скользящая средняя за четыре квартала***	***Центрированная скользящая средняя***	***Оценка сезонной компоненты***
1	72	-	-	-	-
2	100	326	81,5	-	-
3	90	324	81	81,25	1,108
4	64	316	79	80	0,800
5	70	306	76,5	77,75	0,900
6	92	300	75	75,75	1,215
7	80	292	73	74	1,081
8	58	280	70	71,5	0,811
9	62	268	67	68,5	0,905
10	80	258	64,5	65,75	1,217
11	68	248	62	63,25	1,075
12	48	228	57	59,5	0,807
13	52	210	52,5	54,75	0,950
14	60	192	48	50,25	1,194
15	50	-	-	-	-
16	30	-	-	-	-

Используем эти оценки для расчёта значений сезонной компоненты S (Таблица 13). Для этого найдём средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты Si.

Взаимопогашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле, то есть четырём, так как в нашем случае число периодов одного цикла (год) равна четырём кварталам.

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{4} \overline{S_i} = 0{,}918 + 1{,}208 + 1{,}088 + 0{,}806 = 4{,}021$$

Таблица 13 – Расчет значений сезонной компоненты в мультипликативной модели

Показатель	*Год*	*Номер квартала, i*			
		I	II	III	IV
	1			1,108	0,800
	2	0,900	1,215	1,081	0,811
	3	0,905	1,217	1,075	0,807
	4	0,950	1,194		
Итого за i-й квартал (за все годы)		2,755	3,625	3,264	2,418
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, $\overline{S_i}$		0,918	1,208	1,088	0,806
Скорректированная сезонная компонента, S_i		0,914	1,202	1,082	0,802

Рассчитаем корректирующий коэффициент:

$$k = \frac{n}{\sum_{i=1}^{4} \overline{S_i}} = \frac{4}{4{,}021} = 0{,}9948.$$

Определим скорректированные значения сезонной компоненты, умножив её средние значения на корректирующий коэффициент k:

$$S_i = \overline{S_i} \cdot k, \qquad (17)$$

где i=1, 2, 3, 4 (Таблица 13, последняя строка).

Проверим выполнение равенства четырем суммы значений сезонной компоненты:

$$\sum_{i=1}^{4} S_i = 0{,}914 + 1{,}202 + 1{,}082 + 0{,}802 = 4 \quad .$$

Таким образом, нами найдены следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 0{,}914$;

II квартал: $S_2 = 1{,}202$;

III квартал: $S_3 = 1{,}082$;

IV квартал: $S_4 = 0{,}802$.

Занесём полученные значения в таблицу 14 для соответствующих кварталов каждого года (Таблица 14, колонка 3).

Шаг 3 . Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты.

Получим: T·E=Y/S (Таблица 14, колонка 4), которые содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 14 – Расчет выравненных значений *T* и ошибок *E* в мультипликативной модели

t	y_t	S_i	$T \cdot E =$ $= y_t / S_i$	T	$T{\cdot}S$	$E = y_t /$ $/(T \cdot S)$	$E' = y_t -$ $-(T \cdot S)$	$(E')^2$
1	72	0,914	78,804					
2	100	1,202	83,182					
3	90	1,082	83,153					
4	64	0,802	79,819					
5	70	0,914	76,615					
6	92	1,202	76,527					
7	80	1,082	73,914					
8	58	0,802	72,336					
9	62	0,914	67,859					
10	80	1,202	66,545					
11	68	1,082	62,827					
12	48	0,802	59,865					
13	52	0,914	56,914					
14	60	1,202	49,909					
15	50	1,082	46,196					
16	30	0,802	37,415					

Шаг 4. Определим компоненту T в мультипликативной модели. Для этого, используя уровни $(T{\cdot}E)$, рассчитаем параметры линейного тренда

$$T = a_0 + a_1 \cdot t\,. \tag{18}$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 применим метод наименьших квадратов, который сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (T \cdot E)_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T \cdot E)_i \end{cases}. \tag{19}$$

Для решения указанной системы (19) используем формулы Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}, \tag{20}$$

где Δ - определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

Δa_0 и Δa_1 - определители, получаемые из Δ заменой 1-го и 2-го столбца соответственно на столбец свободных членов (правых частей уравнений системы):

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} (T \cdot E)_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T \cdot E)_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} (T \cdot E)_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T \cdot E)_i \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Для определения коэффициентов линейной регрессии необходимо рассчитать таблицу следующего вида (Таблица 15):

Таблица 15 - Данные для определения коэффициентов линейного тренда временного ряда

№	***t***	***T·E***	***t²***	***t · (T·E)***	***T***
1	1	78,804	1	78,804	
2	2	83,182	4	166,363	
3	3	83,153	9	249,459	
4	4	79,819	16	319,278	
5	5	76,615	25	383,075	
6	6	76,527	36	459,162	
7	7	73,914	49	517,397	
8	8	72,336	64	578,691	
9	9	67,859	81	610,731	
10	10	66,545	100	665,453	
11	11	62,827	121	691,094	
12	12	59,865	144	718,375	
13	13	56,914	169	739,881	
14	14	49,909	196	698,725	
15	15	46,196	225	692,942	
16	16	37,415	256	598,646	
Σ	136	1071,880	1496	8168,076	

Последнюю колонку таблицы заполним после того, как получим уравнение линейной регрессии.

Вычислим определители (21) - (23):

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 136 \\ 136 & 1496 \end{vmatrix} = 5440;$$

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} (T \cdot E)_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (T \cdot E)_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1071{,}880 & 136 \\ 8168{,}076 & 1496 \end{vmatrix} = 492674{,}436;$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n}(T\cdot E)_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i(T\cdot E)_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 1071{,}880 \\ 136 & 8168{,}076 \end{vmatrix} = -\ 15086{,}490.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты линейного тренда временного ряда по формулам (20)

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{492674{,}436}{5440} = 90{,}565;$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = -\frac{15086{,}490}{5440} = -\ 2{,}773.$$

Полученные значения a_0 и a_1, подставим в уравнение (18), тогда линейный тренд временного ряда будет иметь вид

$$T = 90{,}565 - 2{,}773\cdot t. \tag{24}$$

Подставляя в уравнение (24) значения t = 1,…16, найдем уровни T для каждого момента времени (Таблица 16, 6 колонка).

Таблица 16 - Вычисление значений T

№	***t***	***T·E***	***t²***	***t · (T·E)***	***T***
1	1	78,804	1	78,804	87,792
2	2	83,182	4	166,363	85,019
3	3	83,153	9	249,459	82,245
4	4	79,819	16	319,278	79,472
5	5	76,615	25	383,075	76,699
6	6	76,527	36	459,162	73,926
7	7	73,914	49	517,397	71,152
8	8	72,336	64	578,691	68,379
9	9	67,859	81	610,731	65,606
10	10	66,545	100	665,453	62,833
11	11	62,827	121	691,094	60,059
12	12	59,865	144	718,375	57,286
13	13	56,914	169	739,881	54,513
14	14	49,909	196	698,725	51,740
15	15	46,196	225	692,942	48,966
16	16	37,415	256	598,646	46,193
Σ	136	1071,880	1496	8168,076	1071,880

Вернемся к Таблице 14 и заполним ее 5 колонку полученными значениями T (Таблица 17)

Таблица 17 – Продолжение расчета выравненных значений T и ошибок E в мультипликативной модели

t	y_t	S_i	$T \cdot E = y_t / S_i$	T	$T \cdot S$	$E = y_t / (T \cdot S)$	$E' = y_t - (T \cdot S)$	$(E')^2$
1	72	0,914	78,804	87,792	80,212	0,898	-8,212	67,436
2	100	1,202	83,182	85,019	102,208	0,978	-2,208	4,877
3	90	1,082	83,153	82,245	89,018	1,011	0,982	0,965
4	64	0,802	79,819	79,472	63,722	1,004	0,278	0,078
5	70	0,914	76,615	76,699	70,077	0,999	-0,077	0,006
6	92	1,202	76,527	73,926	88,873	1,035	3,127	9,781
7	80	1,082	73,914	71,152	77,011	1,039	2,989	8,933
8	58	0,802	72,336	68,379	54,827	1,058	3,173	10,067
9	62	0,914	67,859	65,606	59,941	1,034	2,059	4,238
10	80	1,202	66,545	62,833	75,537	1,059	4,463	19,921
11	68	1,082	62,827	60,059	65,005	1,046	2,995	8,972
12	48	0,802	59,865	57,286	45,933	1,045	2,067	4,274
13	52	0,914	56,914	54,513	49,806	1,044	2,194	4,813
14	60	1,202	49,909	51,740	62,201	0,965	-2,201	4,844
15	50	1,082	46,196	48,966	52,998	0,943	-2,998	8,990
16	30	0,802	37,415	46,193	37,038	0,810	-7,038	49,535

Шаг 5. Найдём уровни ряда по мультипликативной модели.

Для этого умножим уровни T на значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов ($T \cdot S$) – Таблица 17, колонка 6.

На рисунке 8 приведены графики фактических значений y_t, тренда T и значений $(T \cdot S)$.

Шаг 6. Расчёт ошибки в мультипликативной модели проводится по формуле

$$E = Y / (T \cdot S).$$

Численные значения ошибки приведены в Таблице 17, колонка 7.

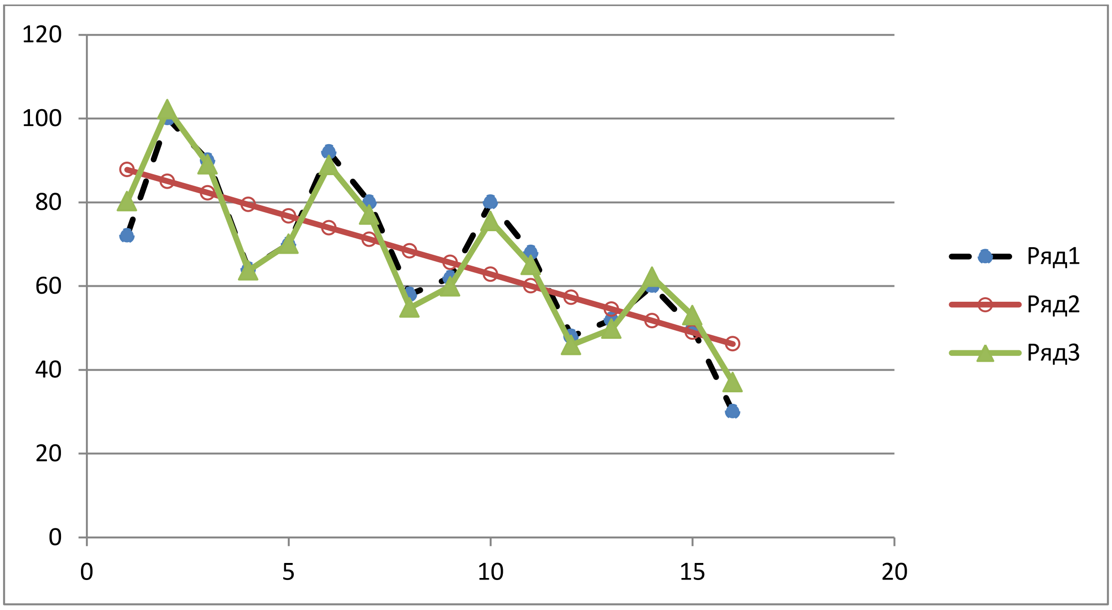


Рисунок 8. Прибыль компании (фактические и выравненные по мультипликативной модели значения уровней ряда)

Здесь Ряд 1 - график фактических значений y_t, Ряд 2 – график тренда T, Ряд 3 – график значений $(T{\cdot}S)$.

Если временный ряд ошибок не содержит автокорреляции, его можно использовать вместо исходного ряда для изучения взаимосвязи с другими временными рядами.

Для того чтобы сравнить мультипликативную модель с другими моделями временного ряда, можно по аналогии с аддитивной моделью использовать сумму квадратов абсолютных ошибок.

Абсолютные ошибки в мультипликативной модели определяются как

$$E' = y_t - (T \cdot S).$$

Выявление и устранение сезонного эффекта (в некоторых источниках употребляется термин «десезонализация уровней ряда») используется в двух направлениях. Во-первых, воздействие сезонных колебаний следует устранять на этапе предварительной обработки исходных данных при изучении взаимосвязи нескольких временных рядов. Поэтому в российских и международных статистических сборниках часто публикуются данные, в которых устранено влияние сезонной компоненты (если это помесячная или поквартальная статистика), например показатели объёмов производства в отдельных отраслях промышленности, уровня безработицы и так далее.

Во-вторых, выявление сезонного эффекта производится в анализе структуры одномерных временных рядов с целью прогнозирования уровней ряда в будущие моменты времени.

Пример 7. Предположим, требуется дать прогноз потребления жителям региона в течение первого полугодия ближайшего следующего года, используя данные Примера 5 (стр.17-26).

Решение. Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в аддитивной модели в соответствии с соотношением

$$F_t = T_t + S_i \tag{25}$$

- это сумма трендовой и сезонной компонент.

Здесь i – номер квартала сезонной компоненты.

Объём электроэнергии, потребляемой в течение первого полугодия ближайшего следующего, то есть пятого, года, рассчитывается как сумма объёмов потребления электроэнергии в I и во II кварталах пятого года, соответственно F_{17} и F_{18} .

Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда (15), (стр. 24)

$$T = 5{,}715 + 0{,}186 \cdot t.$$

Получим:

$$T_{17} = 5{,}715 + 0{,}186 \cdot 17 = 8{,}877;$$

$$T_{18} = 5{,}715 + 0{,}186 \cdot 18 = 9{,}063.$$

Значения сезонной компоненты равны (см. Таблицу 6, стр.20)

$$S_1 = 0{,}581 \text{ (I квартал)},$$

$$S_2 = -\ 1{,}977 \text{ (II квартал)}.$$

Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} + S_1 = 8{,}877 + 0{,}581 = 9{,}458;$$

$$F_{18} = T_{18} + S_2 = 9{,}063 - 1{,}977 = 7{,}086.$$

Прогноз объёма потребления электроэнергии на первое полугодие ближайшего следующего (пятого) года составит:

$$(9{,}458 + 7{,}086) = 16{,}544 \text{ млн кВт} \cdot \text{ч}.$$

Пример 8. Предположим, необходимо сделать прогноз ожидаемой прибыли компании за первое полугодие ближайшего следующего года по данным Примера 6 (стр. 27-35).

Решение. Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в мультипликативной модели в соответствии с соотношением

$$F_t = T_t \cdot S_i \tag{26}$$

– это произведение трендовой и сезонной компонент.

Для определения трендовой компоненты за каждый квартал воспользуемся уравнением тренда (24) (см. стр. 34)

$$T = 90{,}565 - 2{,}773 \cdot t\,.$$

Получим:

$$T_{17} = 90{,}565 - 2{,}773 \cdot 17 = 43{,}424;$$

$$T_{18} = 90{,}565 - 2{,}773 \cdot 18 = 40{,}651.$$

Значения сезонной компоненты равны (см. Таблицу 13, стр.30)

$$S_1 = 0{,}914 \text{ (I квартал)},$$

$$S_2 = 1{,}202 \text{ (II квартал)}.$$

Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} \cdot S_1 = 43{,}424 \cdot 0{,}914 = 39{,}690;$$

$$F_{18} = T_{18} \cdot S_2 = 40{,}651 \cdot 1{,}202 = 48{,}863.$$

Прогноз объёма потребления электроэнергии на первое полугодие ближайшего следующего (пятого) года составит:

(39,690+ 48,863) = 88,553 тыс.долл.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные элементы временного ряда.
2. Перечислите основные виды трендов.
3. Запишите общий вид мультипликативной модели временного ряда.
4. Запишите общий вид аддитивной модели временного ряда.
5. Перечислите этапы построения мультипликативной и аддитивной моделей временного ряда.
6. С какими целями производится выделение и устранение сезонного эффекта?
7. Как структурные изменения влияют на тенденцию временного ряда?
8. Перечислите этапы построения моделей сезонных и циклических колебаний.

5. Автокорреляция в остатках

Рассмотрим уравнение вида

$$y_t = a + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot x_{jt} + \varepsilon_t \ , \qquad (27)$$

где k – число независимых переменных модели.

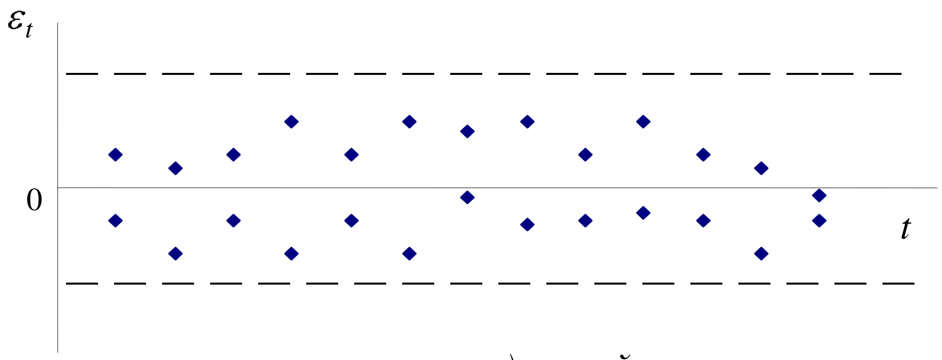
Для каждого момента (периода) времени t=1.. n значение компоненты ε_t определяется как

$$\varepsilon_t = y_t - y_t \qquad (28)$$

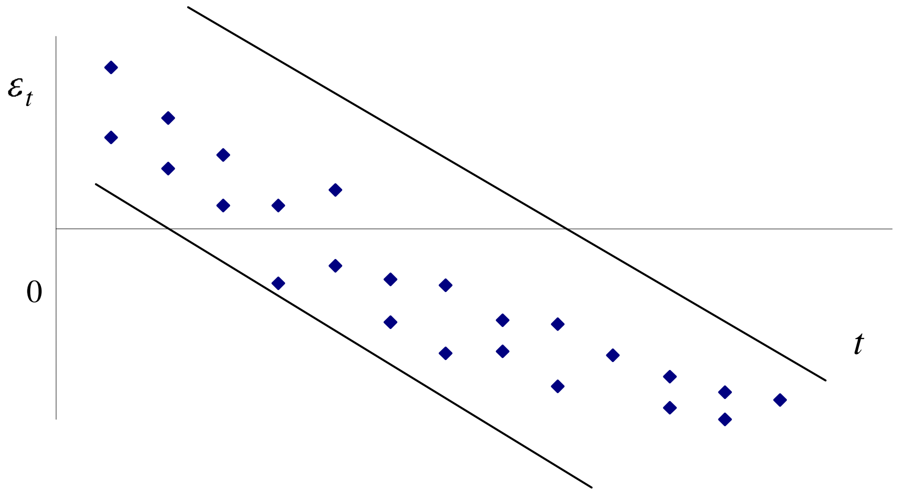
или

$$\varepsilon_t = y_t - (a + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot x_{jt}) \qquad (29)$$

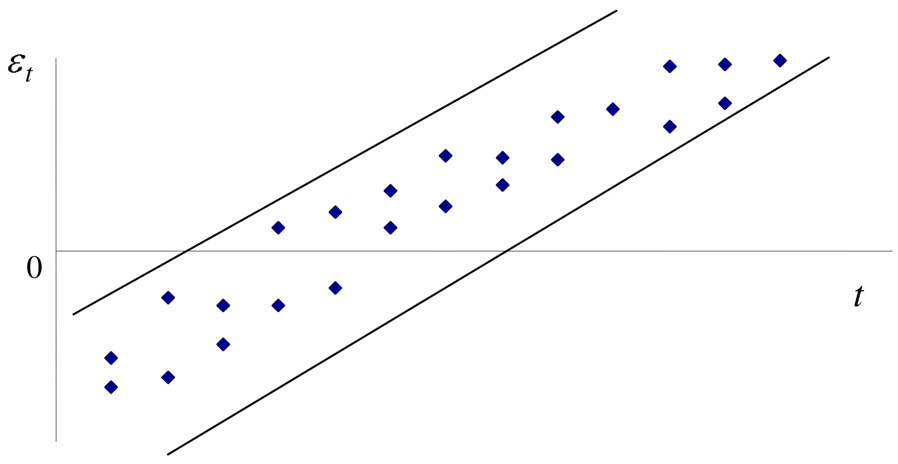
Рассматривая последовательность остатков как временной ряд, можно построить график их зависимости от времени. В соответствии с предпосылками метода наименьших квадратов (МНК) остатки ε_t должны быть случайными (рис. 9а).



а) случайные остатки



б) убывающая тенденция в остатках



в) возрастающая тенденция в остатках

Рисунок 9. Модели зависимости остатков от времени

Однако при моделировании временных рядов нередко встречаются ситуации, когда остатки содержат тенденцию (рис. 9б, 9в) или циклические колебания (рис. 10).

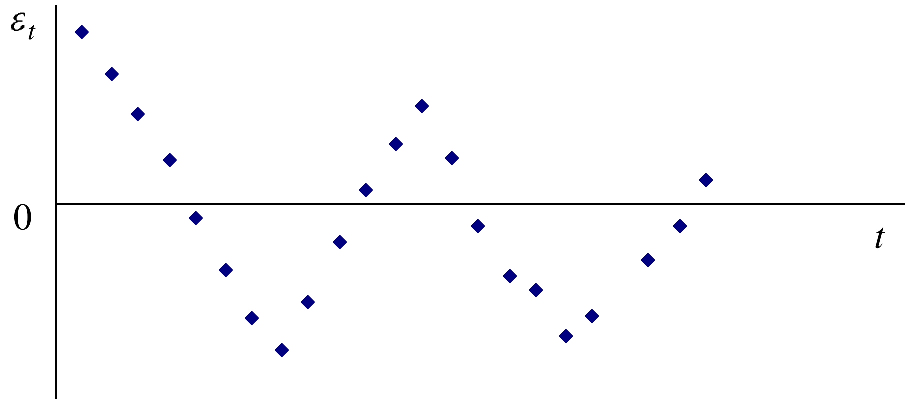


Рисунок 10. Циклические колебания в остатках

Это свидетельствует о том, что **каждое следующее значение остатков зависит от предшествующих.** В этом случае говорят о наличии **автокорреляции.**

Замечание. Автокорреляция остатков может быть вызвана несколькими причинами, имеющим различную природу.

Во-первых, иногда она связана с исходными данными и вызвана наличием ошибок измерения в значениях результативного признака.

Во-вторых, в ряде случаев причину автокорреляции остатков следует искать в формулировке модели. Модель может не включать фактор, оказывающий существенное воздействие на результат, влияние которого отражается в остатках, вследствие чего последние могут оказаться автокоррелированными. Очень часто этим фактором является *фактор времени t*. Кроме того, в качестве таких существенных факторов могут выступать *лаговые значения переменных,* включённых в модель.

Либо модель *не учитывает несколько второстепенных факторов,* совместное влияние которых на результат существенно ввиду совпадения тенденций их изменения или фаз циклических колебаний.

Существует **два** наиболее распространённых метода определения автокорреляции остатков.

1) Построение **графика зависимости остатков от времени** и **визуальное** определение наличия или отсутствия автокорреляции.

2) Использование **критерия Дарбина-Уотсона и расчёт величины d.**

Контрольные вопросы

1. Перечислите модели зависимости остатков от времени.
2. Поясните понятие автокорреляция остатков.
3. Приведите причины автокорреляции остатков.
4. Какие вы знаете методы определения автокорреляции остатков?

6. Критерий Дарбина-Уотсона

Критерий Дарбина-Уотсона указывается наряду с коэффициентами детерминации, значениями t- и F-критериями.

Критерий Дарбина-Уотсона основывается на расчёте величины *d*:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}\ . \tag{30}$$

Таким образом, *d* – это отношение суммы квадратов разностей последовательных значений остатков к остаточной сумме квадратов по модели регрессии.

Коэффициент автокорреляции остатков первого порядка определяется как

$$r_1^{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \overline{\varepsilon_1})\cdot(\varepsilon_{t-1} - \overline{\varepsilon_2})}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \overline{\varepsilon_1})^2 \cdot \sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_{t-1} - \overline{\varepsilon_2})^2}}\ , \tag{31}$$

где

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t}{n-1}; \qquad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}}{n-1}. \tag{32}$$

Так как ε_t - остатки, полученные по уравнению регрессии, параметры которого определены обычным методом наименьших квадратов (МНК), то в соответствии с предпосылками МНК их сумма и среднее значение равны нулю

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t = 0; \qquad \bar{\varepsilon}_t = \frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t}{n} \tag{33}$$

Следовательно, без уменьшения общности можно предположить, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0. \tag{34}$$

Предположим также

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2 \tag{35}$$

С учётом соотношений (34) и (35) формула для расчёта коэффициента автокорреляции остатков (31) преобразуется следующим образом:

$$r_1^{\varepsilon} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2}. \tag{36}$$

Преобразуем теперь формулу (30) расчёта критерия Дарбина-Уотсона следующим образом:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 - 2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}. \tag{37}$$

С учётом формул (35) получим:

$$d = \frac{2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 - 2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} \right). \qquad (38)$$

Сравнив выражения (36) и (38), выведем следующее соотношение между критерием Дарбина - Уотсона и коэффициентом автокорреляции остатков первого порядка:

$$d \approx 2 \cdot (1 - r_t^{\varepsilon}). \qquad (39)$$

Выводы:

1. Если в остатках существует *полная положительная автокорреляция* и $r_t^{\varepsilon} = 1$, то $d = 0$.

2. Если в остатках существует *полная отрицательная автокорреляция* и $r_t^{\varepsilon} = -1$, то $d = 4$.

3. Если в остатках *автокорреляция отсутствует*, то $r_t^{\varepsilon} = 0$ и $d = 2$.

Следовательно,

$$0 \leq d \leq 4. \qquad (40)$$

7. Алгоритм выделения автокорреляции остатков на основе критерия Дарбина-Уотсона

Шаг 1. Выдвигается гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции остатков. Альтернативные гипотезы H_1 и H_1^* состоят, соответственно, в наличии положительной или отрицательной автокорреляции в остатках.

Шаг 2. По специальным таблицам (см. приложение 3) определяются критические значения критерия Дарбина–Уотсона d_L и d_U для заданного числа наблюдений n, числа независимых переменных модели k и уровня значимости α.

Шаг 3. По этим значениям числовой промежуток [0; 4] разбивается на 5 отрезков. Принятие или отклонение каждой гипотезы с вероятностью $(1-\alpha)$ представлено на рисунке 11.

Есть положительная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется. С вероятностью $P=(1-\alpha)$ принимается H_1	Зона неопреде-лённости	Нет оснований отклонять H_0 (автокорреляция остатков отсутствует)	Зона неопреде-лённости	Есть отрицательная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется. С вероятностью $P=(1-\alpha)$ принимается H_1^*

0 d_L d_U $4-d_U$ $4-d_L$ 4

Рисунок 11. Механизм проверки гипотезы о наличии автокорреляции остатков

Если фактическое значение критерия Дарбина-Уотсона попадает в зону неопределённости, то на практике предполагают существование автокорреляции остатков и отклоняют гипотезу H_0.

Пример 9. Имеются данные о совокупном доходе x_t и данные о расходах на конечное потребление y_t за 8 лет (Таблица 18):

Таблица 18 – Совокупный доход и расходы на конечное потребление (усл. д. ед.)

Год, t	***Совокупный доход,*** x_t	***Расходы на конечное потребление,*** y_t
1	10	7
2	12	8
3	11	8
4	12	10
5	14	11
6	15	12
7	17	14
8	20	16

Проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках для линейной модели зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода, построенной по первым разностям исходных показателей.

Решение. Вычислим первые разности временных рядов расходов на конечное потребление $\Delta_t y$ и совокупного дохода $\Delta_t x$ (Таблица 19) по формулам

$$\Delta_t x = x_t - x_{t-1};$$

$$\Delta_t y = y_t - y_{t-1},$$

где t = 2, …, 8.

Таблица 19 – Первые разности временных рядов расходов на конечное потребление $\Delta_t y$ и совокупного дохода $\Delta_t x$

Год, t	***Совокупный доход,*** x_t	***Расходы на конечное потребление,*** y_t	***Первые разности совокупного дохода,*** $\Delta_t x$	***Первые разности расходов на конечное потребление,*** $\Delta_t y$
1	10	7	-	-
2	12	8	2	1
3	11	8	-1	0
4	12	10	1	2
5	14	11	2	1
6	15	12	1	1
7	17	14	2	2
8	20	16	3	2

Линейную модель зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода по первым разностям исходных показателей будем искать в виде

$$\Delta_t \hat{y} = a_0 + a_1 \cdot \Delta_t x. \tag{41}$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 применим метод наименьших квадратов, который сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i \end{cases} . \qquad (42)$$

Для решения системы (42) используем формулы Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta}, \; a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}, \qquad (43)$$

где Δ - определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix}, \qquad (44)$$

Δa_0 и Δa_1 - определители, получаемые из Δ заменой 1-го и 2-го столбца соответственно на столбец свободных членов (правых частей уравнений системы):

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix}, \qquad (45)$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i \end{vmatrix}. \qquad (46)$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 линейной регрессии необходимо рассчитать таблицу следующего вида (Таблица 20).

Последнюю колонку таблицы 20 заполним после того, как получим уравнение линейной регрессии.

Таблица 20 - Данные для определения коэффициентов линейной регресии первых разностей расходов на конечное потребление $\Delta_t y$ и совокупного дохода $\Delta_t x$

№	x_t	y_t	$\Delta_t x$	$\Delta_t y$	$(\Delta_t x)^2$	$\Delta_t x \cdot \Delta_t y$	$\Delta_t \hat{y}$
1	10	7	-	-	-	-	
2	12	8	2	1	4	2	
3	11	8	-1	0	1	0	
4	12	10	1	2	1	2	
5	14	11	2	1	4	2	
6	15	12	1	1	1	1	
7	17	14	2	2	4	4	
8	20	16	3	2	9	6	
Σ	111	86	10	9	24	17	

Вычислим определители (44) - (46):

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 24 \end{vmatrix} = 68;$$

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 17 & 24 \end{vmatrix} = 46;$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} = 29.$$

Примечание. Здесь $n = 7$, так как первых разностей расходов на конечное потребление $\Delta_t y$ и совокупного дохода $\Delta_t x$ на единицу меньше, чем исходных данных x_t и y_t, то есть

$$n = 8 - 1 = 7.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты a_0 и a_1 по формулам (43)

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{46}{68} = 0{,}676;$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{29}{68} = 0{,}426.$$

Найденные значения a_0 и a_1, подставим в уравнение (41). Получим искомую линейную модель зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода по первым разностям исходных показателей

$$\Delta_t \hat{y} = 0{,}676 + 0{,}426 \cdot \Delta_t x. \tag{47}$$

Подставляя в уравнение (47) значения $\Delta_t x$, найдем соответствующие значение $\Delta_t \hat{y}$ (Таблица 21, колонка 8).

Таблица 21 – Расчет значений $\Delta_t \hat{y}$

№	x_t	y_t	$\Delta_t x$	$\Delta_t y$	$(\Delta_t x)^2$	$\Delta_t x \cdot \Delta_t y$	$\Delta_t \hat{y}$
1	10	7	-	-	-	-	-
2	12	8	2	1	4	2	1,529
3	11	8	-1	0	1	0	0,250
4	12	10	1	2	1	2	1,103
5	14	11	2	1	4	2	1,529
6	15	12	1	1	1	1	1,103
7	17	14	2	2	4	4	1,529
8	20	16	3	2	9	6	1,956
Σ	111	86	10	9	24	17	9

Перейдем теперь непосредственно к выполнению главного задания нашего примера: проверим теперь *гипотезу о наличии автокорреляции в остатках* для линейной модели зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода, построенной по первым разностям исходных показателей.

Применим критерий Дарбина – Уотсона.

Для этого по формуле (28) вычислим значения ε_t как разность между $\Delta_t y$ и $\Delta_t \hat{y}$:

$$\varepsilon_t = \Delta_t y - \Delta_t \hat{y}.$$

По формуле (30) вычислим величину d

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}.$$

Для этого потребуется вычислить величины ε_t^2 и $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$.

Исходные данные, значения ε_t, ε_t^2 и $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$ представлены в таблице 22.

Таблица 22 – Расчет критерия Дарбина – Уотсона для модели зависимости потребления от дохода

№	$\Delta_t x$	$\Delta_t y$	$\Delta_t \hat{y}$	$\varepsilon_t = \Delta_t y - \Delta_t \hat{y}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	ε_t^2
1	-	-	-	-	-	-	-
2	2	1	1,529	-0,529	-	-	0,280
3	-1	0	0,250	-0,250	0,279	0,078	0,063
4	1	2	1,103	0,897	1,147	1,316	0,805
5	2	1	1,529	-0,529	-1,426	2,035	0,280
6	1	1	1,103	-0,103	0,426	0,182	0,011
7	2	2	1,529	0,471	0,574	0,329	0,221
8	3	2	1,956	0,044	-0,426	0,182	0,002
Σ	10	9	9	0	0,574	4,121	1,662

Итак, фактическое значение критерия Дарбина-Уотсона для рассматриваемой модели равно

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} = \frac{4{,}121}{1{,}662} = 2{,}480.$$

Сформулируем гипотезы:

1) гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции остатков;
2) гипотеза H_1 о наличии положительной автокорреляции в остатках;
3) гипотеза H_1^* о наличии отрицательной автокорреляции в остатках.

По таблице значений статистик Дарбина - Уотсона (приложение 3) определим критические значения d_L и d_U для заданного числа наблюдений n, числа независимых переменных модели k и уровня значимости α.

Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, то есть надежностью 95%. Число наблюдений $n = 7$. Число независимых переменных данной модели k=1.

Тогда в соответствии с приложением 3, определяем

$$d_L = 0{,}70, \qquad d_U = 1{,}36.$$

Воспользуемся механизмом проверки гипотезы о наличии автокорреляции остатков (рис. 11, стр. 45), получим следующие промежутки (рисунок 12):

Есть положительная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется. С вероятностью $P = (1 - \alpha)$ принимается H_1	Зона неопреде-лённости	Нет оснований отклонять H_0 (автокорреляция остатков отсутствует) d=2,48	Зона неопреде-лённости	Есть отрицательная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется. С вероятностью $P = (1 - \alpha)$ принимается H_1^*

0 d_L=0,70 d_U=1,36 $4 - d_U$=2,64 $4 - d_L$=3,3 4

Рисунок 12. Проверка гипотезы о наличии автокорреляции остатков

Фактическое значение критерия Дарбина - Уотсона d = 2,48 попадает в промежуток от d_U=1,36 до 4 – d_U=2,64, то есть в зону «автокорреляция остатков отсутствует».

Следовательно, нет оснований отклонять гипотезу H_0 об отсутствии автокорреляции остатков.

Замечание 1. Критерий Дарбина-Уотсона не применим к моделям, включающим в качестве независимых переменных лаговые значения результативного признака, то есть к моделям авторегрессии. Для тестирования на автокорреляцию остатков моделей авторегрессии используется критерий h Дарбина.

Замечание 2. Методика расчета и использования критерия Дарбина-Уотсона направлена только на выявление автокорреляции остатков первого порядка. При проверке остатков на автокорреляцию более высоких порядков следует применять другие методы.

Замечание 3. Критерий Дарбина -Уотсона даёт достоверные результаты *только для больших выборок*. В этом смысле результаты рассмотренного примера нельзя считать достоверными ввиду чрезвычайно малого числа наблюдений n = 7, по которым построена модель регрессии.

Пример 10. По данным за 18 месяцев построено уравнение регрессии зависимости прибыли предприятия (млн.руб.) y от цен на сырьё (тыс.руб. за 1т) x_1 и производительности труда (единиц продукции на 1 работника) x_2 :

$$y = 200 – 1,5 \cdot x_1 + 4,0 \cdot x_2.$$

При анализе остаточных величин были использованы значения, приведённые в таблице 23.

Таблица 23 - Данные о прибыли предприятия y, цен на сырьё x_1 и производительности труда x_2

№	y	x_1	x_2
1	210	800	300
2	720	1000	500
3	300	1500	600
…	…	…	…

$$\varepsilon_t^2 = 10500, \qquad (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 = 40000.$$

Требуется:

1. Рассчитать критерий Дарбина-Уотсона.
2. Оценить полученный результат при 5%-м уровне значимости.
3. Указать, пригодно ли уравнение для прогноза.

Решение. y_t определяется путём подстановки фактических значений x_1 и x_2 в уравнение регрессии:

$$y_{t1} = 200 – 1.5 \cdot 800 + 4.0 \cdot 300 = 200;$$

$$y_{t2} = 200 – 1.5 \cdot 1000 + 4.0 \cdot 500 = 700;$$

$$y_{t3} = 200 – 1.5 \cdot 1500 + 4.0 \cdot 600 = 350.$$

Остатки ε_t рассчитываются по формуле

$$\varepsilon_t = \mathrm{y_t} - y_t.$$

Следовательно,

ε_1 = 210 - 200 = 10	ε_1^2 = 100
ε_2 = 720 - 700 = 20	ε_2^2 = 400
ε_3 = 300 - 350 = - 50	ε_3^2 = 2500

ε_{t-1} – те же значения, что и ε_t, но со сдвигом на один месяц.

Результаты вычислений оформлены в виде таблицы 24.

Таблица 24 - Исходная информация для расчёта критерия Дарбина-Уотсона

№	y_t	ε_t	ε_{t-1}	ε_t-ε_{t-1}	$(\varepsilon_t\text{-}\varepsilon_{t-1})^2$	ε_t^2
1	200	10	-	-	-	100
2	700	20	10	10	100	400
3	350	-50	20	-70	4900	2500
…	…	…	…	…	…	…
Σ					40000	10500

Критерий Дарбина-Уотсона рассчитывается по формуле

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{40000}{10500} = 3,81.$$

Фактическое значение критерия d сравним с табличными значениями при 5%-м уровне значимости. При n = 18 месяцев и k = 2 (число независимых переменных) в соответствии с приложением 3, определяем

$$d_L = 1{,}05, \qquad d_U = 1{,}53.$$

Воспользуемся механизмом проверки гипотезы о наличии автокорреляции остатков (рис. 11, стр. 45), получим следующие промежутки (рисунок 13):

Есть положительная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется. С вероятностью $P = (1 - \alpha)$ принимается H_1	Зона неопреде-лённости	Нет оснований отклонять H_0 (автокорреляция остатков отсутствует)	Зона неопреде-лённости	Есть отрицательная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется. С вероятностью $P = (1 - \alpha)$ принимается H_1^* d=3,81

0 d_L=1,05 d_U=1,53 $4 - d_U$=2,47 $4 - d_L$=2,95 4

Рисунок 13. Проверка гипотезы о наличии автокорреляции остатков

Фактическое значение критерия Дарбина - Уотсона d = 3,81 попадает в промежуток от $4–d_U$=2,95 до 4, то есть в зону «отрицательной автокорреляции».

Это означает наличие в остатках автокорреляции.

Уравнение регрессии не пригодно для прогноза, так как в нём не устранена автокорреляция в остатках.

Пример 11. Имеются следующие данные о величине дохода на одного члена семьи и расхода на товар А (Таблица 25).

Таблица 25 - Данные о величине дохода на одного члена семьи и расхода на товар А

Показатель	1985г.	1986г.	1987г.	1988г.	1989г.	1990г.
Расходы на товар А, руб.	30	35	39	44	50	53
Доход на одного, % к 1985 г.	100	103	105	109	115	118

Требуется:

1. Определить ежегодные абсолютные приросты доходов и расходов и сделать выводы о тенденции развития каждого ряда.
2. Построить линейную модель спроса, используя первые разности уровней исходных динамических рядов.
3. Пояснить экономический смысл коэффициента регрессии.
4. Построить линейную модель спроса на товар А, включив в неё фактор времени. Интерпретировать полученные параметры.

Решение:

1. Обозначим расходы на товар А через *y,* а доходы одного члена семьи через *x*.

Ежегодные абсолютные приросты определим по формулам (Таблица 26)

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1},$$

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}.$$

где $t = 2, \ldots, 6$.

Таблица 26 - Расчёт абсолютных приростов

№	x_t	y_t	Δx_t	Δy_t
1	100	30	-	-
2	103	35	3	5
3	105	39	2	4
4	109	44	4	5
5	115	50	6	6
6	118	53	3	3

Значения Δy_t не имеют чётко выраженной тенденции, они варьируют вокруг среднего уровня, что означает наличие в ряде динамики линейного тренда. Аналогичный вывод можно сделать и по ряду *x*: абсолютные приросты не имеют систематической направленности, они примерно стабильны, а следовательно, ряд характеризуется линейной тенденцией.

2. Линейную модель зависимости расхода от дохода по первым разностям исходных показателей будем искать в виде

$$\Delta_t \hat{y} = a_0 + a_1 \cdot \Delta_t x. \tag{48}$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 применим метод наименьших квадратов, который сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i \end{cases}. \tag{49}$$

Для решения системы (49) используем формулы Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}, \tag{50}$$

где Δ - определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix}, \tag{51}$$

Δa_0 и Δa_1 - определители, получаемые из Δ заменой 1-го и 2-го столбца соответственно на столбец свободных членов (правых частей уравнений системы):

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix}, \tag{52}$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 линейной регрессии необходимо рассчитать таблицу следующего вида (Таблица 27).

Последнюю колонку таблицы 27 заполним после того, как получим уравнение линейной регрессии.

Таблица 27 - Данные для определения коэффициентов линейной регресии первых разностей расходов $\Delta_t y$ и доходов $\Delta_t x$

№	x_t	y_t	$\Delta_t x$	$\Delta_t y$	$(\Delta_t x)^2$	$\Delta_t x \cdot \Delta_t y$	$\Delta_t \hat{y}$
1	100	30	-	-	-	-	
2	103	35	3	5	9	15	
3	105	39	2	4	4	8	
4	109	44	4	5	16	20	
5	115	50	6	6	36	36	
6	118	53	3	3	9	9	
Σ	650	251	18	23	74	88	

Вычислим определители (51) - (53):

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 18 \\ 18 & 74 \end{vmatrix} = 46;$$

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t x_i)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 18 \\ 88 & 74 \end{vmatrix} = 118;$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_t x_i & \sum_{i=1}^{n} \Delta_t y_i \cdot \Delta_t x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 18 & 88 \end{vmatrix} = 26.$$

Примечание. Здесь n = 5, так как первых разностей расходов $\Delta_t y$ и доходов $\Delta_t x$ на единицу меньше, чем исходных данных x_t и y_t, то есть

$$n = 6 - 1 = 5.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты a_0 и a_1 по формулам (50)

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{118}{46} = 2{,}565;$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{26}{46} = 0{,}565.$$

Найденные значения a_0 и a_1, подставим в уравнение (48). Получим искомую линейную модель зависимости расходов от доходов по первым разностям исходных показателей

$$\Delta_t \hat{y} = 2{,}565 + 0{,}565 \cdot \Delta_t x. \qquad (54)$$

Подставляя в уравнение (54) значения $\Delta_t x$, найдем соответствующие значение $\Delta_t \hat{y}$ (Таблица 28, колонка 8).

Таблица 28 – Расчет значений $\Delta_t \hat{y}$

№	x_t	y_t	$\Delta_t x$	$\Delta_t y$	$(\Delta_t x)^2$	$\Delta_t x \cdot \Delta_t y$	$\Delta_t \hat{y}$
1	100	30	-	-	-	-	-
2	103	35	3	5	9	15	4,26
3	105	39	2	4	4	8	3,70
4	109	44	4	5	16	20	4,83
5	115	50	6	6	36	36	5,96
6	118	53	3	3	9	9	4,26
Σ	650	251	18	23	74	88	23

Построим график линейной модели спроса по первым разностям (рисунок 14).

На рисунке 14 - Ряд 1 – фактические уровни ряда; Ряд 2 – уровни ряда, рассчитанные по линейному тренду.

Линейный тренд характеризует возрастающую тенденцию потребления электроэнергии жителями региона.

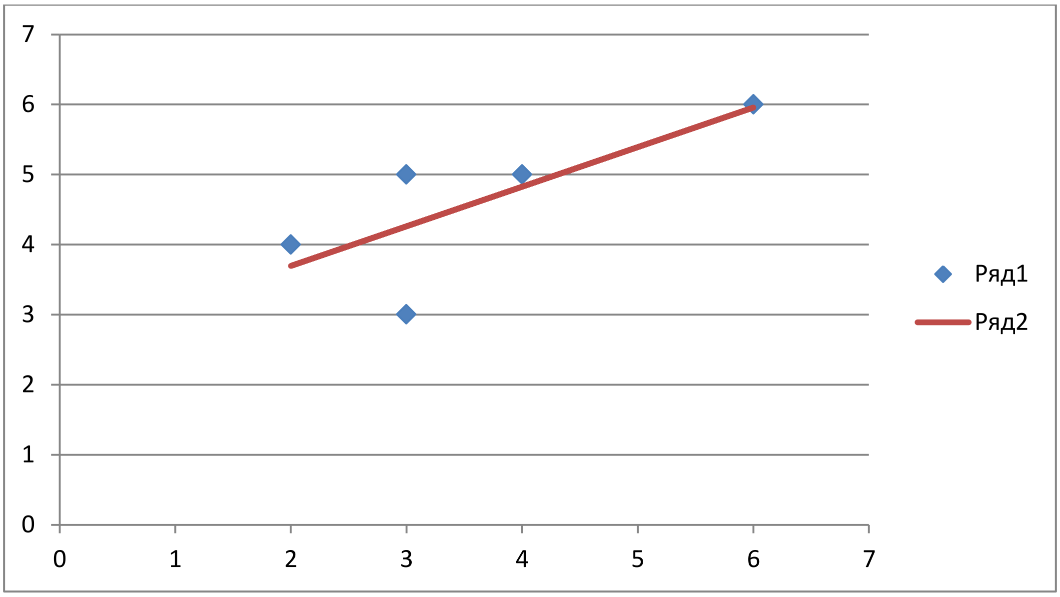


Рисунок 14. Динамика расходов на товары в зависимости от доходов

3. Коэффициент регрессии $a_1 = 0{,}565$ руб. Он означает, что с ростом прироста душевого дохода на 1%-й пункт расходы на товар А увеличиваются со средним ускорением 0,565 руб.

4. При построении моделей часто используется включение в модель фактора времени. Иными словами, модель строится по исходным данным, но в неё в качестве самостоятельного фактора включается время t.

Так, например, линейная модель с одним фактором x, при включении в нее фактора времени t будет иметь вид

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot t. \qquad (55)$$

Построим линейную модель зависимости спроса на товар А от дохода на одного члена семьи, включив в нее фактор времени t .

Модель содержит два фактора: x и t.

Применяя метод наименьших квадратов для построения уравнения *множественной* регрессии, получим систему нормальных уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0, a_1 и a_2:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} t_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i \end{cases} \tag{56}$$

Приведем формулы Крамера для решения систем (56):

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta a_2}{\Delta}, \tag{57}$$

где Δ - определитель основной матрицы системы уравнений (56)

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{58}$$

а Δa_0, Δa_1, Δa_2 - определители, получаемые из Δ заменой 1-го, 2-го и 3-го столбца соответственно на столбец свободных членов (правых частей уравнений системы (56)), то есть

$$\Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \tag{59}$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix}, \qquad (60)$$

$$\Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i \end{vmatrix} \qquad (61)$$

Для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 необходимо рассчитать таблицу значений (Таблица 29):

Таблица 29- Исходная информация для определения коэффициентов уравнения множественной регрессии.

№	x	t	y	x^2	t^2	$x \cdot t$	$y \cdot x$	$y \cdot t$
1	100	1	30	10000	1	100	3000	30
2	103	2	35	10609	4	206	3605	70
3	105	3	39	11025	9	315	4095	117
4	109	4	44	11881	16	436	4796	176
5	115	5	50	13225	25	575	5750	250
6	118	6	53	13924	36	708	6254	318
Σ	650	21	251	70664	91	2340	27500	961

Вычислим определители (58) - (61):

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 650 & 21 \\ 650 & 70664 & 2340 \\ 21 & 2340 & 91 \end{vmatrix} = 620;$$

$$\Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 251 & 650 & 21 \\ 27500 & 70664 & 2340 \\ 961 & 2340 & 91 \end{vmatrix} = -3360;$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 251 & 21 \\ 650 & 27500 & 2340 \\ 21 & 961 & 91 \end{vmatrix} = 200;$$

$$\Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot t_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 650 & 251 \\ 650 & 70664 & 27500 \\ 21 & 2340 & 961 \end{vmatrix} = 2180.$$

По формулам (57) вычислим $a_{0,}\, a_1$ и a_2:

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta} = \frac{-3360}{620} = -5{,}42;$$

$$a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{200}{620} = 0{,}32;\ ,$$

$$a_2 = \frac{\Delta a_2}{\Delta} = \frac{2180}{620} = 3{,}52.$$

Подставим полученные значения $a_{0,}$ a_1 и a_2 в уравнение (55). Тогда линейная модель спроса на товар А при включении в нее фактора времени t будет иметь вид

$$y = -\ 5{,}42 + 0{,}32 \cdot x + 3{,}52 \cdot t.$$

Параметр a_1 = 0,32 характеризует силу связи y и x. Его величина означает, что с ростом дохода на одного члена семьи на 1%-й пункт при условии неизменной тенденции расходы на товар А возрастают в среднем на 0,32 руб. Параметр a_2 = 3,52 характеризует среднегодовой абсолютный прирост расходов на товар А под воздействием прочих факторов при условии неизменного дохода.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте понятие автокорреляции.
2. Перечислите основные методы выявления автокорреляции.
3. Запишите критерий Дарбина-Уотсона.
4. Перечислите этапы построения критерия Дарбина-Уотсона.
5. В чём заключается механизм проверки гипотезы о наличии автокорреляции остатков?
6. Чему равен критерий Дарбина-Уотсона, если в остатках существует полная положительная автокорреляция?
7. Чему равен критерий Дарбина-Уотсона, если в остатках существует полная отрицательная автокорреляция?
8. Чему равен критерий Дарбина-Уотсона, если в остатках автокорреляция отсутствует?

8. Моделирование тенденции временного ряда при наличии структурных изменений

Описание процессов и явлений с помощью временных рядов не ограничивается моделированием циклических и сезонных колебаний.

В случае структурных изменений в экономике или иных факторов принцип построения моделей будет иной.

В этом случае, начиная с некоторого момента t^*, происходит изменение характера динамики изучаемого показателя, что приводит к изменению параметров тренда, описывающего эту динамику.

Схематично такая ситуация изображена на рисунке 15

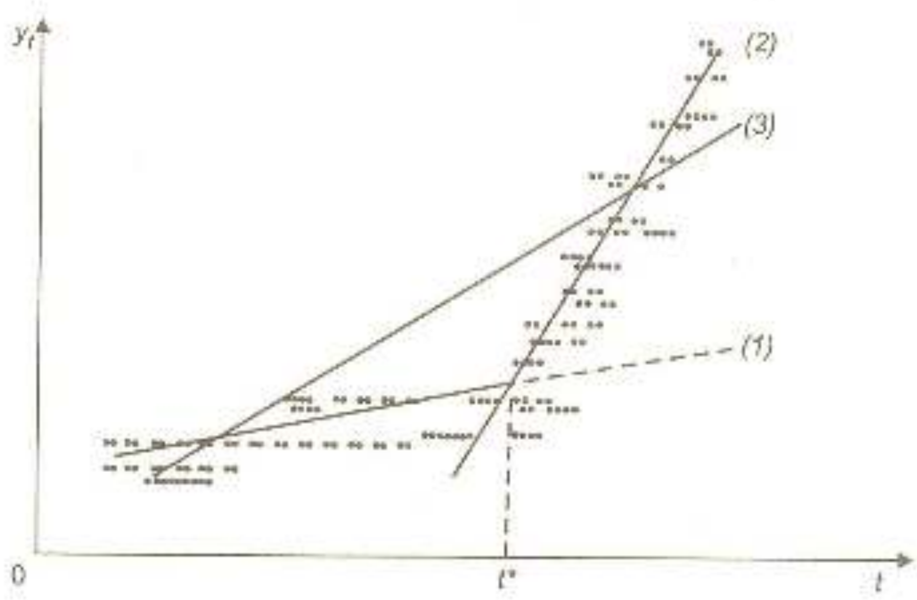


Рисунок 15. Изменение характера тенденции временного ряда

Момент времени t^* сопровождается значительными изменениями ряда факторов, оказывающих сильное воздействие на изучаемый показатель y_t.

Чаще всего эти изменения вызваны изменениями в общеэкономической ситуации или факторами (событиями)глобального характера, приведшими к изменению структуры экономики (например, начало крупных экономических реформ, изменение экономического курса, нефтяные кризисы и прочее).

Если исследуемый временной ряд включает в себя соответствующий момент (период) времени, то одной из задач его изучения становится выяснение вопроса о том, значимо ли повлияли общие структурные изменения на характер этой тенденции.

Если это влияние значимо, то для моделирования тенденции временного ряда следует использовать **кусочно-линейные модели регрессии,** то есть разделить исходную совокупность на две подсовокупности (до момента времени t* и после момента t*) и построить отдельно по каждой подсовокупности уравнениялинейной регрессии (на рис.15 этим уравнениям соответствуют прямые (1) и (2)). Если структурные изменения незначительно повлияли на характер тенденции ряда y_t, то её можно описать с помощью единого для всей совокупности данных уравнения тренда (рис.15 (3)).

Замечание. Каждый из описанных подходов имеет свои положительные и отрицательные стороны. При построении кусочно-линейной модели происходит снижение остаточной суммы квадратов по сравнению с единым для всей совокупности уравнением тренда. Однако разделение исходной совокупности на две части ведёт к потере числа наблюдений и следовательно, к снижению числа степеней свободы в каждом уравнении кусочно-линейной модели. Построение единого для всей совокупности уравнения тренда, позволяет сохранить число наблюдений n исходной совокупности, однако остаточная сумма квадратов по этому уравнению будет выше по сравнению с кусочно-линейной моделью.

Очевидно, что выбор одной из двух моделей (кусочно-линейной или единого уравнения тренда) будет зависеть от соотношения между снижением остаточной дисперсии и потерей числа степеней свободы при переходе от единого уравнения регрессии к кусочно-линейной модели.

Формальный статистический тест для оценки этого соотношения был предложен Грегори Чоу. Применение этого теста предполагает расчёт параметров уравнений трендов, графики которых изображены на рис.15 прямыми (1), (2), (3).

Введем систему обозначений, приведенную в Таблице 30.

Таблица 30 - Условные обозначения для алгоритма теста Чоу

Номер урав-нения	***Вид уравнения***	***Число наблюдений в совокуп-ности***	***Остаточная сумма квадратов***	***Число параметров в уравнении***	***Число степеней свободы остаточной дисперсии***
Кусочно-линейная модель					
(1)	$y^{(1)} = a_1 + b_1 t$	n_1	$C^1_{ост}$	k_1	$n_1 – k_1$
(2)	$y^{(2)} = a_2 + b_2 t$	n_2	$C^2_{ост}$	k_2	$n_2 – k_2$
Уравнение тренда по всей совокупности					
(3)	$y^{(1)} = a_3 + b_3 t$	n	$C^3_{ост}$	k_3	$n – k_3 =$ $=(n_1 + n_2) – k_3$

Выдвинем гипотезу H_0 о структурной стабильности тенденции изучаемого временного ряда.

Остаточную сумму квадратов по кусочно-линейной модели $C^{кл}{}_{ост}$ можно найти как сумму $C^1{}_{ост}$ и $C^2{}_{ост}$.

$$C^{кл}{}_{ост} = C^1{}_{ост} + C^2{}_{ост.} \tag{62}$$

Соответствующее ей число степеней свободы составит:

$$(n_1 – k_1) + (n_2 – k_2) = (n – k_1 – k_2). \tag{63}$$

Тогда сокращение остаточной дисперсии при переходе от единого уравнения тренда к кусочно-линейной модели можно определить следующим образом:

$$\Delta C_{ост} = \mathrm{C}^3_{\mathrm{ост}} \text{ - } \mathrm{C}^{\mathrm{кл}}_{\mathrm{ост}} \tag{64}$$

Число степеней свободы, соответствующее $\Delta C_{ост}$, с учётом соотношения (63) будет равно

$$n – k_3 – (n – k_1 – k_2) = k_1 + k_2 – k_3. \tag{65}$$

Далее в соответствии с предложенной Г. Чоу методикой определяется фактическое значение F-критерия по следующим дисперсиям на одну степень свободы вариации:

$$F_{факт} = \frac{Д_{\Delta c}}{Д_{кл}} = \frac{\Delta C_{ост}:(k_1+k_2-k_3)}{C_{ост}^{кл}:(n-k_1-k_2)} \quad (66)$$

Найденное значение $F_{факт}$ сравнивают с табличным, полученным по таблицам распределения Фишера (Приложение 2) для уровня значимости α и числа степеней свободы $(k_1 + k_2 - k_3)$ и $(n - k_1 - k_2)$.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, то гипотеза о структурной стабильности тенденции отклоняется, а влияние структурных изменений на динамику изучаемого показателя признают значимыми. В этом случае моделирование тенденции временного ряда следует осуществлять с помощью кусочно-линейной модели.

Если $F_{факт} < F_{табл}$, то нет оснований отклонять ноль-гипотезу о структурной стабильности тенденции. Её моделирование следует осуществлять с помощью единого для всей совокупности уравнения тренда.

Замечание. Отметим следующие особенности применения теста Чоу:

1. Если число параметров во всех уравнениях (1), (2), (3) (табл.15) одинаково и равно *k*, то формула (66) упрощается:

$$F_{факт} = \frac{\Delta C_{ост}:k}{C_{ост}^{кл}:(n-2k)}. \quad (67)$$

2. Тест Чоу позволяет сделать вывод о наличии или отсутствии структурной стабильности в изучаемом временном ряде.
   Если $F_{факт} < F_{табл}$, то это означает, что уравнения (1) и (2) описывают одну и ту же тенденцию, а различия численных оценок их параметров a_1 и a_2, а также b_1 и b_2 соответственно статистически незначимы.

Если же $F_{факт}>F_{табл}$, то гипотеза о структурной стабильности отклоняется, что означает статистическую значимость различий оценок параметров уравнений (1) и (2).

3. Применение теста Чоу предполагает соблюдение предлосылок о нормальном распределении остатков в уравнениях (1) и (2) и независимость их распределений.

Если гипотеза о структурной стабильности тенденции ряда y_t отклоняется, дальнейший анализ может заключаться в исследовании вопроса о причинах этих структурных различий и более детальном изучении характера изменения тенденции.

Возможны следующие сочетания изменения численных оценок параметров уравнений (1) и (2) (рис. 16)):

- изменение численной оценки свободного члена уравнения тренда a_2 по сравнению с a_1 при условии, что различия между b_1и b_2 статистически незначимы. Геометрически это означает, что прямые (1) и (2) параллельны (рис. 16 *а*). В данной ситуации можно говорить о скачкообразном изменении уровней ряда y_t в момент времени t^*, при неизменном среднем абсолютном приросте за период;

- изменение численной оценки параметра b_2 по сравнению с b_1 при условии, что различия между a_1 и a_2 статистически незначимы. Геометрически это означает, что прямые (1) и (2) пересекают ось ординат в одной точке (рис. 16 *б*). В этом случае изменение тенденции связано с изменением среднего абсолютного прироста временного ряда, начиная с момента времени t^*, при неизменном начальном уровне ряда в момент времени $t = 0$.

- изменение численных оценок параметров a_1 и a_2, а также b_1 и b_2. Геометрически эта ситуация изображена на (рис. 16 *в*). Она означает, что изменение характера тенденции сопровождается изменением как начального уровня ряда, так и среднего за период абсолютного прироста.

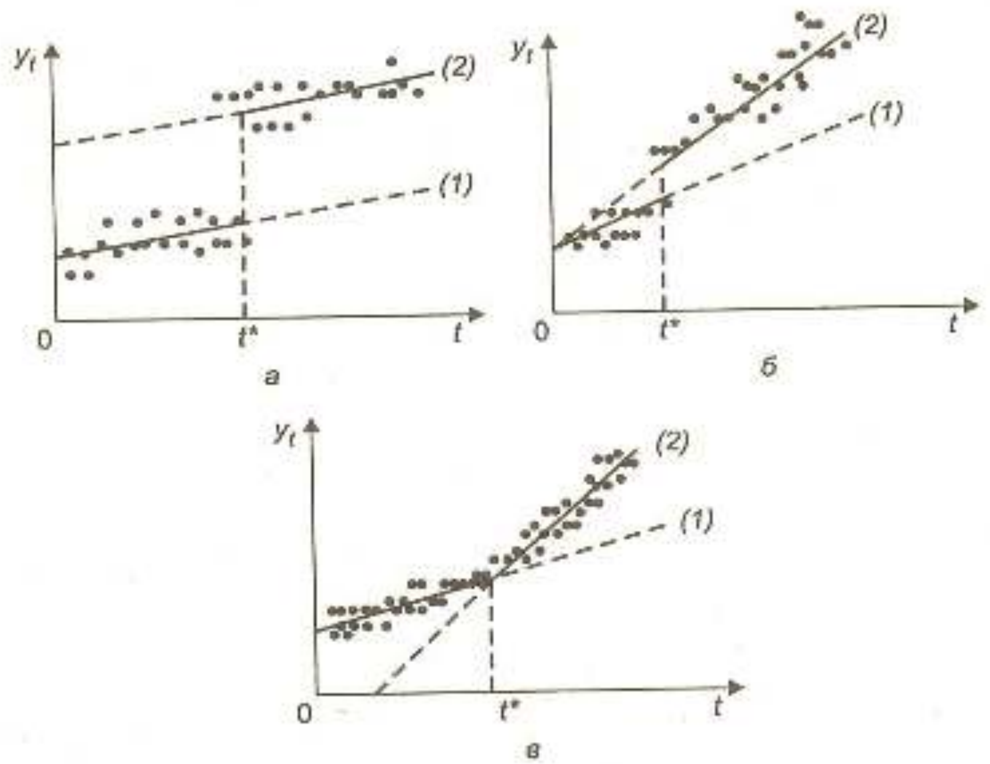


Рисунок 16. Изменение тенденции временного ряда при различном сочетании статистической значимости изменений параметров a_1 и a_2; b_1 и b_2:
а – статистически значимым является различие только между a_1 и a_2;
б – статистически значимым является различие только между b_1 и b_2;
в – статистически значимым является различие между a_1 и a_2, а также между b_1 и b_2

Один из статистических методов тестирования при применении перечисленных выше ситуаций для характеристики тенденции изучаемого временного ряда был предложен американским экономистом Дамодаром Гуйарати.

Этот метод основан на включении в модель регрессии фиктивной переменной Z_t, которая принимает значения 1 для всех $t < t^*$, принадлежащие промежутку времени до изменения характера тенденции, далее – промежутку (1), и 0 значения для всех $t > t^*$, принадлежащие промежутку времени после изменения характера тенденции, далее – промежутку (2).

Д. Гуйарати предлагает определять параметры следующего уравнения регрессии:

$$y_t = a + b \cdot Z_t + c \cdot t + d \cdot (Z_t \cdot t) + \varepsilon_t. \qquad (68)$$

Таким образом, для каждого промежутка времени получим следующие значения:

Промежуток	Значение Z	Уравнение
Промежуток (1)	$Z = 1$	$y_t = (a + b) + (c + d) \cdot t + \varepsilon_t$
Промежуток (2)	$Z = 2$	$y_t = a + c \cdot t + \varepsilon_t$

Сопоставив полученные уравнения с уравнениями (1) и (2) Таблицы (3), нетрудно заметить, что

$$a_1 = (a + b); \qquad b_1 = (c + d);$$

$$a_2 = a; \qquad b_2 = c.$$

Параметр b есть разница между свободными членами уравнений (1) и (2), а параметр d - разница между параметрами b_1 и b_2 уравнений (1) и (2).

Оценка статистической значимости различий a_1 и a_2, а также b_1 и b_2 эквивалентна оценке статистической значимости параметров b и d уравнения (68). Эту оценку можно провести при помощи t-критерия Стьюдента (Приложение 1).

Таким образом, если в уравнении (68) b является статистически значимым, а d – нет, то изменение тенденции вызвано только различиями параметров a_1 и a_2 (рис.16 *а*).

Если в этом уравнении параметр d – статистически значим, а b – незначим, то изменение характера тенденции вызвано различиями параметров b_1 и b_2 (рис. 16 *б*).

Наконец, если оба коэффициента b и d являются статистически значимыми, то на изменение характера тенденции повлияли как различия между a_1 и a_2, так и различия b_1 и b_2 (рис. 16 *в*).

Замечание. Этот метод можно использовать не только в дополнение к тесту Чоу, но и самостоятельно для проверки гипотезы о структурной стабильности тенденции изучаемого временного ряда.

Основное его преимущество перед тестом Чоу состоит в том, что нужно построить только одно, а не три уравнения тренда.

Нами был рассмотрен простейший случай применения теста Чоу для моделирования линейной тенденции. Однако этот тест (а также модель (68) с фиктивной переменной) может использоваться во многих прикладных исследованиях при проверке гипотез о структурной стабильности и в более сложных моделях взаимосвязи двух и более временных рядов.

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлены структурные изменения исследуемых динамических процессов?
2. Как осуществляется моделирование тенденции временного ряда при наличии структурных изменений ?
3. В чём заключаются особенности теста Чоу?
4. Изложите суть метода Гуйарати. В чем его преимущество перед тестом Чоу?

9. Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Имеются данные о потреблении электроэнергии жителями региона за 5 лет (20 кварталов):

№ квартала	*Потребление электроэнергии (тыс. кВт ч)*
1	120
2	130
3	185
4	195
5	200
6	260
7	400
8	450
9	470
10	370
11	230
12	410
13	340
14	230
15	110
16	100
17	240
18	500
19	550
20	510

Получить модель временного ряда потребления электроэнергии, используя линейный тренд.

Построить график полученной зависимости.

Оценить динамику потребления электроэнергии жителями региона за исследуемый период.

Задание 2

Имеются данные о валовом доходе торгового предприятия за 15 лет, в млн.руб:

№ года	*Валовый доход (млн.руб)*
1	29
2	47
3	83
4	46
5	52
6	39
7	71
8	21
9	33
10	68
11	95
12	57
13	43
14	92
15	34

Получить модель валового дохода торгового предприятия, используя параболический тренд.

Построить график полученной зависимости.

Оценить динамику валового дохода торгового предприятия за исследуемый период.

Задание 3

Имеются данные за 4 года (16 кварталов) о среднем уровне потребления мяса жителями региона.

Установить, содержит ли временной ряд сезонные колебания. Определить, какой из моделей (аддитивной или мультипликативной) соответствует изучаемый ряд.

Построить модель временного ряда с учетом сезонной компоненты.

№ квартала	*Среднее потребление мяса на душу, кг.*
1	41,2
2	35,3
3	40,7
4	55,1
5	80,1
6	65,9
7	64,2
8	70,5
9	61,1
10	51,7
11	59,4
12	65,8
13	76,3
14	63,2
15	67,4
16	59,5

Задание 4

Имеются данные об объёме экспорта Российской Федерации (млрд долл., цены Фондовой Общероссийской биржи (ФОБ)) за 6 лет (24 квартала):

Номер квартала	*Экспорт, млрд долл., цены ФОБ*	*Номер квартала*	*Экспорт, млрд долл., цены ФОБ*
1	4087	13	6975
2	4737	14	6891
3	5768	15	7527
4	6005	16	7971
5	5639	17	5875
6	6745	18	6140
7	6311	19	6248
8	7107	20	6041
9	5741	21	4626
10	7087	22	6501
11	7310	23	6284
12	8600	24	6707

1. Постройте график временного ряда.

2. Постройте аддитивную и мультипликативную модели временного ряда.

3. Оцените качество каждой модели через показатели средней абсолютной ошибки и среднего относительного отклонения. Выберите лучшую модель.

Задание 5

Имеются данные о разрешениях на строительство нового частного жилья в 1990 – 1994 гг., % к уровню 1987 г.

Месяц	1990	1991	1992	1993	1994
Январь	92,9	61,4	71,2	78,3	86,4
Февраль	113,4	51,0	69,9	76,4	87,5
Март	86,2	55,3	74,3	74,5	80,2
Апрель	80,8	59,1	70,2	68,5	84,3
Май	73,7	59,5	68,4	71,6	86,8
Июнь	69,2	64,3	68,5	72,1	86,9
Июль	71,9	62,5	68,6	73,3	85,2
Август	69,9	63,1	70,6	76,2	85,0
Сентябрь	69,4	61,2	69,7	79,8	87,5
Октябрь	63,3	63,2	72,3	81,2	90,0
Ноябрь	60,0	64,3	73,5	83,5	88,4
Декабрь	61,0	63,9	72,5	88,0	85,7

1. Рассчитайте трендовую и сезонную компоненты.

2. Постройте аддитивную модель этого ряда.

Задание 6

Имеются данные об объёмах продаж в перерабатывающей промышленности в сопоставимых ценах 1987г., млрд руб.

1. Рассчитайте трендовую и сезонную компоненты.

2. Постройте мультипликативную модель этого ряда.

Месяц	1990	1991	1992	1993	1994
Январь	472,5	477,9	510,9	541,0	578,2
Февраль	482,1	467,5	484,7	512,3	539,4
Март	489,5	470,9	486,6	512,6	545,3
Апрель	493,6	469,1	488,4	511,5	551,9
Май	488,0	478,1	489,5	511,9	549,7
Июнь	490,6	480,6	486,6	513,9	550,1
Июль	492,5	479,3	491,8	520,0	554,0
Август	488,1	484,2	495,2	515,9	550,0
Сентябрь	493,1	484,9	491,8	524,2	565,6
Октябрь	484,5	485,6	496,1	527,1	564,7
Ноябрь	483,0	486,1	498,8	529,8	566,9
Декабрь	476,9	484,7	501,5	534,9	572,7

Задание 7

На основе помесячных данных о потреблении электроэнергии в регионе, млн кВт · ч, за последние 3 года была построена аддитивная модель временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты за соответствующие месяцы приводятся в таблице

Январь	+25	Май	-32	Сентябрь	+2
Февраль	+10	Июнь	-38	Октябрь	+15
Март	+6	Июль	-25	Ноябрь	+27
Апрель	-4	Август	-18	Декабрь	

Уравнение тренда выглядит следующим образом:

$$T = 300 + 1{,}5 \cdot t$$

(при расчете параметров тренда для моделирования переменной времени использовались натуральные числа t = 1.. 36).

1. Определите значение сезонной компоненты за декабрь.

2. На основе построенной модели дайте точечный прогноз ожидаемого потребления электроэнергии в течение первого квартала следующего года.

Задание 8

Имеются данные об уровне дивидендов выплачиваемых по обыкновенным акциям (%), и среднегодовой стоимости основных фондов компании (млн руб.) в сопоставимых ценах за последние десять лет.

Показатель	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Среднегодовая стоимость основных фондов	72	75	77	77	79	80	78	79	80
Дивиденды по основным акциям	4,2	3,9	2,4	2,0	1,9	1,7	1,8	1,6	1,7

1. Построить модель линейной регрессии по первым разностям. В качестве зависимой переменной использовать показатель дивидендов по обыкновенным акциям.
2. Проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках по критерию Дарбина-Уотсона для полученной модели.

Задание 9

Представлены данные о величине ежемесячных доходов (тыс.у.е.), затратах на питание (тыс.у.е.) и численности членов семьи (человек).

Семья	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Расходы на питание, тыс.у.е.	2,4	4,8	3,9	5,9	7,5	3,5	2,1	5,4	3,3	4,2	3,4	1,6
Доход семьи, тыс.у.е.	7,8	12,5	12,9	14,6	22,7	10,5	5,4	18,8	9,6	14,6	9,1	5,2
Количество членов семьи	1	3	2	3	5	2	1	4	3	3	2	1

1. Построить модель множественной линейной регрессии зависимости расходов на питание от доходов семьи и количества членов семьи.

2. Проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках по критерию Дарбина-Уотсона для полученной модели.

Задание 10

В таблице приводятся данные о потреблении и личных доходах населения за семь лет.

Показатель	1	2	3	4	5	6	7
Потребление, тыс. долл	300	310	325	340	350	370	385
Личные доходы, тыс. долл	335	340	360	378	400	417	430

1. Постройте уравнение линейной регрессии, используя метод первых разностей.

2. Постройте линейную множественную модель зависимости потребления от личных доходов, включив в нее фактор времени.

3. Проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках по критерию Дарбина-Уотсона для полученных моделей.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Критические значения t–критерия Стьюдента

на уровнях значимости 0,10; 0,05; 0,01

k	α			k	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений *F*-критерия Фишера на уровне значимости α = 0,05

k2 \ k1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений статистики Дарбина-Уотсона

d_L, d_U на уровне значимости $\alpha = 0,05$

n	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0,61	1,40	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0,70	1,36	0,47	1,9	-	-	-	-	-	-
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29	-	-	-	-
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	-	-	-	-
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	-	-	-	-
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,6	1,93	-	-	-	-
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	-	-	-	-
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	-	-	-	-
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	-	-	-	-
15	0,80	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,9	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,4	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев В.С. Эконометрика: учебник для академического бакалавриата / В.С. Тимофеев, А.В. Фадеенков, В.Ю. Щеколдин. 2-е изд., перераб. и доп.– Москва: Издательство Юрайт, 2015.– 328 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. 12-е изд..– Москва: Издательство Юрайт, 2014.– 479 с.
3. Удинцова Н.М. Эконометрика. Часть 1: Парная регрессия и корреляция в эконометрических исследованиях: учебное пособие / Н.М. Удинцова, Н.А. Коптева, - Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2015. – 61 с.
4. Удинцова Н.М. Эконометрика. Часть 2: Множественная регрессия и корреляция в эконометрических исследованиях: учебное пособие / Н.М. Удинцова, Н.А. Коптева, - Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2016. – 73 с.
5. Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / В.Н. Калинина. 2-е изд., перераб. и доп.– Москва: Издательство Юрайт, 2013.– 472 с.
6. Коптева Н.А. Корреляционно-регрессионный и дисперсионный анализ: лабораторный практикум / Н.А. Коптева, Н.М. Удинцова, С.А. Коробской, И.П. Шульгина.– Зерноград: ФГБОУ ВПО АЧГАА, 2012. – 55 с.
7. Коптева Н.А. Ряды динамики. Системы эконометрических уравнений: лабораторный практикум по эконометрике / Н.А. Коптева, С.А.Коробской, Е.В. Усова, И.П. Шульгина.– Зерноград: ФГБОУ ВПО АЧГАА, 2012. – 107 с.
8. Коптева Н.А. Анализ и построение регрессионных моделей транспортных ситуаций. Решение транспортной задачи методами линейного программирования: Учебно-методическое пособие к курсовой работе / Н.А. Коптева, Н.М. Удинцова, С.А. Коробской.– Зерноград: ФГБОУ ВПО АЧГАА, 2012. – 84 с.
9. Магнус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс: учебник / Я.Р. Магнус, П.Р. Катышев, А.А. Пересецкий. – 7-е изд., испр.– Москва: Дело, 2005. – 504 с.
10. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др., Под. ред. И.И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп.– Москва: Финансы и статистика, 2005.– 576 с.

Учебное издание

Удинцова Надежда Михайловна
канд. техн. наук, доцент

Коптева Нина Алексеевна
доктор техн. наук, профессор

Временные ряды

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Объем ЭИ: 1,68 Мб.
Формат ЭИ: Portable Document Format (PDF).